ТОМСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
Экономический факультет

ПРАКТИКУМ ПО ТЕОРИИ ВЕРОЯТНОСТЕЙ И МАТЕМАТИЧЕСКОЙ СТАТИСТИКЕ ДЛЯ ЭКОНОМИСТОВ

ЧАСТЬ 1

Томск
2016

ОДОБРЕНО кафедрой математических методов и информационных технологий в экономике

Зав. кафедрой, профессор В.В. Домбровский

РАССМОТРЕНО и УТВЕРЖДЕНО
методической комиссией экономического факультета

Протокол № 3 от 5 декабря 2015 г.

Председатель комиссии, доцент Ю.А. Рюмина

В настоящем практикуме приведены необходимые сведения из основ теории вероятностей, сопровождающиеся достаточно большим количеством примеров. Большое внимание уделено задачам (в том числе экономическим), приводимым как с решениями, так и для самостоятельной работы.

Практикум предназначен для студентов экономического факультета дневной формы обучения.

СОСТАВИТЕЛИ:
профессор В.А. Удод, доцент Е.А. Андриенко

1. Основные понятия теории вероятностей

1.1. Испытания и события

Опыт, эксперимент, наблюдение явления будем называть **испытанием**.

Под испытанием, в широком смысле, понимается некоторая воспроизводимая совокупность условий.

Примеры испытаний: подбрасывание монеты; подбрасывание игральной кости; вынимание наугад шара из урны; вынимание наугад карты из колоды; выстрел по мишени; сдача экзамена.

Произвольное множество Ω назовем **пространством элементарных событий**, а элементы ω этого множества будем называть **элементарными событиями** или **элементарными исходами**.

Элементарным событиям соответствуют взаимоисключающие и притом неразложимые исходы испытания.

Замечание. Ввиду большого разнообразия случайных явлений нельзя дать более конкретное определение пространства элементарных событий. Для описания каждой реальной задачи множество Ω выбирается наиболее подходящим образом.

Рассмотрим ряд примеров, поясняющих выбор множества Ω (пространства элементарных событий).

Пример 1. Испытание – подбрасывание монеты один раз. Элементарные события: ω_1 – выпадение «герба», ω_2 – выпадение «решки». Таким образом, пространство элементарных событий $\Omega = \{\omega_1, \omega_2\}$ или $\Omega = \{Г, Р\}$.

Пример 2. Испытание – подбрасывание двух монет один раз. Элементарные события: ω_1 – выпадение «герба» на обеих монетах, ω_2 – выпадение «герба» на первой монете и «решки» – на второй, ω_3 – выпадение «решки» на первой монете и «герба» – на второй, ω_4 – выпадение «решки» на обеих монетах. Таким образом, пространство элементарных событий $\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \omega_3, \omega_4\}$ или $\Omega = \{ГГ, ГР, РГ, РР\}$.

Пример 3. Испытание – сдача студентом двух зачетов. Элементарные события: ω_1 – студент сдал оба зачета; ω_2 – студент сдал первый зачет, а второй – не сдал; ω_3 – студент не сдал первый зачет, а второй – сдал; ω_4 – студент не сдал оба зачета. Таким образом, пространство элементарных событий $\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \omega_3, \omega_4\}$ или Ω = {СС, СН, НС, НН}.

Пример 4. Испытание – подбрасывание один раз игральной кости. Элементарные события: ω_1 – выпадение 1 очка, ω_2 – выпадение 2 очков, …, ω_6 – выпадение 6 очков. Таким образом, пространство элементарных событий $\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \omega_3, \omega_4, \omega_5, \omega_6\}$ или Ω = {1, 2, 3, 4, 5, 6}.

Пример 5. Испытание – подбрасывание монеты до первого появления «герба». Пространство элементарных событий состоит из бесконечного множества элементов: $\Omega = \{\underbrace{Г}_{\omega_1}, \underbrace{РГ}_{\omega_2}, \underbrace{РРГ}_{\omega_3}, \underbrace{РРРГ}_{\omega_4}, ...\}$.

Пример 6. Имеется урна, в которой находятся 1 белый, 2 синих и 3 красных шара. Испытание – извлечение наугад одного шара из урны. Элементарные события: ω_1 – извлечен белый шар, ω_2 – извлечен первый синий шар, ω_3 – извлечен второй синий шар, ω_4 – извлечен первый красный шар, ω_5 – извлечен второй красный шар, ω_6 – извлечен третий красный шар. Таким образом, пространство элементарных событий $\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \omega_3, \omega_4, \omega_5, \omega_6\}$ или Ω = {*Б*, *С*1, *С*2, *К*1, *К*2, *К*3}.

Пример 7. Испытание – выстрел по плоской мишени. Введем в плоскости мишени прямоугольную систему координат *x0y* и каждому исходу испытания (попадание в определенную точку плоскости) поставим в соответствие координаты этой точки. Таким образом, пространство элементарных событий – это вся плоскость или множество всех упорядоченных пар действительных чисел: $\Omega = \{ (x, y) \mid -\infty < x < +\infty, -\infty < y < +\infty \}$.

Произвольное подмножество пространства элементарных событий называется **случайным событием** или просто **событием**.

На неформальном (описательном) уровне событием называется любой факт, который в результате испытания может произойти или не произойти.

Будем обозначать события прописными (заглавными) буквами латинского алфавита: *A*, *B*, *C* и т.д.

Рассмотрим несколько примеров событий.

Пример 8. Испытание – два выстрела по мишени. События:

A = {ни одного попадания};

B = {одно попадание}.

Пример 9. Испытание – вынимание наугад одной карты из колоды. События:

A = {вынута карта бубновой масти};

B = {вынут туз};

C = {вынут король пик}.

Пример 10. Испытание – вынимание наугад двух карт из колоды. События:

A = {вынуты две карты одной масти};

B = {вынуты два туза};

C = {вынуто не менее одного валета}.

Пример 11. Испытание – подбрасывание один раз игральной кости. Событие А = {выпало нечетное число очков}. Поскольку в данном случае пространство элементарных событий $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ (см. пример 4), то событие A можно представить в следующей эквивалентной форме $A = \{1, 3, 5\}$.

Пример 12. Испытание – подбрасывание монеты до первого появления «герба». Событие A = {подбрасывать пришлось не более трех раз}. Поскольку в данном случае пространство элементарных событий $\Omega = \{Г, РГ, РРГ, РРРГ, \ldots\}$ (см. пример 5), то событие A можно представить в следующей эквивалентной форме $A = \{Г, РГ, РРГ\}$.

Пример 13. Имеется урна, в которой находятся 1 белый, 2 синих и 3 красных шара. Испытание – извлечение наугад одного шара из урны. Событие A = {вынут синий шар}, B = {вынут цветной шар}. Поскольку в данном случае пространство элементарных событий $\Omega = \{Б, С1, С2, К1, К2, К3\}$ (см. пример 6), то события A и B можно представить в следующей эквивалентной форме $A = \{С1, С2\}$, $B = \{С1, С2, К1, К2, К3\}$.

Пример 14. Имеется урна, в которой находятся 1 белый, 2 черных и 3 красных шара. Испытание – извлечение наугад двух шаров из урны. Событие A = {вынуты шары разного цвета}, B = {вынуты шары одного цвета}.

Говорят, что в результате испытания **наступило (произошло, осуществилось)** событие A, если произошло элементарное событие $\omega \in A$.

Пример 15. Испытание – подбрасывание один раз игральной кости. Событие A = {выпало число очков большее, чем 3}. Поскольку в данном случае $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ (см. пример 4), то событие A

можно представить в следующей эквивалентной форме $A = \{4, 5, 6\}$. Отсюда следует, что событие А наступит, если произойдет либо элементарное событие ω_4, либо элементарное событие ω_5, либо элементарное событие ω_6, т.е. если выпадет либо 4, либо 5, либо 6 очков.

1.2. Операции над событиями

Суммой событий A и B называется событие C, состоящее из всех элементарных событий, которые входят или в событие A или в событие B, или в то и другое. Обозначают $C = A + B$ или $C = A \bigcup B$.

Событие A + B состоит (заключается) в том, что произошло по крайней мере одно из событий A или B (т.е. либо событие A, либо событие B, либо A и B одновременно).

Произведением событий A и B называется событие C, состоящее из всех элементарных событий, которые одновременно входят в оба события A и B. Обозначают $C = AB$ или $C = A \bigcap B$.

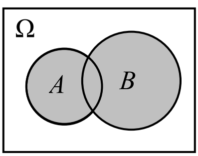
Событие AB происходит тогда и только тогда, когда происходят одновременно и событие A, и событие B.

Разностью событий A и B называется событие C, состоящее из всех элементарных событий, которые входят в событие A, но не входят в событие B. Обозначают $C = A - B$ или $C = A \setminus B$.

Событие A – B состоит (заключается) в том, что событие A произошло, а событие B не произошло.

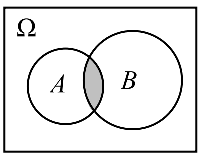
Геометрическая интерпретация операций над событиями

Для наглядности пространство элементарных событий Ω изображают в виде некоторой области на плоскости (например, в виде прямоугольника), элементарные события ω – точками в этой области, а события – как отдельные части области. Исходя из этого, операции над событиями можно изобразить так, как показано на рис. 1.1 – 1.3.



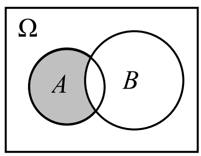
$A + B$

Рис. 1.1



$A\,B$

Рис. 1.2



$A - B$

Рис. 1.3

Пример 16. Испытание состоит в подбрасывании двух монет. Рассматриваются следующие события: A = {появление «герба» на первой монете}; B = {появление «герба» на второй монете}. Что представляют собой события: $C = A + B$, $D = AB$, $E = A - B$, $F = B - A$?

Решение. Для данной задачи пространство элементарных событий $\Omega = \{ГГ, ГР, РГ, РР\}$ (см. пример 2). Поэтому события A и B можно представить в следующей эквивалентной форме: $A = \{ГГ, ГР\}$, $B = \{ГГ, РГ\}$.

По определению суммы событий в событие C входят все элементы Ω, которые входят либо в A, либо в B. Следовательно, $C = \{ГГ, ГР, РГ\}$ = {появление хотя бы одного «герба»}.

По определению произведения событий в событие D входят все элементы Ω, которые одновременно входят в оба события A и B. Следовательно, $D = \{ГГ\}$ = {появление двух «гербов»}.

По определению разности событий в событие E входят все элементы Ω, которые входят в событие A, но не входят в событие B. Следовательно, $E = \{ГР\}$ = {появление «герба» на первой монете и «решки» – на второй}. В событие F входят все элементы Ω, которые входят в событие B, но не входят в событие A. Следовательно, $F = \{РГ\}$ = {появлении «решки» на первой монете и «герба» – на второй}.

1.3. Виды случайных событий

Множество Ω называется **достоверным** событием, а пустое множество $\varnothing$ называется **невозможным** событием.

Достоверное событие в результате испытания неизбежно происходит, а невозможное заведомо не может произойти.

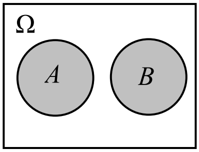
События A и B называются **несовместными**, если их произведение есть невозможное событие, т.е. если $AB = \varnothing$ (рис. 1.4). В противном случае события называются **совместными**.

Несовместные события не могут наступить одновременно, а совместные могут.

Событие $\overline{A} = \Omega - A$ называется **противоположным** событию A (рис. 1.5).

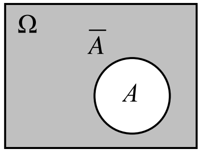
Событие $\overline{A}$ означает, что событие A не произошло.

Говорят, что событие A **входит** в событие B или событие A **влечет за собой** событие B, и пишут $A \subset B$, если все элементарные события, принадлежащие A входят в B (рис. 1.6).



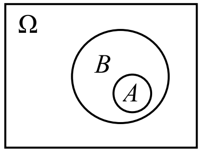
$AB = \varnothing$

Рис. 1.4



$\overline{A}$

Рис. 1.5



$A \subset B$

Рис. 1.6

События называют **равновозможными**, если нет оснований полагать, что одно событие является более возможным, чем другие.

Пример 17. Испытание – подбрасывание один раз игральной кости. Пространство элементарных событий $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ (см. пример 4). Рассмотрим следующие события:

A = {выпало менее семи очков};

B = {выпало девять очков};

C = {выпало четное число очков};

D = {выпало нечетное число очков};

E = {выпало число очков более трех};

F = {выпало два или четыре очка}.

Событие A является достоверным событием, так как $A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\} = \Omega$.

Событие B является невозможным событием, т.е. $B = \varnothing$, так как ему не принадлежит ни одно элементарное событие из Ω.

События C и D являются несовместными, так как $C = \{2, 4, 6\}$, $D = \{1, 3, 5\}$ и $CD = \varnothing$.

События C и E являются совместными, так как $C = \{2, 4, 6\}$, $E = \{4, 5, 6\}$ и $CE = \{4, 6\} \neq \varnothing$.

Событие C является противоположным событию D, т.е. $C = \overline{D}$, так как $\overline{D} = \Omega - D = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\} - \{1, 3, 5\} = \{2, 4, 6\} = C$. Аналогично $D = \overline{C}$, так как $\overline{C} = \Omega - C = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\} - \{2, 4, 6\} = \{1, 3, 5\} = D$.

Событие F влечет за собой событие C т.е. $F \subset C$, так как $F = \{2, 4\}$, $C = \{2, 4, 6\}$ и $\{2, 4\} \subset \{2, 4, 6\}$.

Свойства операций над событиями

1. $A + \overline{A} = \Omega$.
2. $A \cdot \overline{A} = \varnothing$.
3. $(A + B)C = AC + BC$.

4. $\overline{A+B} = \overline{A} \cdot \overline{B}$.

5. $\overline{AB} = \overline{A} + \overline{B}$.

6. $A \cdot \Omega = A$.

Дополнительно укажем еще несколько свойств операций над событиями: $A + A = A$, $A \cdot A = A$, $\overline{\overline{A}} = A$, $A + B = B + A$, $A \cdot B = B \cdot A$, $A + \Omega = \Omega$.

Рассмотрим теперь примеры по выражению одних событий через другие, более «простые», события с помощью операций сложения событий, их умножения и перехода к противоположному событию.

Пример 18. Имеются две урны: в первой – 3 белых и 2 черных шара, во второй – 4 белых и 6 черных шаров. Испытание – вынимание наугад из каждой урны по одному шару. Событие A_1 = {из первой урны вынут белый шар}, A_2 = {из второй урны вынут белый шар}. Выразить через A_1 и A_2 следующие события:

1) B = {оба вынутых шара белые};
2) C = {оба вынутых шара черные};
3) D = {вынутые шары одного цвета};
4) E = {вынутые шары разного цвета};
5) F = {среди вынутых шаров имеется хотя бы один белый}.

Решение. 1) Событие B наступит, если и только если из первой урны будет вынут белый шар (событие A_1) и из второй урны будет вынут также белый шар (событие A_2), то есть $B = A_1A_2$.

2) Событие C наступит, если и только если из первой урны будет вынут черный шар (событие $\overline{A_1}$) и из второй урны будет вынут также черный шар (событие $\overline{A_2}$), то есть $C = \overline{A_1}\,\overline{A_2}$.

3) Событие D наступит, если и только если оба вынутых шара – белые (событие B) или оба вынутых шара – черные (событие C), то есть $D = B + C = A_1A_2 + \overline{A_1}\,\overline{A_2}$.

4) Событие E наступит, если и только если из первой урны будет вынут белый шар (событие A_1), а из второй – черный (событие $\overline{A_2}$), или если из первой урны будет вынут черный шар (событие $\overline{A_1}$), а из второй – белый (событие A_2), то есть $E = A_1\overline{A_2} + \overline{A_1}A_2$.

5) *Первый способ рассуждений.* Событие F наступит, если и только если среди вынутых шаров имеется ровно один (т.е. вынутые шары разного цвета) или ровно два белых шара, то есть

$$F = E + B = A_1\overline{A_2} + \overline{A_1}A_2 + A_1A_2\,. \qquad (1)$$

Второй способ рассуждений. В случае, когда говорится про «хотя бы один», принято переходить к противоположному событию. Противоположным для F является событие $\overline{F} = \{$среди вынутых шаров нет белых$\} = \overline{A_1}\,\overline{A_2}$, значит

$$F = \Omega - \overline{F} = \Omega - \overline{A_1}\,\overline{A_2}\,. \qquad (2)$$

Третий способ рассуждений. Событие F наступит, если и только если из первой урны будет вынут белый шар (при этом все равно какой шар будет вынут из второй урны), или если из второй урны будет вынут белый шар (при этом все равно какой шар будет вынут из первой урны). Таким образом,

$$F = A_1 + A_2. \qquad (3)$$

На первый взгляд мы получили три разных ответа (1)-(3), но на самом деле это не так. Действительно, так как $A + A = A$, то $A_1A_2 + A_1\overline{A_2} + \overline{A_1}A_2 = A_1A_2 + A_1A_2 + A_1\overline{A_2} + \overline{A_1}A_2 = \left(A_1A_2 + A_1\overline{A_2}\right) + \left(A_1A_2 + \overline{A_1}A_2\right) =$ | свойство 3 операций над событиями | $= A_1\left(A_2 + \overline{A_2}\right) + A_2\left(A_1 + \overline{A_1}\right) =$ | свойство 1 операций над событиями | $= A_1\Omega + A_2\Omega =$ | свойство 6 операций над событиями | $= A_1 + A_2$.

Аналогично $\Omega - \overline{A_1}\,\overline{A_2} =$ | по определению противоположного события | $= \overline{\overline{A_1}\,\overline{A_2}} =$ | свойство 5 операций над событиями | $= \overline{\overline{A_1}} + \overline{\overline{A_2}} =$ | так как противоположным для события $\overline{A}$ является событие A | $= A_1 + A_2$.

Формулы (1)-(3) наглядно свидетельствуют о том, что одно событие может быть выражено через другие события не единственным образом. Поэтому для разложения какого-либо события через другие события целесообразно дополнительно учитывать цель (либо свойство и т.п.), ради которой такое разложение осуществляется.

Пример 19. Испытание – сдача студентом трех экзаменов. Событие $A_i = \{i$-й экзамен сдан$\}$ $(i = 1, 2, 3)$. Выразить через A_i $(i = 1, 2, 3)$ следующие события:

1) $B = \{$сдан только 2-й экзамен$\}$;
2) $C = \{$сданы только два экзамена$\}$;
3) $D = \{$второй экзамен сдан$\}$.

Решение. 1) Событие B наступит, если и только если второй экзамен будет сдан, а первый и третий – не сданы, то есть $B = \overline{A_1}A_2\overline{A_3}$.

2) Событие C наступит, если и только если первый и второй экзамены будут сданы, а третий – не сдан (событие $A_1 A_2 \overline{A}_3$), или первый и третий экзамены будут сданы, а второй – не сдан (событие $A_1 \overline{A}_2 A_3$), или второй и третий экзамены будут сданы, а первый – не сдан (событие $\overline{A}_1 A_2 A_3$), то есть

$$C = A_1 A_2 \overline{A}_3 + A_1 \overline{A}_2 A_3 + \overline{A}_1 A_2 A_3 .$$

3) Событие D наступит, если и только если второй экзамен будет сдан (при этом все равно будут первый и третий экзамены сданы или нет), то есть $D = A_2$.

Пример 20. Игральная кость подбрасывается до тех пор, пока не выпадет 6 очков. Событие A_i заключается в том, что при i-м подбрасывании ($i = 1, 2, 3, 4, 5$) выпало 6 очков. Выразить через A_i ($i = 1, 2, 3, 4, 5$) следующие события:

В = {подбрасывать пришлось не более трех раз};

С = {опыт прекратится в точности после пятого подбрасывания}.

Решение. 1) Событие B наступит, если и только если подбрасывать пришлось один, два или три раза. Количество подбрасываний определяется выпадением шести очков при очередном подбрасывании. Потребуется ровно одно подбрасывание, если при первом подбрасывании выпадет 6 очков (событие A_1). Потребуется ровно два подбрасывания, если при первом подбрасывании не выпадет 6 очков, а при втором подбрасывании выпадет 6 очков (событие $\overline{A}_1 A_2$). Потребуется ровно три подбрасывания, если при первом и втором подбрасываниях не выпадет 6 очков, а при третьем подбрасывании выпадет 6 очков (событие $\overline{A}_1 \overline{A}_2 A_3$). Таким образом,

$$B = A_1 + \overline{A}_1 A_2 + \overline{A}_1 \overline{A}_2 A_3 .$$

2) Событие C наступит, если и только если при первых четырех подбрасываниях не выпадет 6 очков, а при пятом подбрасывании выпадет 6 очков, то есть $C = \overline{A}_1 \overline{A}_2 \overline{A}_3 \overline{A}_4 A_5$.

Задачи

1. Построить пространство элементарных событий для следующих испытаний.

a) Подбрасывание трех монет один раз.

b) Подбрасывание четырех монет один раз.

c) Подбрасывание монеты до первого появления «герба», но не более четырех раз.
d) Подбрасывание двух игральных костей.
e) Подбрасывание одной монеты и одной игральной кости.
f) Из урны, где содержатся 1 белый, 1 черный и 1 синий шар, извлекают наугад 1 шар.
g) Из урны, где содержатся 1 белый, 1 черный и 1 синий шар, извлекают наугад 2 шара.
h) Из урны, где содержатся 1 белый, 1 черный и 1 синий шар, извлекают наугад 1 шар. После чего этот шар снова помещается в урну, а затем из урны наугад снова извлекают 1 шар.
i) Из урны, где содержатся 1 белый, 1 черный и 1 синий шар, извлекают наугад по одному (без возврата) шары до тех пор, пока не появится шар белого цвета.
j) Имеются две урны. В каждой урне содержатся 1 белый, 1 черный и 1 красный шар. Из обеих урн вынимают наугад по одному шару.
k) Имеются три урны. В каждой урне 1 белый и 1 черный шар. Из всех урн вынимают наугад по одному шару.
l) Имеются две урны. В первой урне содержатся 4 шара, пронумерованных цифрами от 1 до 4, во второй – 5 шаров, пронумерованных цифрами от 1 до 5. Из обеих урн вынимают наугад по одному шару.
m) Из урны, где содержатся 3 белых и 3 черных шара, извлекают наугад два шара.
n) В лифт на 1-м этаже семиэтажного дома вошли 2 человека, каждый из которых может выйти независимо от другого на любом этаже с 2-го по 7-й.
o) Сдача студентом трех зачетов.
p) Сдача студентом двух экзаменов.

2. События A и B несовместны. Чему равны события: $A - B$, $B - A$, AB?

3. Событие A входит в событие B. Чему равны события: $A + B$, AB, $A - B$?

4. В ящике находятся изделия трех сортов. Испытание состоит в извлечении детали из ящика. Рассматриваются события: A = {извлечена деталь первого сорта}; B = {извлечена деталь второго сорта}; C = {извлечена деталь третьего сорта}. Что представляют собой события: a) $A + C$; b) $AB + C$?

5. Победитель соревнования награждается: призом (событие A), денежной премией (событие B), медалью (событие C). Что представляют собой события: a) $A + B$; b) ABC; c) $AC - B$?

6. Испытание состоит в подбрасывании игральной кости. Рассматриваются следующие события:

A = {выпало не менее 3^x очков};

B = {выпало нечетное число очков};

C = {выпало 2 или 4 очка}.

Что представляют собой следующие события: a) $B + C$; b) AB; c) $B - A$?

7. Испытание состоит в подбрасывании двух монет. Рассматриваются следующие события:

A = {появление «герба» на первой монете};

B = {появление «герба» на второй монете};

C = {появление хотя бы одного «герба»};

D = {появление хотя бы одной «решки»}.

Что представляют собой следующие события: a) $A + B$; b) AB; c) $CD - B$?

8. Испытание состоит в подбрасывании двух монет. Рассматриваются следующие события:

A = {появление «герба» на первой монете};

B = {появление «герба» на второй монете};

C = {появление хотя бы одной «решки»};

D = {появление только одной «решки»};

E = {появление двух «решек»}.

Являются ли совместными следующие пары событий: a) B и C; b) B и E; c) A и D?

9. Из урны, в которой находятся 2 белых и 2 черных шара, вынимают наугад 2 шара. Рассматриваются следующие события:

A = {шары одного цвета};

B = {шары разных цветов};

C = {оба шара белые};

D = {хотя бы один шар белый}.

Являются ли совместными следующие пары событий: a) A и C; b) B и C; c) C и D; d) B и D?

10. Назвать противоположные для следующих событий:

A = {выпадение двух «гербов» при бросании двух монет};

B = {появление белого шара при вынимании наудачу одного шара из урны, в которой находятся 2 белых, 3 черных и 4 красных шара};

C = {три попадания при трех выстрелах};

D = {хотя бы одно попадание при пяти выстрелах};

E = {не более двух попаданий при пяти выстрелах};

F = {выигрыш первого игрока при игре в шахматы};

G = {появление карты пиковой масти при вынимании наугад одной карты из колоды в 36 карт};

H = {появление «герба» на второй монете при подбрасывании трех монет}.

11. По мишени производится два выстрела. Рассматриваются события A_i = {попадание в мишень при i-м выстреле} ($i = 1, 2$). Выразить через A_i ($i = 1, 2$) следующие события:

B = {два попадания};

C = {ни одного попадания};

D = {хотя бы одно попадание};

E = {ровно одно попадание}.

12. Два студента сдают экзамен. Рассматриваются события A_i = {i-й студент сдал экзамен} ($i = 1, 2$). Выразить через A_i ($i = 1, 2$) следующие события:

B = {экзамен сдал хотя бы один студент};

C = {экзамен не сдал ни один студент};

D = {экзамен сдал ровно один студент};

E = {экзамен сдали оба студента}.

13. Имеются три урны. В каждой урне содержатся 3 белых и 2 черных шара. Из каждой урны вынимают наугад по одному шару. Рассматриваются события A_i = {из i-й урны вынут белый шар} ($i = 1, 2, 3$). Выразить через A_i ($i = 1, 2, 3$) следующие события:

B = {все три шара белые};

C = {все три шара одного цвета};

D = {среди вынутых шаров имеется ровно один белый};

E = {среди вынутых шаров имеется хотя бы один белый}.

14. По мишени производится три выстрела. Рассматриваются события A_i = {попадание в мишень при i-м выстреле} ($i = 1, 2, 3$). Выразить через A_i ($i = 1, 2, 3$) следующие события:

B = {ровно одно попадание};

C = {все три промаха};

D = {хотя бы одно попадание};

E = {попадание в мишень не раньше, чем при втором выстреле}.

15. Приобретено три пакета акций, имеющихся на рынке ценных бумаг. Каждый пакет может дать или не дать доход владельцу. Рассматриваются события $A_i = \{i$-й пакет дал доход$\}$ ($i = 1, 2, 3$). Выразить через A_i ($i = 1, 2, 3$) следующие события:

$B = \{$все пакеты дали доход$\}$;

$C = \{$хотя бы один пакет не дал доход$\}$;

$D = \{$только два пакета дали доход$\}$;

$E = \{$хотя бы один пакет дал доход$\}$;

$F = \{$только один пакет дал доход$\}$.

16. Из урны, в которой находятся 10 белых и 10 черных шаров, вынимают наугад по одному шару до тех пор, пока не появится шар белого цвета. Рассматриваются события $A_i = \{$при i-м вынимании появился шар белого цвета$\}$ ($i = 1, 2, 3, 4, 5$). Выразить через A_i ($i = 1, 2, 3, 4, 5$) следующие события:

$B = \{$опыт закончился после пятого вынимания$\}$;

$C = \{$опыт закончился до четвертого вынимания$\}$.

17. Монета подбрасывается до тех пор, пока два раза подряд она не выпадет одной и той же стороной. Рассматриваются события $A_i = \{$при i-м подбрасывании выпал «герб»$\}$ ($i = 1, 2, 3, 4, 5$). Выразить через A_i ($i = 1, 2, 3, 4, 5$) следующие события:

$B = \{$опыт закончился после пятого подбрасывания$\}$;

$C = \{$опыт закончился до четвертого подбрасывания$\}$.

18*. Каждый из двух игроков подбрасывает по 2 монеты. Выигрывает тот, у которого выпадет большее число «гербов». Событие A_{1i} заключается в том, что первый игрок выбросил «герб» на i-ой монете ($i = 1, 2$), событие A_{2i} заключается в том, что второй игрок выбросил «герб» на i-ой монете ($i = 1, 2$). Выразить через A_{1i}, A_{2i} ($i = 1, 2$) следующие события:

$B = \{$выиграл первый игрок$\}$;

$C = \{$ничья$\}$.

19*. Два стрелка стреляют по мишени. Оба они делают по одному выстрелу, а затем каждый из стрелков стреляет еще раз, если при первом сделанном им выстреле он промахнулся. Событие A_{1i} заключается в том, что первый стрелок попал в мишень при i-ом выстреле ($i = 1, 2$), событие A_{2i} заключается в том, что второй стрелок попал в мишень при i-ом выстреле ($i = 1, 2$). Выразить через A_{1i}, A_{2i} ($i = 1, 2$) следующие события:

$B = \{$ровно 2 попадания в мишень$\}$;

$C = \{$ровно 1 попадание в мишень$\}$.

1.4. Вероятность события

Для практической деятельности важно уметь сравнивать события по степени возможности их наступления. Очевидно, события: $A = \{$выпадение дождя$\}$ и $B = \{$выпадение снега$\}$ в первый день лета в данной местности, $C = \{$выигрыш по одному билету$\}$ и $D = \{$выигрыш по каждому из n приобретенных билетов$\}$ денежно-вещевой лотереи – обладают разной степенью возможности их наступления. Поэтому для сравнения событий нужна определенная мера.

Численная мера степени объективной возможности наступления события называется **вероятностью события**.

Это определение, *качественно* отражающее понятие вероятности события, не является математическим. Чтобы оно таким стало, необходимо определить его *количественно*. Исторически сложилось так, что к настоящему времени существует несколько *количественных* определений понятия вероятности (классическое, геометрическое, статистическое и аксиоматическое). Их-то мы и рассмотрим в дальнейшем.

1.4.1. Классическое определение вероятности

Существует класс испытаний, для которых вероятности их возможных исходов можно вычислить, исходя непосредственно из самих условий испытания. Для этого нужно, чтобы различные исходы испытания обладали *симметрией* и в силу этого были объективно одинаково возможными.

Рассмотрим, например, испытание, состоящее в подбрасывании игральной кости. Если кубик выполнен симметрично, "правильно" (центр тяжести не смещен ни к одной из граней), естественно предположить, что любая из шести граней будет выпадать так же часто, как каждая из остальных. Так как достоверное событие "выпадет какая-то из граней" имеет вероятность, равную единице, и распадается на шесть одинаково возможных вариантов (1, 2, 3, 4, 5 или 6 очков), то естественно приписать каждому из них вероятность, равную 1/6.

Для всякого испытания, обладающего *симметрией возможных исходов*, можно применить аналогичный прием, который называется *непосредственным подсчетом вероятностей*.

Симметрия возможных исходов чаще всего наблюдается в искусственно организованных испытаниях, где приняты специальные меры для ее обеспечения (например, тасовка карт или костей домино, которая для того и производится, чтобы каждая из них могла быть выбрана с одинаковой вероятностью; или же приемы случайного выбора группы изделий для контроля качества в заводской практике). В таких испытаниях подсчет вероятностей событий выполняется наиболее просто. Не случайно первоначальное свое развитие (еще в XVII веке) теория вероятностей получила на материале азартных игр, которые поколениями вырабатывались именно так, чтобы результат испытания не зависел от поддающихся контролю его условий (рулетка, кости, карточные игры). Прием непосредственного подсчета вероятностей, исторически возникший вместе с математической теорией случайных явлений, был положен в основу так называемой "классической" теории вероятностей и долгое время считался универсальным. Испытания, не обладающие симметрией возможных исходов, искусственно сводились к "классической" схеме.

Несмотря на ограниченную сферу практического применения этой схемы, она все же представляет известный интерес, так как именно на ней легче всего познакомиться со свойствами вероятностей.

Классическое определение вероятности. Вероятность $\mathrm{P}(A)$ события A равна отношению количества элементарных событий m, входящих в состав события A, к количеству всех возможных элементарных событий n:

$$\mathrm{P}(A) = \frac{|A|}{|\Omega|} = \frac{m}{n}, \qquad (4)$$

где символ $|M|$ обозначает число элементов (мощность) любого конечного множества M.

Элементарные события (элементарные исходы), входящие в состав события A, называются **благоприятными** или **благоприятствующими** событию A.

В смысле вышеприведенного определения $|A|$ представляет собой количество элементарных событий, благоприятных событию A.

Замечание. Классическое определение вероятности применяется тогда, когда:

1) пространство элементарных событий Ω конечно;
2) все элементарные события ω_i $(i = 1, 2, \ldots, n)$ равновероятны (равновозможны).

Свойства вероятности

1. $\mathrm{P}(\Omega)=1$.
2. $\mathrm{P}(\varnothing)=0$.
3. $\mathrm{P}(\overline{A})=1-\mathrm{P}(A)$.
4. $0 \le \mathrm{P}(A) \le 1$ для любого события *A*.
5. Если $A \subset B$, то $\mathrm{P}(A) \le \mathrm{P}(B)$.
6. Если события *A* и *B* несовместны, то $\mathrm{P}(A+B)=\mathrm{P}(A)+\mathrm{P}(B)$.

Алгоритм решения задач на «классическую вероятность»

Шаг 1. Описываем испытание.

Шаг 2. Строим (описываем) пространство элементарных событий для данного испытания.

Шаг 3. Описываем интересующее событие (т.е. событие, вероятность которого необходимо найти).

Шаг 4. Находим вероятность интересующего события по формуле (4).

Пример 21. Найти вероятность того, что при подбрасывании игральной кости выпадет четное число очков.

Решение. Шаг 1. Испытание – подбрасывание игральной кости.

Шаг 2. Пространство элементарных событий $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ (см. пример 4).

Шаг 3. Интересующее событие A = {выпало четное число очков} = {2, 4, 6}.

Шаг 4. $|\Omega| = 6$, $|A| = 3$. Следовательно, по формуле (4) $\mathrm{P}(A) = 3 / 6 = 0.5$.

Пример 22. Найти вероятность того, что при подбрасывании трех монет: a) только на одной из них появится «герб»; b) хотя бы на одной монете появится «герб».

Решение. Шаг 1. Испытание – подбрасывание трех монет.

Шаг 2. Пространство элементарных событий Ω = {ГГГ, ГГР, ГРГ, ГРР, РГГ, РГР, РРГ, РРР}.

Шаг 3. Интересующие события: a) A = {только на одной монете появится «герб»} = {ГРР, РГР, РРГ}; b) B = {хотя бы на одной монете появится «герб»} = {ГГГ, ГГР, ГРГ, ГРР, РГГ, РГР, РРГ}.

Шаг 4. $|\Omega| = 8$, $|A| = 3$, $|B| = 7$. Следовательно, по формуле (4) $\mathrm{P}(A) = 3 / 8 = 0.375$, $\mathrm{P}(B) = 7 / 8 = 0.875$.

Пример 23. Найти вероятность того, что при вынимании наугад одной карты из колоды в 36 карт появится: a) король; b) карта пиковой масти; c) валет или дама.

Решение. Шаг 1. Испытание – вынимание наугад одной карты из колоды в 36 карт.

Шаг 2. Элементарное событие – вынута конкретная карта (9♠, 7♣, В♥, Т♦, …). Следовательно, пространство элементарных событий – это множество всех карт колоды.

Шаг 3. Интересующие события: a) $A = \{$появился король$\}$; b) $B = \{$появилась карта пиковой масти$\}$; c) $C = \{$появился валет или дама$\}$.

Шаг 4. Так как в колоде 36 карт, то $|\,\Omega\,| = 36$. Элементарных событий, благоприятных событию A (т.е. входящих в состав события A), четыре, так как в колоде 4 короля. Следовательно, $|\,A\,| = 4$. Элементарных событий, благоприятных событию B, девять, так как в колоде 9 карт пиковой масти. Следовательно, $|\,B\,| = 9$. Элементарных событий, благоприятных событию C, восемь, так как в колоде 4 валета и 4 дамы. Следовательно, $|\,C\,| = 8$. По формуле (4) окончательно имеем: $P(A) = 4 / 36 = 1 / 9$; $P(B) = 9 / 36 = 1 / 4$; $P(C) = 8 / 36 = 2 / 9$.

Задачи

20. Из слова «ДИФФЕРЕНЦИАЛ» выбирается наугад одна буква. Какова вероятность того, что она согласная?

21. В урне имеются 10 шаров: 3 белых и 7 черных. Из урны наугад вынимается один шар. Какова вероятность того, что этот шар: a) белый; b) черный?

22. Подбрасывают игральную кость. Найти вероятность того, что на верхней грани появится: a) четное число очков; b) «1» или «6»; c) больше 4 очков.

23. Участники жеребьевки тянут из ящика жетоны с номерами от 1 до 30. Найти вероятность того, что номер первого наудачу извлеченного жетона не содержит цифры 2.

24. Подбрасывают две монеты. Какое из событий является более вероятным: $A = \{$монеты лягут одинаковыми сторонами$\}$; $B = \{$монеты лягут разными сторонами$\}$?

25. Подбрасывают две монеты. Найти вероятность того, что:

a) на обеих монетах появится «герб»;

b) хотя бы на одной монете появится «герб»;

c) ни на одной монете не появится «герб».

26. Подбрасывают три монеты. Найти вероятность того, что:

a) на всех монетах появится «герб»;
b) только на двух монетах появится «герб»;
c) хотя бы на одной монете появится «герб»;
d) на монетах появится не менее двух «гербов»;
e) число выпавших «гербов» меньше числа выпавших «решек».

27. Подбрасывают четыре монеты. Найти вероятность того, что:

a) на всех монетах появится «герб»;
b) хотя бы на одной монете появится «герб»;
c) только на трех монетах появится «герб»;
d) число выпавших «гербов» меньше числа выпавших «решек».

28. Подбрасывают две игральные кости. Найти вероятность того, что на верхних гранях появятся следующие числа очков:

a) только четные;
b) одно четное, другое нечетное;
c) одинаковые;
d) сумма которых равна 4;
e) сумма которых больше, чем их произведение;
f) сумма которых меньше шести;
g) сумма которых больше восьми;
h) единица, по крайней мере, на одной кости.

29. В лифт на 1-м этаже восьмиэтажного дома вошли 2 человека, каждый из которых может выйти независимо от другого на любом этаже со 2-го по 8-й. Какова вероятность того, что:

a) оба пассажира выйдут на 6-м этаже;
b) хотя бы один пассажир выйдет на 3-м этаже;
c) оба пассажира выйдут на одном этаже;
d) оба пассажира выйдут на разных этажах;
e) оба пассажира выйдут выше 5-го этажа;
f) хотя бы один пассажир выйдет не ниже 4-го этажа;
g) первый пассажир выйдет выше второго пассажира.

30. Найти вероятность того, что наудачу взятое двузначное число окажется кратным либо 4, либо 5, либо тому и другому одновременно.

31. Имеются три урны, в каждой из которых содержится 1 белый и 1 черный шар. Из всех урн вынимают наугад по шару. Найти вероятность того, что: a) все вынутые шары белые; b) все вынутые шары одного цвета; c) среди вынутых шаров имеется хотя бы один белый; d) среди вынутых шаров имеется менее двух черных.

32. Имеются две урны, в каждой из которых содержится 1 белый, 1 черный и 1 красный шар. Из обеих урн вынимают наугад по шару. Найти вероятность того, что: a) оба вынутых шара белые; b) оба вынутых шара одного цвета; c) среди вынутых шаров ровно один черный; d) среди вынутых шаров есть красные; e) среди вынутых шаров нет белых.

33. В учебном корпусе имеются 2 столовые. Три студента независимо друг от друга идут на обед, причем каждый из них выбирает для себя какую-то одну из этих двух столовых наугад. Найти вероятность того, что: a) все три студента придут в одну столовую; b) все три студента придут в первую столовую; c) в первую столовую придет только один студент.

34. В учебном корпусе имеются 3 столовые. Два студента независимо друг от друга идут на обед, причем каждый из них выбирает для себя какую-то одну из этих трех столовых наугад. Найти вероятность того, что: a) студенты будут обедать в одной столовой; b) студенты будут обедать вместе в третьей столовой; c) студенты будут обедать в разных столовых; d) во второй столовой не будет обедать ни один студент.

35. В урне имеются по одному шару белого, черного, синего и красного цветов. Из урны вынимают наугад два шара. Найти вероятность того, что среди вынутых шаров: a) есть белый шар; b) нет черного шара.

1.4.2. Элементы комбинаторики

Комбинаторика изучает количества комбинаций, подчиненных определенным условиям, которые можно составить из элементов заданного конечного множества. При непосредственном вычислении вероятности с использованием ее классического определения (4) часто применяют формулы комбинаторики. Приведем наиболее распространенные из них.

Перестановками называются комбинации, составленные из одних и тех же n различных элементов, которые отличаются между собой только порядком расположения элементов. Общее число перестановок равно

$$P_n = n!\,, \tag{5}$$

где $n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot n$.

Замечание. Символическая запись $n!$ читается как «эн факториал». По определению полагают $0! = 1$.

Пример 24. Сколько различных трехзначных чисел можно составить из цифр 1, 2, 3?

Решение. Трехзначные числа, составленные из цифр 1, 2, 3, представляют собой комбинации составленные из одних и тех же трех элементов, которые отличаются между собой только порядком расположения элементов, т.е. являются перестановками из трех элементов. По формуле (5) количество таких комбинаций равно

$$P_3 = 3! = 1 \cdot 2 \cdot 3 = 6\ .$$

Перечислим эти числа: 123, 132, 213, 231, 312, 321.

Пример 25. Порядок выступления 7 участников конкурса определяется жребием. Сколько различных вариантов жеребьевки при этом возможно?

Решение. Каждый вариант жеребьевки отличается от других вариантов только порядком участников конкурса, т.е. является перестановкой из 7 элементов. По формуле (5) количество таких комбинаций равно

$$P_7 = 7! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 7 = 5040.$$

Сочетаниями называются комбинации, составленные из n различных элементов по m элементов, которые отличаются между собой только составом элементов, т.е. хотя бы одним элементом. Общее число сочетаний равно

$$C_n^m = \frac{n!}{m!(n-m)!}\ . \tag{6}$$

Замечание. В сочетаниях порядок расположения элементов не важен.

Замечание. Если множество A разбивается на подмножества $A_i\ (i = 1,2,...,k)$, причем $|A_i| = n_i\ (i = 1,2,...,k)$; $n_1 + n_2 + ... + n_k = n = |A|$. Тогда число таких разбиений равно

$$N_n(n_1, n_2,..., n_k) = \frac{n!}{n_1! n_2! ... n_k!}\ .$$

Пример 26. Сколькими способами можно выбрать пару цифр из трех цифр: 1, 2, 3, если порядок расположения цифр внутри пары не важен?

Решение. Пары, составленные из цифр 1, 2, 3, представляют собой комбинации из трех элементов по два элемента, которые отличаются между собой только составом элементов, т.е. являются сочетаниями из трех элементов по два. По формуле (6) количество таких комбинаций равно

$$C_3^2 = \frac{3!}{2!\cdot 1!} = \frac{1\cdot 2\cdot 3}{1\cdot 2\cdot 1} = 3\,.$$

Перечислим эти пары: (1, 2), (1, 3), (2, 3)

Пример 27. В шахматном турнире участвуют 16 человек. Сколько партий должно быть сыграно в турнире, если между любыми двумя участниками должна быть сыграна одна партия?

Решение. Каждая партия играется двумя участниками из 16 и отличается от других только составом пар участников, т.е. представляет собой сочетание из 16 элементов по 2. Их число находим по формуле (6):

$$C_{16}^2 = \frac{16!}{14!\cdot 2!} = \frac{14!\cdot 15\cdot 16}{14!\cdot 1\cdot 2} = 15\cdot 8 = 120\,.$$

Размещениями называются комбинации, составленные из n различных элементов по m элементов, которые отличаются между собой либо составом элементов, либо их порядком. Общее число размещений равно

$$A_n^m = \frac{n!}{(n-m)!}\,. \tag{7}$$

Пример 28. Сколько различных двузначных чисел можно составить из цифр 1, 2, 3?

Решение. Двузначные числа, составленные из цифр 1, 2, 3, представляют собой комбинации из трех элементов по два, которые отличаются между собой либо составом элементов, либо их порядком, т.е. являются размещениями из трех элементов по два. По формуле (7) количество таких комбинаций равно

$$A_3^2 = \frac{3!}{(3-2)!} = \frac{3!}{1!} = 2\cdot 3 = 6\,.$$

Перечислим эти числа: 12, 13, 21, 23, 31, 32.

Пример 29. Расписание одного дня состоит из 5 уроков. Найти число вариантов расписания при выборе из 11 дисциплин.

Решение. Каждый вариант расписания представляет собой комбинацию из 11 дисциплин по 5, отличающуюся от других вариантов (комбинаций) либо составом дисциплин, либо порядком их следования (или и тем, и другим), т.е. является размещением из 11 элементов по 5. Число вариантов расписаний, т.е. число размещений из 11 по 5, находим по формуле (7)

$$A_{11}^{5}=\frac{11!}{(11-5)!}=\frac{11!}{6!}=\frac{6!\cdot 7\cdot 8\cdot 9\cdot 10\cdot 11}{6!}=7\cdot 8\cdot 9\cdot 10\cdot 11=55440.$$

При решении задач комбинаторики часто используют нижеследующие правила.

Правило суммы. Если некоторый объект A может быть выбран из совокупности объектов m способами, а другой объект B может быть выбран n способами, то выбрать либо A, либо B можно $m + n$ способами.

Правило произведения. Если объект A можно выбрать из совокупности объектов m способами и после каждого такого выбора объект B можно выбрать n способами, то пара объектов (A, B) в указанном порядке может быть выбрана $m{\cdot}n$ способами.

Замечание. Пусть A, A_1, A_2, …, A_k – некоторые конечные множества. Тогда:

1) если $A=A_1\times A_2\times\ldots\times A_k$, где символ «$\times$» означает декартово произведение множеств, то

$$|A|=|A_1|\cdot|A_2|\cdot\ldots\cdot|A_k|;$$

2) если множества A_1, A_2, …, A_k попарно не пересекаются и

$$A=A_1\cup A_2\cup\ldots\cup A_k,$$

то

$$|A|=|A_1|+|A_2|+\ldots+|A_k|.$$

Примеры применения формул комбинаторики при вычислении вероятностей

Пример 30. Слово составлено из карточек, на каждой из которых написана одна буква. Затем карточки смешивают и вынимают наугад без возврата по одной. Найти вероятность того, что буквы вынимаются в порядке заданного слова: a) КНИГА, b) АНАНАС.

Решение. а) Шаг 1. Испытание – вынимание пяти карточек с буквами в случайном порядке по одной без возврата.

Шаг 2. Пространство элементарных событий Ω состоит из всевозможных комбинаций, составленных из одних и тех же букв «К», «Н», «И», «Г», «А». Комбинации отличаются между собой только порядком расположения букв. Следовательно, комбинации (элементарные события) являются перестановками из 5 букв, значит, по формуле (5) имеем $|\,\Omega\,| = P_5 = 5! = 120$.

Шаг 3. Интересующее событие $A = \{$буквы вынуты в порядке слова КНИГА$\} = \{$КНИГА$\}$ состоит из единственного элементарного события – перестановки «КНИГА». Поэтому $|A| = 1$.

Шаг 4. Так как все элементарные события равновероятны, то можно воспользоваться формулой классической вероятности (4). Таким образом, $P(A) = |A| / |\Omega| = 1 / 120$.

b) Шаг 1. Испытание – вынимание шести карточек с буквами в случайном порядке по одной без возврата.

Шаг 2. Пространство элементарных событий Ω состоит из всевозможных комбинаций, составленных из одних и тех же букв «А», «Н», «А», «Н», «А», «С». Комбинации отличаются между собой только порядком расположения букв. Следовательно, комбинации (элементарные события) являются перестановками из 6 букв, значит, по формуле (5) имеем $|\Omega| = 6! = 720$.

Шаг 3. Интересующее событие $B = \{$буквы вынуты в порядке слова АНАНАС$\}$. Для того, чтобы подсчитать общее количество перестановок, при которых получается слово «АНАНАС», необходимо учесть, что повторяющиеся буквы «А» и «Н» можно произвольным образом переставлять между собой, при этом слово не изменится. Три буквы «А» можно разместить на первом, третьем и пятом местах $3! = 6$ способами. Две буквы «Н» можно разместить на втором и четвертом местах $2! = 2$ способами. Каждую перестановку из букв «А» можно создавать одновременно и независимо с каждой перестановкой из букв «Н». Следовательно, общее количество перестановок, при которых получается слово «АНАНАС», согласно правилу произведения равно $6 \cdot 2 = 12$, то есть $|B| = 12$.

Шаг 4. Так как все элементарные события равновероятны, то можно воспользоваться формулой классической вероятности (4). Таким образом, $P(B) = |B| / |\Omega| = 12 / 720 = 1 / 60$.

Пример 31. В урне 4 черных и 5 белых шаров. Из урны случайным образом вынимают 3 шара. Найти вероятность того, что среди вынутых шаров:

a) все шары белые;
b) все шары одного цвета;
c) 2 белых шара;
d) меньше, чем 2 белых шара;
e) хотя бы один белый шар.

Решение. Шаг 1. Испытание – вынимание случайным образом 3 шаров из урны.

Шаг 2. Пространство элементарных событий Ω состоит из всевозможных комбинаций, составленных из девяти шаров по три, которые отличаются между собой хотя бы одним элементом (шаром). Порядок вынимания шаров не важен. Следовательно, комбинации (элементарные события) являются всевозможными сочетаниями по 3 из 9 шаров. Их число находим по формуле (6):

$$|\Omega| = C_9^3 = \frac{9!}{3!\,6!} = \frac{6!\cdot 7\cdot 8\cdot 9}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 6!} = \frac{7\cdot 8\cdot 9}{1\cdot 2\cdot 3} = 7\cdot 4\cdot 3 = 84\,.$$

Шаг 3, шаг 4. a) Интересующее событие A = {все вынутые шары – белые}. Три белых шара можно вынуть из пяти белых $C_5^3 = \frac{5!}{3!\cdot 2!} = 10$ способами. Следовательно, $|A| = 10$, $P(A) = |A| / |\Omega| = 10 / 84 = 5 / 42$.

b) Интересующее событие B = {все вынутые шары одного цвета}. Три шара одного цвета могут быть либо черными, либо белыми. Три белых шара можно вынуть из пяти белых $C_5^3 = \frac{5!}{3!\cdot 2!} = 10$ способами. Три черных шара можно вынуть из четырех черных $C_4^3 = \frac{4!}{3!\cdot 1!} = 4$ способами. Так как из урны вынимают 3 шара, то появление (в результате вынимания) любой комбинации из 3 белых шаров исключает появление любой комбинации из 3 черных шаров. Поэтому согласно правилу суммы общее число комбинаций благоприятных событию B будет равно $10 + 4 = 14$. Следовательно, $|B| = 14$, $P(B) = |B| / |\Omega| = 14 / 84 \approx 0.167$.

c) Интересующее событие C = {среди вынутых шаров имеется ровно 2 белых шара} = {среди вынутых шаров имеется ровно 2 белых и 1 черный шар}. Два белых шара можно вынуть из пяти белых $C_5^2 = \frac{5!}{2!\,3!} = 10$ способами. Один черный шар можно вынуть из четырех черных $C_4^1 = \frac{4!}{1!\,3!} = 4$ способами. Каждое сочетание из 2 белых шаров можно комбинировать с каждым сочетанием из 1 черного шара. Следовательно, согласно правилу произведения общее количество комбинаций благоприятных событию C будет равно $10\cdot 4 = 40$, то есть $|C| = 40$. Поэтому $P(C) = |C| / |\Omega| = 40 / 84 = 10 / 21$.

d) Интересующее событие $D =$ {среди вынутых шаров имеется меньше, чем 2 белых шара}. Событие D наступит, если будет вынут 1 белый шар и 2 черных, или если будет вынуто 0 белых шаров и 3 черных.

Один белый шар можно вынуть из пяти белых $C_5^1 = \frac{5!}{1!\,4!} = 5$ способами. Два черных шара можно вынуть из четырех черных $C_4^2 = \frac{4!}{2!\,2!} = 6$ способами. Каждое сочетание из 1 белого шара можно комбинировать с каждым сочетанием из 2 черных шаров. Следовательно, согласно правилу произведения общее количество способов выбора одного белого и двух черных шаров будет равно $5 \cdot 6 = 30$.

Три черных шара можно вынуть из четырех черных $C_4^3 = \frac{4!}{3!\cdot 1!} = 4$ способами, что соответствует случаю, когда вынуто 0 белых шаров и 3 черных.

Общее число комбинаций, благоприятных событию D согласно правилу суммы будет равно сумме комбинаций, соответствующих этим двум взаимоисключающим случаям (первый случай – вынут ровно 1 белый и 2 черных шара, а второй – вынуто 0 белых и 3 черных шара), то есть $|D| = 30 + 4 = 34$. Следовательно, $P(D) = |D| / |\Omega| = 34 / 84 = 17 / 42$.

e) Интересующее событие $E =$ {среди вынутых шаров имеется хотя бы один белый шар}. В случае когда говорится про «хотя бы один» принято переходить к противоположному событию. Для события E противоположным будет событие $\overline{E}$ = {среди вынутых шаров нет белых} = {все три вынутых шара – черные}. Три черных шара можно вынуть из четырех черных $C_4^3 = \frac{4!}{3!\cdot 1!} = 4$ способами. Следовательно, $|\overline{E}| = 4$. Поэтому $P(\overline{E}) = |\overline{E}| / |\Omega| = 4 / 84 = 1 / 21$. Отсюда, используя свойство 3 вероятности, получаем $P(E) = 1 - P(\overline{E}) = 1 - 1 / 21 = 20 / 21$.

Пример 32. При наборе телефонного номера абонент забыл две последние цифры и набрал их наудачу, помня только, что эти цифры нечетные и разные. Найти вероятность того, что номер набран правильно.

Решение. Шаг 1. Испытание – набор наудачу двух последних цифр телефонного номера.

Шаг 2. Пространство элементарных событий Ω состоит из всевозможных комбинаций, составленных по два элемента (по две цифры) из пяти элементов (пяти нечетных цифр 1,3,5,7,9), которые отличаются между собой либо составом элементов, либо их порядком. Следовательно, комбинации (элементарные события) являются размещениями по 2 из 5 цифр. Их число находим по формуле (7):

$$|\Omega| = A_5^2 = \frac{5!}{(5-2)!} = \frac{5!}{3!} = \frac{3!\cdot 4\cdot 5}{3!} = 4\cdot 5 = 20.$$

Отметим, что если бы цифры не были разными, то комбинации нельзя было бы назвать размещениями, так как из нечетных цифр (1, 3, 5, 7, 9) невозможно выбрать две одинаковые. Подобные комбинации называются размещениями с повторениями, а для них формула (7) неверна.

Шаг 3. Интересующее событие $A = \{$две последние цифры набраны верно$\}$ состоит из одного элементарного события (т.к. конкретный телефонный номер является единственным). Поэтому $|A| = 1$.

Шаг 4. По формуле классической вероятности (4) получаем $\mathrm{P}(A) = |A| / |\Omega| = 1 / 20$.

Задачи

36. Пятитомное собрание сочинений расположено на полке в случайном порядке. Какова вероятность того, что книги стоят слева направо в порядке нумерации томов (от 1 до 5)?

37. Гардеробщица выдала одновременно номерки четырем лицам, сдавшим в гардероб свои шляпы. После этого она перепутала все шляпы и повесила их наугад. Найти вероятность того, что каждому из четырех лиц гардеробщица выдаст его собственную шляпу.

38. Слово составлено из карточек, на каждой из которых написана одна буква. Затем карточки смешивают и вынимают наугад без возврата по одной. Найти вероятность того, что буквы вынимаются в порядке заданного слова:

a) СОБЫТИЕ;
b) МАТЕМАТИКА;
c) СТАТИСТИКА;
d) ПРОГРАММИРОВАНИЕ;
e) ДИФФЕРЕНЦИРОВАНИЕ;

f) МЕНЕДЖМЕНТ.

39. Найти вероятность того, что из 4 книг, расположенных в случайном порядке, 2 определенные книги окажутся рядом.

40. 6 человек случайным образом рассаживаются за круглый стол. Найти вероятность того, что два определенных человека окажутся рядом.

41. 6 человек случайным образом рассаживаются на скамейке. Найти вероятность того, что два определенных человека окажутся рядом.

42. В очередь в булочную случайным образом встали 6 женщин и 2 мужчин. Найти вероятность того, что между мужчинами будут стоять две женщины.

43*. n человек случайным образом рассаживаются за круглый стол. Найти вероятность того, что два определенных человека окажутся рядом.

44*. n человек случайным образом рассаживаются на скамейке. Найти вероятность того, что два определенных человека окажутся рядом.

45. В урне 3 белых и 7 черных шаров. Найти вероятность того, что вынутые наудачу из урны два шара окажутся черными.

46. В команде из 12 спортсменов 5 мастеров спорта. По жеребьевке из команды выбирают трех спортсменов. Какова вероятность того, что все выбранные спортсмены являются мастерами спорта?

47. В ящике 100 деталей, из них 10 бракованных. Наудачу извлечены четыре детали. Найти вероятность того, что среди извлеченных деталей: a) нет бракованных; b) нет стандартных.

48. Студент знает 20 из 25 вопросов программы. Найти вероятность того, что студент знает предложенные ему экзаменатором три вопроса.

49. В портфеле инвестора, склонного к риску, 15 различных облигаций, среди которых 10 облигаций с высокой степенью неисполнения обязательств по ним («бросовые» облигации). Инвестор решает наугад исключить из портфеля 3 облигации. Найти вероятность того, что он исключил из портфеля только «бросовые» облигации.

50. Из колоды карт (36 карт) наудачу вынимаются три карты. Найти вероятность того, что среди них окажется: a) точно один туз; b) хотя бы один туз.

51. В урне 5 белых и 7 черных шаров. Из урны наудачу вынимаются два шара. Найти вероятность того, что вынутые шары будут разных цветов.

52. В бригаде 4 женщины и 3 мужчины. Среди членов бригады разыгрываются 4 билета в театр. Какова вероятность того, что среди обладателей билетов женщин и мужчин окажется поровну?
53. Из десяти билетов выигрышными являются два. Чему равна вероятность того, что среди взятых наудачу пяти билетов только один выигрышный?
54. В группе 20 студентов, среди которых 8 отличников. По списку наудачу отобраны 9 студентов. Найти вероятность того, что среди отобранных студентов пять отличников.
55. В партии из 10 деталей 7 стандартных. Найти вероятность того, что среди 6 взятых наудачу деталей 4 стандартных.
56. У сборщика имеются 10 деталей, мало отличающихся друг от друга, из них четыре – первого, по две – второго, третьего и четвертого видов. Найти вероятность того, что среди шести взятых одновременно деталей три окажутся первого вида, две – второго и одна – третьего.
57. В пакетике 4 красных и 6 зеленых леденцов. Найти вероятность того, что вынутые наудачу из пакетика 3 леденца окажутся одного цвета.
58. В урне 3 белых и 4 черных шара. Из урны наудачу вынимают два шара. Какое событие более вероятно $A = \{$вынутые шары одного цвета$\}$ или $B = \{$вынутые шары разных цветов$\}$?
59. В партии из 20 изделий 4 бракованных. Найти вероятность того, что среди 5 случайно выбранных изделий не более одного бракованного.
60. В урне 10 белых и 9 черных шаров. Из урны вынимают наудачу 5 шаров. Найти вероятность того, что среди вынутых шаров есть и белые и черные.
61. В лотерее 100 билетов, из которых 20 выигрышных. Участник лотереи покупает 3 билета. Найти вероятность того, что он выиграет хотя бы на один билет.
62. В урне 6 черных и 7 белых шаров. Из урны случайным образом вынимают 4 шара. Найти вероятность того, что:

a) все вынутые шары белые;
b) все вынутые шары одного цвета;
c) среди вынутых шаров имеется только 2 белых шара;
d) среди вынутых шаров имеется более двух белых;
e) среди вынутых шаров имеется хотя бы один белый шар.

63. В ящике среди 100 деталей только одна бракованная. Из ящика вынимают наугад 10 деталей. Найти вероятность того, что среди вынутых деталей окажется бракованная.

64. Колоду карт, состоящую из 36 карт, наудачу разделяют на две равные части. Чему равна вероятность, что в обеих частях окажется по равному числу красных и черных карт.

65*. Для проведения соревнования 16 волейбольных команд разбиты по жребию на две подгруппы (по восемь команд в каждой). Найти вероятность того, что две наиболее сильные команды окажутся в разных подгруппах.

66*. В партии 100 изделий, из которых 4 – бракованные. Партия произвольно разделена на две равные части, которые отправлены двум потребителям. Какова вероятность того, что бракованные изделия достанутся обоим потребителям поровну?

67. Набирая номер телефона, абонент забыл последние три цифры и, помня лишь, что эти цифры разные, набрал их наудачу. Найти вероятность того, что номер набран правильно.

68. Из пяти карточек с буквами А, Б, В, Г, Д наудачу одна за другой выбираются три и располагаются в ряд в порядке появления. Какова вероятность того, что получится слово «ДВА»?

69. Из семи карточек с буквами М, Н, О, П, Р, С, Т наудачу одна за другой выбираются четыре и располагаются в ряд в порядке появления. Какова вероятность того, что получится слово «МОСТ»?

70. На семи карточках напечатаны цифры от 1 до 7. Найти вероятность того, что три наудачу взятые и поставленные в ряд карточки составят число 357.

71. В урне по одному шару красного, оранжевого, желтого, зеленого, голубого, синего и фиолетового цветов. Из урны поочередно наугад вынимают 3 шара. Найти вероятность того, что они появятся в следующем порядке: красный, желтый, зеленый.

72. Из колоды в 36 карт наугад одна за другой выбираются 4 карты. Какова вероятность того, что третья извлеченная карта окажется тузом пик?

73. Имеется урна, в которой находятся 3 белых и 1 черный шар. Из урны наугад один за другим выбираются 3 шара. Какова вероятность того, что второй извлеченный шар окажется черным?

74. Имеется урна, в которой находятся 2 белых и 3 черных шара. Из урны наугад один за другим выбираются 3 шара. Какова вероятность того, что третий извлеченный шар окажется черным?

75. В урне 2 белых и 3 черных шара. Из урны вынимают наугад по одному два шара. Найти вероятность того, что первый извлеченный шар белый, а второй – черный.

76. Числа 1, 2, 3, 4, 5 написаны на пяти карточках. Наудачу последовательно вынимаются три карточки, и вынутые таким образом цифры ставятся слева направо. Чему равна вероятность того, что полученное таким образом трехзначное число окажется четным?

77. Из пяти карточек с буквами О, П, Р, С, Т наудачу одна за другой выбираются три и располагаются в ряд в порядке появления. Какова вероятность того, что в полученной комбинации букв: а) вторая буква «О»; b) крайние буквы будут согласными?

78. Из восьми карточек с буквами А, Н, О, П, Р, С, Т, У наудачу одна за другой выбираются четыре и располагаются в ряд в порядке появления. Какова вероятность того, что в полученной комбинации букв первая и третья буквы будут согласными, а вторая и четвертая – гласными?

1.4.3. Геометрические вероятности

Понятие «геометрической вероятности» является обобщением понятия «классической вероятности» на случай испытаний с *бесконечным числом* равновозможных исходов.

Пусть в область G (отрезок, либо часть плоскости, либо часть пространства) бросается наудачу точка. Это означает, что брошенная точка может «*равноправно*» попасть в любую точку области G. При этом вероятность попадания точки в какую-либо часть g области G пропорциональна *мере* этой части (длине, площади, объему) и не зависит ни от ее расположения в области G, ни от ее формы (рис. 1.7).

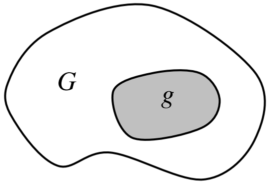


Рис. 1.7

Геометрическое определение вероятности. Если g – часть области G, то при бросании наудачу точки в область G вероятность ее попадания в часть g равна

$$p = \frac{\text{mes}\, g}{\text{mes}\, G}, \tag{8}$$

где символ «mes» означает меру (в одномерном варианте – длину, в двумерном – площадь, в трехмерном – объем).

Замечание. При геометрическом определении вероятности полагают:

1) пространство элементарных событий $\Omega = G$;

2) интересующее событие $A = g$.

Пример 33. На отрезок АВ длины 4 см наудачу поставлена точка С. Найти вероятность того, что каждый из полученных отрезков АС и СВ имеет длину большую, чем 1 см.

Решение. Испытание – постановка (бросание) наудачу точки С на отрезок АВ. Элементарное событие – конкретная точка отрезка АВ. Следовательно, пространство элементарных событий G – это отрезок АВ, т.е. G = АВ. Отсюда mes$G$ = mesAB = 4 см.

Отметим на отрезке АВ точки C_1 и C_2 таким образом, чтобы длины отрезков AC_1 и C_2B были равны по 1 см. (см. рис. 1.8). Легко видеть, что если точка $C \in AC_1$, то длина отрезка АС не превышает 1 см. Аналогично – если точка $C \in C_2B$, то длина отрезка СВ не превосходит 1 см. В то же время, если точка $C \in C_1C_2$, то каждый их полученных отрезков АС и СВ будет иметь длину большую, чем 1 см. Следовательно, $g = C_1C_2$. Отсюда $\text{mes}\, g = \text{mes}\, C_1C_2 = \text{mes}\, AB -$ $- \text{mes}\, AC_1 - \text{mes}\, C_2B = 4$ см – 1 см – 1 см = 2 см.

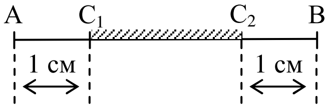


Рис. 1.8

По формуле (8) окончательно находим

$$p = \frac{\text{mes}\, g}{\text{mes}\, G} = \frac{2\text{см}}{4\text{см}} = \frac{1}{2}.$$

Пример 34. Автобус ходит с интервалом 20 мин. Найти вероятность того, что человеку, пришедшему на остановку в произвольный момент времени, придется ждать не более 5 минут.

Решение. 1 способ. Обозначим через x момент прихода человека на остановку, а через a – момент прихода предыдущего автобуса. Тогда момент прихода очередного автобуса будет равен $a + 20$. Таким образом, в данном случае пространство элементарных событий – это промежуток времени заключенный между моментами прихода предыдущего и очередного автобуса, т.е. $\Omega = G = (a; a+20]$ (рис. 1.9).

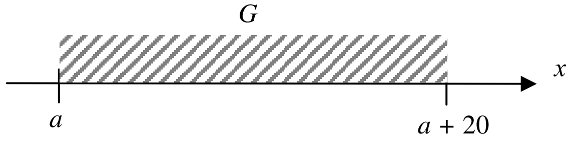


Рис. 1.9

Время T ожидания автобуса составит $T = a + 20 - x$. Интересующее событие $A = g$ = {человеку, пришедшему на остановку в произвольный момент времени, придется ждать не более 5 минут} означает, что $0 \le T \le 5$, откуда получаем $0 \le a + 20 - x \le 5$ или $a + 15 \le x \le a + 20$, т.е. $A = g = [a+15; a+20]$ (рис. 1.10).

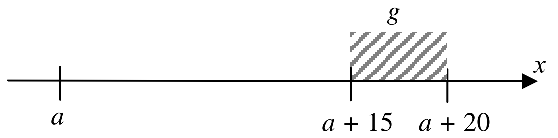


Рис. 1.10

Очевидно, что $\mathrm{mes}\, g = 5$ мин, $\mathrm{mes}\, G = 20$ мин. По формуле (8) окончательно находим

$$p = \frac{\mathrm{mes}\, g}{\mathrm{mes}\, G} = \frac{5\,\text{мин}}{20\,\text{мин}} = \frac{1}{4}.$$

2 способ. Обозначим время ожидания автобуса через x. Так как интервал движения автобусов – 20 минут, то $0 \le x < 20$. Следовательно, пространство элементарных событий $\Omega = G = [0; 20)$ (рис. 1.11).

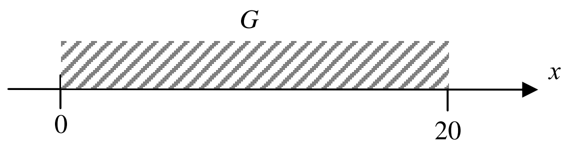


Рис. 1.11

Интересует событие $A = g$ = {придется ждать не более 5 минут} = $\{\, x \mid 0 \le x \le 5 \,\}$ = [0; 5] (рис. 1.12).

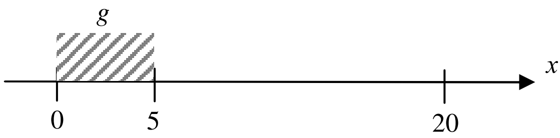


Рис. 1.12

Очевидно, что $\text{mes}\,g = 5$ мин, $\text{mes}\,G = 20$ мин. По формуле (8) окончательно находим

$$p = \frac{\text{mes}\,g}{\text{mes}\,G} = \frac{5\,\text{мин}}{20\,\text{мин}} = \frac{1}{4}.$$

Пример 35. Найти вероятность того, что точка, брошенная наудачу в квадрат со стороной a, попадет внутрь круга, который вписан в данный квадрат.

Решение. Пространство элементарных событий G – квадрат со стороной a (на рис. 1.13). Область g (соответствующая интересующему событию) – круг, который вписан в данный квадрат.

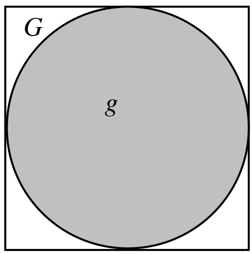


Рис. 1.13

Искомая вероятность равна отношению площади круга, вписанного в квадрат к площади всего квадрата:

$$p = \frac{\text{mes}\,g}{\text{mes}\,G} = \frac{S_{круга}}{S_{квадрата}} = \frac{\pi R^2}{a^2} = \left| R = \frac{a}{2} \right| = \frac{\pi a^2}{4a^2} = \frac{\pi}{4}.$$

Пример 36. *Задача о встрече.* Два студента A и B условились встретиться в определенном месте во время перерыва между 14 ч и 14 ч 45 мин. Пришедший первым ждет другого в течение 10 мин, после чего уходит. Найти вероятность их встречи, если приход каждого из них в течение указанных 45 мин может произойти наудачу, и моменты прихода независимы.

Решение. Обозначим момент прихода студента А через x, а студента В – через y. В прямоугольной системе координат xOy возьмем за начало отсчета 14ч., а за единицу масштаба выберем одну минуту. Из условия задачи вытекает, что все возможные значения х и у следующие $0 \le x \le 45$, $0 \le y \le 45$. Совокупность всех этих значений образует квадрат на плоскости xOy со стороной равной 45. Точки этого квадрата изображают время встречающихся (рис. 1.14).

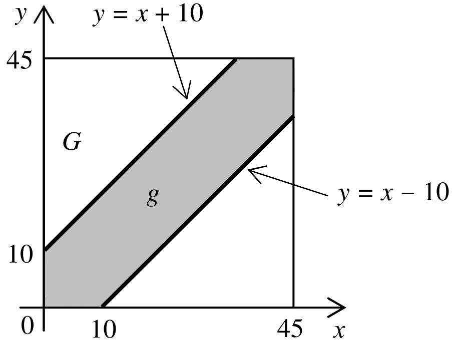


Рис. 1.14

Тогда пространство элементарных событий (квадрат на рис. 1.14) аналитически может быть представлено так

$$G = \{(x, y) \mid 0 \le x \le 45, 0 \le y \le 45\}.$$

Для того, чтобы интересующее событие g = {студенты встретятся} наступило необходимо и достаточно, чтобы разность между моментами прихода студентов по модулю не превосходила 10 минут, т.е. $|x - y| \le 10$.

Таким образом, интересующее событие g аналитически может быть представлено так

$$g = \{(x, y) \mid 0 \le x \le 45, 0 \le y \le 45, |x - y| \le 10\}.$$

Неравенство

$$|x - y| \le 10$$

или (в расширенном виде)

$$x - 10 \le y \le x + 10$$

определяет полосу, которая внутри квадрата на рис. 1.14 представляет заштрихованную область. Точки заштрихованной области есть исходы, благоприятствующие встрече.

Искомая вероятность равна отношению площади заштрихованной фигуры к площади всего квадрата:

$$p = \frac{\operatorname{mes} g}{\operatorname{mes} G} = \frac{45^2 - 35^2}{45^2} = 0.395 .$$

Задачи

79. Точка брошена наудачу на отрезок [0; 2]. Найти вероятность попадания этой точки на отрезок [0.5; 1.4].

80. На отрезок AB длины 3 см наудачу поставлена точка C. Найти вероятность того, что один из полученных отрезков AC и CB имеет длину меньшую, чем 1 см.

81. После бури на участке между 40-м и 70-м километрами телефонной линии произошел обрыв провода. Какова вероятность того, что разрыв произошел между 50-м и 55-м километрами линии?

82. Карандаш длиной 18 см разломали на две части. Найти вероятность того, что длины получившихся частей не менее 6 см.

83. Про село Иваново известно только, что оно находится где-то на шоссе между Миргородом и Старгородом. Длина шоссе равна 200 км. Найдите вероятность того, что: a) от Миргорода до Иваново по шоссе меньше 20 км; b) от Иваново до Старгорода по шоссе больше 130 км; c) Иваново находится менее чем в 5 км от середины пути между городами.

84. Мишень для выстрелов в тире представляет собой круг радиуса R. Стрелок выбивает 10 очков, если попадает в малый круг в центре с радиусом r ($r < R$). Какова вероятность того, что стрелок выбьет 10 очков при одном попадании в мишень?

85. Какова вероятность того, что наудачу брошенная в круг точка окажется внутри вписанного в него квадрата?

86. Какова вероятность того, что наудачу брошенная в круг точка окажется внутри вписанного в него правильного треугольника?

87. Какова вероятность того, что сумма двух наугад взятых неотрицательных чисел, каждое из которых не больше трех, не превзойдет двух?

88. Какова вероятность того, что сумма двух наугад взятых неотрицательных чисел, каждое из которых не больше четырех, не превзойдет пяти?

89. Какова вероятность того, что произведение двух наугад взятых неотрицательных чисел, каждое из которых не больше двух, не превзойдет 2/3?

90. На отрезок [2, 5] наудачу брошены две точки. Какова вероятность того, что расстояние между ними меньше 2?

91. На отрезок [1, 4] наудачу брошены две точки. Какова вероятность того, что расстояние между ними больше единицы?

92. Коэффициенты p и q квадратного уравнения $x^2 + px + q = 0$ выбираются наудачу в промежутке (0,1). Чему равна вероятность того, что корни будут действительными числами?

93*. Два теплохода должны подойти к одному и тому же причалу. Время прихода обоих теплоходов независимо и равновозможно в течение данных суток. Найти вероятность того, что ни одному из теплоходов не придется ожидать освобождения причала, если время стоянки первого теплохода – 1 час, а второго – 2 часа.

94*. Студент может добраться до учебного корпуса либо автобусом, интервал движения которого составляет 7 минут, либо троллейбусом, интервал движения которого – 10 минут. Найти вероятность того, что студенту, пришедшему на остановку в случайный момент времени, придется ждать не более трех минут.

95*. Стержень длины l сломали на три части, выбирая наудачу места разлома. Найти вероятность того, что из получившихся трех частей можно составить треугольник.

96*. *Задача Бюффона*. Плоскость разграфлена параллельными прямыми, отстоящими друг от друга на расстоянии a. На плоскость наудачу бросают иглу длины l ($l<a$). Найти вероятность того, что игла пересечет какую-нибудь прямую.

1.4.4. Статистическое определение вероятности

Классическое определение вероятности предполагает, что все элементарные исходы равновозможны. О равновозможности исходов испытания заключают в силу соображений симметрии (как в случае монеты или игральной кости). Задачи, в которых можно исходить из соображений симметрии, на практике встречаются редко. Во многих случаях трудно указать основания, позволяющие считать, что все элементарные исходы равновозможны. Например, если монета погнута, игральная кость выполнена из неоднородного материала. Очевидно, что вероятности таких событий, как «попадание в цель при выстреле», «выход из строя радиолампы в течение одного часа работы» или «пробивание брони осколком снаряда», не могут быть вычислены по формуле классической вероятности, так как элементарные события не равновероятны. Вместе с тем ясно, что каждое из перечисленных событий обладает определенной степенью объективной возможности, которую в принципе можно измерить численно и которая при повторении подобных испытаний будет отражаться в относительной частоте соответствующих событий. Поэтому мы будем считать, что каждое событие, связанное с массой однородных испытаний, имеет определенную вероятность, заключенную между нулем и единицей. В связи с этим появилась необходимость введения еще одного определения вероятности, называемого статистическим.

Статистической вероятностью события A называется относительная частота появления этого события в n произведенных испытаниях, т.е.

$$\tilde{\mathrm{P}}(A) = \frac{m}{n},$$

где $\tilde{\mathrm{P}}(A)$ – статистическая вероятность события A;
m – число испытаний, в которых появилось событие A;
n – общее число испытаний.

В отличие от «математической» вероятности $\mathrm{P}(A)$, рассматриваемой в классическом определении (4), статистическая вероятность $\tilde{\mathrm{P}}(A)$ является характеристикой *опытной*, *экспериментальной*. Если $\mathrm{P}(A)$ есть доля случаев, благоприятствующих событию A, которая определяется непосредственно, без каких-либо испытаний, то $\tilde{\mathrm{P}}(A)$ есть доля тех фактически произведенных испытаний, в которых событие A появилось.

Статистическое определение вероятности, как и понятия и методы теории вероятностей в целом, применимы не к любым событиям с неопределенным исходом, которые в житейской практике считаются случайными, а только к тем из них, которые обладают определенными свойствами.

1. Рассматриваемые события должны быть *исходами только тех испытаний, которые могут быть воспроизведены неограниченное число раз при одном и том же комплексе условий*. Так, например, бессмысленно ставить вопрос об определении вероятностей возникновения войн, появления гениальных произведений искусства и т.п., так как речь идет о неповторимых в одинаковых условиях испытаниях, уникальных событиях.

И хотя приведенные в примерах события с неопределенным исходом относятся к категории «может произойти, а может и не произойти», такими событиями теория вероятностей не занимается.

2. События должны обладать так называемой *статистической устойчивостью*, или *устойчивостью относительных частот*. Это означает, что в различных сериях испытаний относительная частота события изменяется незначительно (тем меньше, чем больше число испытаний), колеблясь около постоянного числа. Оказалось, что этим постоянным числом является вероятность события.

Факт приближения относительной частоты события к его вероятности при увеличении числа испытаний подтверждается многочисленными массовыми экспериментами, проводимыми разными лицами со времен возникновения теории вероятностей. Так, например, в опытах Бюффона (XVIII в.) относительная частота появления «герба» при 4040 подбрасываниях монеты оказалась равной 0.5069, в опытах Пирсона (XIX в.) при 23000 подбрасываниях – 0.5005, практически не отличаясь от вероятности этого события, равной 0.5.

3. *Число испытаний*, в результате которых появляется событие A, *должно быть достаточно велико*, так как только в этом случае можно считать вероятность события $\mathrm{P}(A)$ приближенно равной ее относительной частоте.

Резюмируя, можно сказать, что теория вероятностей изучает лишь такие события, в отношении которых имеет смысл не только утверждение об их случайности, но и возможна объективная оценка относительной частоты их появления. Так, утверждение, что при выполнении определенного комплекса условий вероятность события равна р, означает не только случайность события A, но и определенную, достаточно близкую к р, долю появлений события A при большом числе испытаний.

Пример 37. Среди 1000 новорожденных оказалось 515 мальчиков. Найти статистическую вероятность рождения мальчиков.

Решение. Поскольку в данном случае $n = 1000$, $m = 515$, то $\tilde{\mathrm{P}}(A) = m / n = 515 / 1000 = 0.515$.

Пример 38. Спортсмен выполнил 300 выстрелов и только 97 раз попал в мишень. Найти статистическую вероятность попадания в мишень при одном выстреле для данного спортсмена.

Решение. Поскольку в данном случае $n = 300$, $m = 97$, то $\tilde{\mathrm{P}}(A) = m / n = 97 / 300 \approx 0.323$.

1.4.5. Аксиоматическое определение вероятности

Аксиоматический подход преодолевает недостатки, присущие известным определениям вероятности (классическое, геометрическое, статистическое).

Аксиомы, определяющие вероятность (предложены академиком Колмогоровым А.Н):

1. Каждому событию A соответствует неотрицательное число $\mathrm{P}(A)$, называемое его вероятностью.
2. Вероятность достоверного события равна 1:
$$\mathrm{P}(\Omega) = 1.$$
3. Если события $A_1, A_2, \ldots, A_n$ попарно несовместны, то
$$\mathrm{P}(A_1 + A_2 + \ldots + A_n) = \mathrm{P}(A_1) + \mathrm{P}(A_2) + \ldots + \mathrm{P}(A_n).$$

1.4.6. Условная вероятность. Независимость событий

Вероятность события A, найденная при условии, что событие B уже произошло, называется **условной вероятностью** события A и обозначается $\mathrm{P}(A|B)$.

Замечание. Условная вероятность события A может быть вычислена по формуле
$$\mathrm{P}(A \mid B) = \frac{\mathrm{P}(AB)}{\mathrm{P}(B)} \tag{9}$$
(при этом предполагается, что $\mathrm{P}(B) \neq 0$).

Пример 39. Подбрасывают две монеты. Рассматриваются события: A = {выпадение «решки» на первой монете}, B = {выпадение хотя бы одного «герба»}. Найти $\mathrm{P}(A|B)$ и $\mathrm{P}(B|A)$.

Решение. Испытание – подбрасывание двух монет. Тогда пространство элементарных событий $\Omega = \{ГГ,\ ГР,\ РГ,\ РР\}$. Отсюда следует, что: $A = \{РГ, РР\}$, $B = \{ГГ,\ ГР,\ РГ\}$, $AB = \{РГ\}$. Найдем искомые условные вероятности по формуле (9):
$$\mathrm{P}(A|B) = \mathrm{P}(AB) / \mathrm{P}(B) = (1 / 4) / (3 / 4) = 1 / 3,$$
$$\mathrm{P}(B|A) = \mathrm{P}(AB) / \mathrm{P}(A) = (1 / 4) / (2 / 4) = 1 / 2.$$

Пример 40. В урне 3 белых и 3 черных шара. Из урны дважды вынимают наугад по одному шару, не возвращая их обратно. Найти вероятность того, что второй вынутый шар будет белым (событие A), при условии, что первый вынутый шар оказался черным (событие B).

Решение. В данном примере имеем дело с двумя последовательными испытаниями, каждое из которых заключается в случайном извлечении одного шара из урны. Искомая условная вероятность

$P(A|B)$ будет равна вероятности извлечения из урны белого шара при втором испытании, при условии, что в результате первого испытания вынутый из урны шар оказался черным. Итак, при условии, что событие B уже наступило, перед вторым испытанием в урне будут находиться 5 шаров, среди которых 3 белых и 2 черных шара. Отсюда по формуле классической вероятности будем иметь $P(A|B) = 3 / 5$.

Два события A и B называются **независимыми**, если вероятности появления каждого из них не зависят от того, произошло другое событие или нет, то есть если

$$P(A|B) = P(A),\ P(B|A) = P(B).$$

При этом вероятности $P(A)$ и $P(B)$ называют **безусловными** вероятностями. В противном случае события называются **зависимыми**.

Замечание. Зависимость и независимость событий всегда взаимны, то есть если A зависит от B, то и B зависит от A, и наоборот. Кроме того, если события A и B независимы, то независимы также каждые два события: A и $\overline{B}$, $\overline{A}$ и B, $\overline{A}$ и $\overline{B}$.

На практике о независимости событий часто заключают по смыслу задачи.

Пример 41. При подбрасывании двух игральных костей события A = {на первой кости выпало 6 очков} и B = {на второй кости выпало 6 очков} независимы.

Заметим, что, если множества случайных факторов пересекаются, то появляющиеся в результате испытания события не обязательно зависимые. В качестве иллюстрации рассмотрим следующий пример.

Пример 42. Испытание – вынимание наугад одной карты из колоды в 36 карт. Рассмотрим события: A = {вынута карта пиковой масти}, B = {вынут туз}. Являются ли зависимыми события A и B?

Решение. Согласно определению нам необходимо проверить равенство $P(A|B) = P(A)$.

Найдем $P(A)$. Так как всего карт 36, а пиковой масти среди них – 9, то по формуле классической вероятности (4) $P(A) = 9 / 36 = 1 / 4$.

Найдем $P(A|B)$. Пусть событие B произошло, то есть из колоды вынут туз. В колоде 4 туза и среди них только один пиковой масти. Следовательно, по формуле классической вероятности (4) $P(A|B) = 1 / 4$.

Итак, $P(A|B) = P(A) = 1 / 4$, а значит, согласно определению, события A и B независимы несмотря на то, что среди карт пиковой масти есть туз, а среди тузов – карта пиковой масти.

Несколько событий называются **попарно независимыми,** если каждые два из них независимы.

Например, события A, B, C попарно независимы, если независимы события A и B, A и C, B и C.

Несколько событий называются **независимыми в совокупности** (или просто **независимыми),** если независимы каждые два из них и независимы каждое событие и все возможные произведения остальных.

Например, события A, B, C независимы (независимы в совокупности), если независимы события A и B, A и C, B и C, A и BC, B и AC, C и AB.

Замечание. Если несколько событий независимы попарно, то отсюда еще не следует их независимость в совокупности. В этом смысле требование независимости событий в совокупности сильнее требования их попарной независимости.

Задачи

97. В урне 5 белых и 3 черных шара. Из урны поочередно вынимают наугад 2 шара. Найти вероятность того, что второй вынутый шар белый, если известно, что первый вынутый шар черный.

98. Из колоды в 36 карт вынимают наугад 1 карту. Найти вероятность того, что это дама, если известно, что вынутая карта бубновой масти.

99. Из колоды в 36 карт вынимают наугад 2 карты. Найти вероятность того, что вторая вынутая карта крестовой масти, если известно, что первая вынутая карта также была крестовой масти.

100. Студент знает 20 билетов из 30. Найти вероятность того, что он вытянет «хороший» билет, если известно, что он тянет третьим, и перед ним вытянули только «хорошие» билеты.

101. С первого станка на сборку поступило 200 деталей, из которых 190 стандартных; со второго – 300 из которых 280 стандартных. Найти: a) безусловную вероятность события $A = \{$наудачу взятая деталь стандартная$\}$; b) вероятность события A при условии, что деталь изготовлена на первом станке; c) вероятность события A при условии, что деталь изготовлена на втором станке.

102. Подбрасывают две монеты. Найти вероятность того, что на первой монете выпал «герб», если известно, что монеты легли разными сторонами.

103. Подбрасывают три монеты. Найти вероятность того, что количество выпавших «гербов» больше количества выпавших «решек», если известно, что хотя бы один раз выпали и «герб» и «решка».

104. Подбрасывают две игральные кости. Найти вероятность того, что хотя бы на одной из них выпадет 5 очков, если известно, что выпали разные грани.

105. Брошены две игральные кости. Чему равна вероятность того, что сумма выпавших на них очков равна 8, если известно, что эта сумма есть четное число?

106. Испытание состоит в подбрасывании двух монет. Рассматриваются события: $A = \{$выпадение «герба» на первой монете$\}$; $B = \{$выпадение хотя бы одного «герба»$\}$; $C = \{$выпадение хотя бы одной «решки»$\}$; $D = \{$выпадение «герба» на второй монете$\}$. Определить, зависимы или независимы пары событий: a) A и C; b) A и D; c) B и C; d) B и D.

107. Из колоды в 36 карт вынимают наугад одну карту. Рассматриваются события: $A = \{$появление карты красной масти$\}$; $B = \{$появление бубнового туза$\}$; $C = \{$появление десятки$\}$. Зависимы или независимы следующие пары событий: a) A и B; b) A и C; c) B и C?

108. В урне 3 белых и 4 черных шара. Из урны вынимают наугад один шар. Рассматриваются события: $A = \{$вынут белый шар$\}$; $B = \{$вынут черный шар$\}$. Зависимы или независимы события A и B?

109. В урне 2 синих, 3 красных и 2 белых шара. Из урны вынимают наугад один шар. Рассматриваются события: $A = \{$вынут цветной шар$\}$; $B = \{$вынут синий шар$\}$. Зависимы или независимы события A и B?

110. В урне четыре белых шара с номерами от 1 до 4 и два черных шара с номерами 5 и 6. Из урны вынимают наугад один шар. Рассматриваются события: $A = \{$вынут белый шар$\}$; $B = \{$вынут шар с номером больше 3$\}$; $C = \{$вынут шар с номером больше 2, но меньше 6$\}$. Зависимы или независимы следующие пары событий: a) A и B; b) A и C?

2. Основные теоремы теории вероятностей

2.1. Теоремы сложения и умножения вероятностей

Теорема сложения вероятностей. Вероятность суммы двух событий A и B равна сумме вероятностей этих событий без вероятности их совместного наступления:

$$P(A + B) = P(A) + P(B) - P(AB). \tag{10}$$

Следствие. Если события A и B несовместны, то

$$P(A + B) = P(A) + P(B). \tag{11}$$

Теорема умножения вероятностей. Вероятность произведения двух событий A и B равна произведению вероятности одного из них на условную вероятность другого, вычисленную при условии, что первое событие уже наступило:

$$P(AB) = P(A)P(B|A) = P(B)P(A|B). \tag{12}$$

Следствие. Если события A и B независимы, то

$$P(AB) = P(A)P(B). \tag{13}$$

Замечание. Вероятность произведения нескольких событий равна произведению вероятностей этих событий, причем вероятность каждого следующего по порядку события вычисляется при условии, что все предыдущие имели место:

$$P(A_1A_2\ldots A_k) = P(A_1)P(A_2|A_1)P(A_3|A_1A_2)\ldots P(A_k|A_1A_2\ldots A_{k-1}).$$

В случае независимых событий справедлива формула

$$P\left(\prod_{i=1}^{k} A_i\right) = \prod_{i=1}^{k} P(A_i).$$

Пример 43. В урне 3 белых и 2 черных шара. Из урны дважды наугад вынимают по одному шару, не возвращая их обратно. Найти вероятность того, что первый вынутый шар черный, а второй – белый.

Решение. Испытание – вынимание наугад двух шаров из урны по одному без возврата. Интересует событие A = {первый вынутый шар – черный, а второй – белый}. Введем в рассмотрение вспомогательные события: B = {первый вынутый шар – черный}, C = {второй вынутый шар – белый}. Очевидно, что $A = BC$, откуда $P(A) = P(BC)$. Так как события B и C зависимы, то по теореме умножения вероятностей (формула (12)) имеем $P(A) = P(B)P(C|B)$. Перед первым выниманием в урне находятся три белых и два черных шара, значит $P(B) = 2 / 5$. Если событие B наступило, то перед вторым выниманием в урне будут находиться три белых и один черный шар, значит $P(C|B) = 3 / 4$. Окончательно имеем, что $P(A) = 2 / 5 \cdot 3 / 4 = 3 / 10$.

Пример 44. В одной урне 3 белых и 5 черных шаров, в другой урне 6 белых и 4 черных шара. Из каждой урны вынимают наугад по одному шару. Найти вероятность того, что хотя бы один из вынутых шаров белый.

Решение. Испытание – вынимание наугад по одному шару из каждой урны. Интересует событие A = {хотя бы один из вынутых шаров белый}. Введем в рассмотрение вспомогательные события: A_1= {из первой урны вынули белый шар}, A_2= {из второй урны вынули белый шар}. Событие A наступит, если и только если наступит событие A_1 или событие A_2, или и то, и другое. Следовательно, по определению суммы событий, $A = A_1 + A_2$. Тогда по теореме сложения вероятностей получаем $\mathrm{P}(A) = \mathrm{P}(A_1 + A_2) = \mathrm{P}(A_1) + \mathrm{P}(A_2) - \mathrm{P}(A_1A_2)$. Так как в первой урне 8 шаров, среди которых 3 белых, то $\mathrm{P}(A_1) = 3 / 8$. Так как во второй урне 10 шаров, среди которых 6 белых, то $\mathrm{P}(A_2) = 6 / 10 = 3 / 5$. Поскольку события A_1 и A_2 независимы (т.к. описывают результаты извлечения шаров из разных урн: A_1 – из первой урны, A_2 – из второй), то по следствию из теоремы умножения получаем, что $\mathrm{P}(A_1A_2) = \mathrm{P}(A_1)\mathrm{P}(A_2) = (3 / 8) \cdot (3 / 5) = 9 / 40$. Окончательно имеем, что $\mathrm{P}(B) = 3 / 8 + 3 / 5 - 9 / 40 = 3 / 4$.

Пример 45. Имеются две урны: в первой – 3 белых и 2 черных шара, во второй – 4 белых и 6 черных шаров. Из каждой урны вынимают наугад по одному шару. Найти вероятность того, что вынутые шары разного цвета.

Решение. Испытание – вынимание наугад по одному шару из каждой урны. Интересует событие A = {вынутые шары разного цвета}. Введем в рассмотрение вспомогательные события: A_1 = {из первой урны вынут белый шар}, A_2 = {из второй урны вынут белый шар}. Событие A наступит, если и только если из первой урны будет вынут белый шар (событие A_1), а из второй – черный (событие $\overline{A}_2$), или если из первой урны будет вынут черный шар (событие $\overline{A}_1$), а из второй – белый (событие A_2), то есть $A = A_1\overline{A}_2 + \overline{A}_1A_2$. Следовательно,

$$\mathrm{P}(A) = \mathrm{P}(A_1\overline{A}_2 + \overline{A}_1A_2).$$

Так как события $A_1\overline{A}_2$ = {из первой урны вынут белый шар, а из второй урны – черный} и $\overline{A}_1A_2$ = {из первой урны вынут черный шар, а из второй – белый} несовместны, то по следствию из теоремы сложения будем иметь

$$P(A_1\overline{A}_2 + \overline{A}_1 A_2) = P(A_1\overline{A}_2) + P(\overline{A}_1 A_2).$$

Поскольку события A_1 и A_2 независимы (т.к. описывают результаты извлечения шаров из разных урн), то независимы и пары A_1 и $\overline{A}_2$, $\overline{A}_1$ и A_2. Значит по следствию из теоремы умножения, $P(A_1\overline{A}_2) = P(A_1)P(\overline{A}_2)$, $P(\overline{A}_1 A_2) = P(\overline{A}_1)P(A_2)$. Следовательно,

$$P(A) = P(A_1)P(\overline{A}_2) + P(\overline{A}_1)P(A_2).$$

Так как в первой урне 3 белых и 2 черных шара, то $P(A_1) = 3 / 5$, $P(\overline{A}_1) = 2 / 5$. Во второй урне 4 белых и 6 черных шаров, поэтому $P(A_2) = 4 / 10$, $P(\overline{A}_2) = 6 / 10$. Окончательно имеем,

$$P(A) = (3 / 5)\,(6 / 10) + (2 / 5)\,(4 / 10) = 0.52.$$

Пример 46. Студент сдает три экзамена. Вероятность того, что он сдаст первый экзамен, равна 0.7, второй – 0.8, третий – 0.9. Найти вероятность того, что студентом будет сдан только один экзамен.

Решение. Испытание – сдача студентом трех экзаменов. Интересует событие A = {студентом сдан только один экзамен}. Введем в рассмотрение вспомогательные события A_i = {студентом сдан i-й экзамен} ($i = 1, 2, 3$). Событие A наступит, если и только если первый экзамен будет сдан, а второй и третий – не сданы, или второй экзамен будет сдан, а первый и третий – не сданы, или третий экзамен будет сдан, а первый и второй – не сданы, то есть

$$A = A_1\overline{A}_2\overline{A}_3 + \overline{A}_1 A_2\overline{A}_3 + \overline{A}_1\overline{A}_2 A_3.$$

Следовательно

$$P(A) = P(A_1\overline{A}_2\overline{A}_3 + \overline{A}_1 A_2\overline{A}_3 + \overline{A}_1\overline{A}_2 A_3).$$

События $A_1\overline{A}_2\overline{A}_3$ = {первый экзамен сдан, а второй и третий – не сданы}, $\overline{A}_1 A_2\overline{A}_3$ = {второй экзамен сдан, а первый и третий – не сданы} и $\overline{A}_1\overline{A}_2 A_3$ = {третий экзамен сдан, а первый и второй – не сданы} попарно несовместны. Действительно,

$$\left(A_1\overline{A}_2\overline{A}_3\right)\left(\overline{A}_1 A_2\overline{A}_3\right) = \left(A_1\overline{A}_1\right)\left(A_2\overline{A}_2\right)\left(\overline{A}_3\overline{A}_3\right) = \varnothing\cdot\varnothing\cdot\overline{A}_3 = \varnothing;$$
$$\left(A_1\overline{A}_2\overline{A}_3\right)\left(\overline{A}_1\overline{A}_2 A_3\right) = \left(A_1\overline{A}_1\right)\left(\overline{A}_2\overline{A}_2\right)\left(A_3\overline{A}_3\right) = \varnothing\cdot\overline{A}_2\cdot\varnothing = \varnothing;$$
$$\left(\overline{A}_1 A_2\overline{A}_3\right)\left(\overline{A}_1\overline{A}_2 A_3\right) = \left(\overline{A}_1\overline{A}_1\right)\left(A_2\overline{A}_2\right)\left(A_3\overline{A}_3\right) = \overline{A}_1\cdot\varnothing\cdot\varnothing = \varnothing.$$

Согласно следствию из теоремы сложения вероятностей (формула (11)) в силу попарной несовместности слагаемых имеем

$$P(A) = P(A_1\overline{A}_2\overline{A}_3) + P(\overline{A}_1 A_2\overline{A}_3) + P(\overline{A}_1\overline{A}_2 A_3).$$

Так как события A_1, $\overline{A}_2$ и $\overline{A}_3$ независимы (поскольку описывают результаты сдачи студентом разных экзаменов), то вероятность их произведения будет равна произведению вероятностей этих событий, т.е. $\mathrm{P}(A_1\overline{A}_2\overline{A}_3) = \mathrm{P}(A_1)\mathrm{P}(\overline{A}_2)\mathrm{P}(\overline{A}_3)$. То же самое будет справедливо и для троек событий $\overline{A}_1$, A_2, $\overline{A}_3$ и $\overline{A}_1$, $\overline{A}_2$, A_3. Следовательно, $\mathrm{P}(\overline{A}_1 A_2\overline{A}_3) = \mathrm{P}(\overline{A}_1)\mathrm{P}(A_2)\mathrm{P}(\overline{A}_3)$ и $\mathrm{P}(\overline{A}_1\overline{A}_2 A_3) = \mathrm{P}(\overline{A}_1)\mathrm{P}(\overline{A}_2)\mathrm{P}(A_3)$. Таким образом, получаем, что

$$\mathrm{P}(A) = \mathrm{P}(A_1)\mathrm{P}(\overline{A}_2)\mathrm{P}(\overline{A}_3) + \mathrm{P}(\overline{A}_1)\mathrm{P}(A_2)\mathrm{P}(\overline{A}_3) + \mathrm{P}(\overline{A}_1)\mathrm{P}(\overline{A}_2)\mathrm{P}(A_3) \,. \quad (14)$$

По условию задачи $\mathrm{P}(A_1) = 0.7$, $\mathrm{P}(A_2) = 0.8$, $\mathrm{P}(A_3) = 0.9$. Следовательно, вероятности противоположных событий будут соответственно равны $\mathrm{P}(\overline{A}_1) = 1 - \mathrm{P}(A_1) = 1 - 0.7 = 0.3$, $\mathrm{P}(\overline{A}_2) = 0.2$, $\mathrm{P}(\overline{A}_3) = 0.1$. Подставив необходимые данные в формулу (14) окончательно имеем:

$$\mathrm{P}(A) = 0.7 \cdot 0.2 \cdot 0.1 + 0.3 \cdot 0.8 \cdot 0.1 + 0.3 \cdot 0.2 \cdot 0.9 = 0.092.$$

Пример 47. В урне имеются 5 черных шаров с номерами от 1 до 5 и 5 белых шаров с номерами от 1 до 5. Из урны наугад вынимается один шар. Найти вероятность того, что он будет белым, или его номер будет больше 3.

Решение. Испытание – вынимание наугад одного шара из урны. Интересует событие A = {вынут шар, номер которого больше 3, либо этот шар белого цвета}. Введем в рассмотрение вспомогательные события: B = {вынут шар с номером больше 3} и C = {вынут шар белого цвета}. Событие A наступит, если и только если произойдет событие B или C, или оба одновременно, т.е. $A = B + C$. Следовательно $\mathrm{P}(A) = \mathrm{P}(B + C)$. По теореме сложения имеем, что $\mathrm{P}(A) = \mathrm{P}(B) + \mathrm{P}(C) - \mathrm{P}(BC)$. Так как шаров с номерами больше 3 четыре, то $\mathrm{P}(B) = 4 / 10 = 2 / 5$. Так как в урне 5 белых шаров, то $\mathrm{P}(C) = 5 / 10 = 1 / 2$. Далее по теореме умножения имеем, что $\mathrm{P}(BC) = \mathrm{P}(B) \cdot \mathrm{P}(C \mid B)$. Найдем вероятность того, что шар белый при условии, что номер вынутого шара больше 3, т.е. найдем $\mathrm{P}(C \mid B)$. Так как среди 4 шаров с номерами 4 и 5 имеется два белых, то $\mathrm{P}(C \mid B) = 2 / 4 = 1 / 2$. Таким образом, $\mathrm{P}(BC) = 2 / 5 \cdot 1 / 2 = 1 / 5$. Отсюда окончательно имеем, что $\mathrm{P}(A) = 2 / 5 + 1 / 2 - 1 / 5 = 7 / 10$.

Задачи

111. Стрелок производит один выстрел в мишень, состоящую из центрального круга и двух концентрических колец. Вероятность попадания в круг и кольца соответственно равны 0.35, 0.20, 0.15. Какова вероятность попадания в мишень?

112. Вероятность того, что студент сдаст экзамен на «отлично», равна 0.3, на «хорошо» – 0.4, на «удовлетворительно» – 0.2. Найти вероятность того, что: a) студент сдаст экзамен на «хорошо» или на «отлично»; b) студент не сдаст экзамен.

113. Вероятность того, что стрелок при одном выстреле попадает в мишень, равна 0.9. Стрелок произвел 2 выстрела. Найти вероятность того, что оба выстрела дали попадание.

114. В урне находятся 15 белых и 6 черных шаров. Из нее вынимают наугад один шар, снова возвращают его в урну и шары перемешивают. Затем вынимают второй шар. Найти вероятность, что оба вынутых шара белые.

115. Бросается монета до первого появления «герба». Найти вероятность того, что потребуется 3 броска.

116. В урне 5 белых и 3 черных шара. Из урны поочередно вынимают наугад 2 шара, не возвращая их обратно. Найти вероятность того, что при первом вынимании появится белый шар, а при втором – черный.

117. В коробке имеется 10 деталей, из них 3 бракованные. Мастер извлекает наугад по одной детали до тех пор, пока ему не попадется стандартная. Какова вероятность того, что мастер извлечет ровно две детали?

118. Отдел технического контроля проверяет изделия на стандартность. Вероятность того, что изделие стандартно, равна 0.9. Найти вероятность того, что из двух проверенных изделий: a) оба стандартные; b) хотя бы одно стандартное; c) только одно стандартное.

119. В компьютерном классе имеется 4 принтера. Для каждого принтера вероятность того, что он работает в данный момент, равна 0.9. Найти вероятность того, что в данный момент работает хотя бы один принтер.

120*. Имеется коробка с девятью новыми теннисными мячами. Для игры берут три мяча; после игры их кладут обратно. При выборе мячей игранные от неигранных не отличают. Какова вероятность того, что после трех игр в коробке не останется неигранных мячей?

121. Два стрелка произвели по одному выстрелу. Вероятность попадания в мишень первым стрелком равна 0.7, а вторым – 0.6. Найти вероятность того, что хотя бы один из стрелков попал в мишень.

122. Предположим, что для одной торпеды вероятность попасть в корабль равна 0.6. Какова вероятность того, что 3 торпеды потопят корабль, если для потопления корабля достаточно одного попадания торпеды в цель?

123. В одной урне 7 белых и 8 черных шаров, в другой – 9 белых и 6 черных. Из каждой урны вынуто наугад по одному шару. Найти вероятность того, что они одного цвета.

124. В одной урне 5 белых и 10 черных шаров, в другой – 10 белых и 5 черных. Из каждой урны вынуто наугад по одному шару. Найти вероятность того, что они разного цвета.

125. Вероятность попадания в цель первым стрелком 0.7, а вторым – 0.8. Стрелки выстрелили одновременно. Какова вероятность того, что один из них попадет в цель, а другой не попадет?

126. Вероятность попадания в цель стрелком при одном выстреле равна 0.8. Найти вероятность только одного попадания при двух выстрелах.

127. При включении зажигания двигатель может запуститься с вероятностью 0.8. Найти вероятность того, что: a) для запуска двигателя придется включать зажигание ровно два раза; b) для запуска двигателя придется включать зажигание не более двух раз.

128. Производится три выстрела по одной и той же мишени. Вероятности попадания при первом, втором и третьем выстрелах равны соответственно 0.4, 0.5, 0.7. Найти вероятность только одного попадания при трех выстрелах.

129. Экзаменационный билет содержит три вопроса. Вероятности того, что студент ответит на первый и второй вопросы билета, равны 0.9; на третий – 0.8. Найти вероятность того, что студент сдаст экзамен, если для этого необходимо ответить хотя бы на два вопроса.

130*. Три команды A_1, A_2, A_3 спортивного общества A состязаются соответственно с тремя командами B_1, B_2, B_3 общества B. Вероятности того, что команды общества A выиграют матчи у команд общества B, таковы: при встрече A_1 с B_1 – 0.8; A_2 с B_2 – 0.4; A_3 с B_3 – 0.4. Для победы необходимо выиграть не менее двух матчей из трех (ничьи во внимание не принимаются). Победа какого из обществ вероятнее?

131*. Монета подбрасывается до тех пор, пока два раза подряд она не выпадет одной и той же стороной. Найти вероятность того, что опыт окончится на четвертом подбрасывании.

132*. Вероятность попадания в мишень при каждом выстреле для первого стрелка равна 0.7, а для второго – 0.8. Оба они делают по одному выстрелу по мишени, а затем каждый из стрелков стреляет еще раз, если при первом сделанном им выстреле он промахнулся. Найти вероятность того, что в мишень попали ровно 2 раза.

133*. Два стрелка, независимо один от другого, делают по два выстрела (каждый по своей мишени). Вероятность попадания в мишень при одном выстреле для первого стрелка 0.7, для второго – 0.6. Выигравшим соревнование считается тот стрелок, в мишени которого будет больше попаданий. Найти вероятность того, что выиграет первый стрелок.

134. В первой урне 6 белых и 4 черных шара, а во второй урне 5 белых и 7 черных шаров. Из первой урны вынимают случайным образом 3 шара, а из второй – 2 шара. Найти вероятность того, что среди вынутых шаров: a) все шары одного цвета; b) только три белых шара; c) хотя бы один белый шар.

135. В первой урне 4 белых и 5 черных шаров, а во второй урне 5 белых и 8 черных шаров. Из первой урны вынимают случайным образом 2 шара, а из второй – 3 шара. Найти вероятность того, что среди вынутых шаров: a) все шары одного цвета; b) только два белых шара; c) хотя бы один белый шар.

136. Товар поступает в магазин с трех баз. Вероятности того, что нужный товар находится на первой, второй и третьей базе равны соответственно 0.6, 0.7, 0.8. Найти вероятность того, что нужный товар имеется: a) только на одной базе; b) не менее, чем на двух базах; c) хотя бы на одной базе.

137. На связке 5 ключей. К замку подходит только один ключ. Найти вероятность того, что потребуется не более двух попыток открыть замок, если опробованный ключ в дальнейших испытаниях не участвует.

138*. В урне 2 белых и 3 черных шара. Два игрока поочередно вынимают наугад из урны по одному шару, не возвращая их обратно. Выигравшим считается тот, кто раньше вынет белый шар. Найти вероятность того, что выиграет первый игрок (тот, кто вынимал шар первым).

139*. Имеется 50 экзаменационных билетов, каждый из которых содержит два вопроса. Экзаменующийся знает ответ не на все 100 вопросов, а только на 60. Найти вероятность того, что экзамен будет сдан, если для этого достаточно ответить на оба вопроса из своего билета, или на один вопрос из своего билета и на один (по выбору преподавателя) вопрос из дополнительного билета.

140*. В лифт семиэтажного дома на первом этаже вошли 3 человека. Каждый из них с одинаковой вероятностью независимо от других может выйти на любом этаже, начиная со второго. Найти вероятности следующих событий: A = {все пассажиры выйдут на четвертом этаже}; B = {все пассажиры выйдут одновременно (на одном и том же этаже)}; C = {все пассажиры выйдут на разных этажах}.

141*. Пакеты акций, имеющихся на рынке ценных бумаг, могут дать доход владельцу с вероятностью 0.5 (для каждого пакета). Сколько пакетов акций различных фирм нужно приобрести, чтобы с вероятностью, не меньшей 0.96875, можно было ожидать доход хотя бы по одному пакету акций?

2.2. Формула полной вероятности

Говорят, что совокупность событий A_1, A_2, …, A_n образует **полную группу событий**, если эти события попарно несовместны и в результате испытания обязательно наступает хотя бы одно из них, то есть, если:

1) $A_iA_j = \varnothing$ при $i \neq j$;

2) $A_1 + A_2 + \ldots + A_n = \Omega$.

Пример 48. Испытание – один выстрел по мишени. События A = {попадание в мишень} и B = {промах} образуют полную группу событий.

Пример 49. Испытание – бросание игральной кости один раз. События A = {выпало четное число очков} = {2, 4, 6} и B = {выпало нечетное число очков} = {1, 3, 5} образуют полную группу событий.

Для данного испытания можно привести и другие примеры полной группы событий. События C = {выпало менее трех очков} = {1, 2} и D = {выпало более двух очков} = {3, 4, 5, 6} образуют полную группу событий. Тройка событий E = {выпало менее четырех очков} = {1, 2, 3}, F = {выпало четыре очка} = {4} и G = {выпало более четырех очков} = {5, 6} также будет являться полной группой событий.

Пример 50. Испытание – вынимание наугад одной карты из колоды. События A = {вынута карта бубновой масти}, B = {вынута карта червонной масти}, C = {вынута карта крестовой масти} и D = {вынута карта пиковой масти} образуют полную группу событий.

Пример 51. Испытание – футбольный матч между двумя командами. События A = {победила первая команда}, B = {победила вторая команда} и C = {ничья} образуют полную группу событий.

Теорема. Сумма вероятностей событий A_1, A_2, …, A_n, образующих полную группу, равна единице:

$$\mathrm{P}(A_1) + \mathrm{P}(A_2) + \ldots + \mathrm{P}(A_n) = 1 .$$

Теорема (формула полной вероятности). Если событие A может наступить только при условии появления одного из событий B_1, B_2, …, B_n, которые образуют полную группу событий, то вероятность события A равна сумме произведений вероятностей каждого из этих событий на соответствующую условную вероятность события A:

$$\mathrm{P}(A) = \sum_{i=1}^{n} \mathrm{P}(B_i)\mathrm{P}(A \mid B_i) . \qquad (15)$$

Замечание. Формула полной вероятности применяется во всех случаях, когда испытание со случайным исходом распадается на два этапа. На первом этапе как бы «разыгрываются» условия испытания, а на втором – его результат. События B_1, B_2, …, B_n при этом обычно называют **гипотезами**, поскольку заранее неизвестно, какое из этих событий наступит.

Алгоритм решения задач с использованием формулы полной вероятности

Шаг 1. Описываем два этапа испытания.

Шаг 2. Формулируем гипотезы как исходы первого этапа испытания.

Шаг 3. Находим вероятности гипотез.

Шаг 4. Описываем интересующее событие (как результат второго этапа испытания).

Шаг 5. Находим условные вероятности интересующего события для каждой гипотезы.

Шаг 6. Находим вероятность интересующего события по формуле полной вероятности (15).

Пример 52. Имеются две урны: в первой – 2 белых и 3 черных шара, во второй – 4 белых и 1 черный шар. Найти вероятность того, что извлеченный наудачу шар из наудачу выбранной урны окажется белым.

Решение. Испытание – извлечение наудачу шара из наудачу выбранной урны. Данное испытание распадается на два этапа. На первом этапе осуществляется выбор урны, а на втором – извлечение наудачу шара из выбранной (на первом этапе) урны.

Сформулируем гипотезы (возможные исходы первого этапа испытания):

B_1 = {выбрана первая урна};

B_2 = {выбрана вторая урна}.

Нетрудно убедиться в том, что события (гипотезы) B_1 и B_2 образуют полную группу событий. Поскольку выбор каждой из двух урн равновозможен, то $P(B_1) = P(B_2) = \frac{1}{2}$.

Интересующее событие A = {извлечен белый шар} является исходом непосредственно второго этапа испытания. Найдем условные вероятности события A:

$$P(A \mid B_1) = \frac{2}{5},\ P(A \mid B_2) = \frac{4}{5}.$$

Следовательно, по формуле полной вероятности (15) окончательно получаем:

$$P(A) = P(B_1)P(A \mid B_1) + P(B_2)P(A \mid B_2) = \frac{1}{2}\cdot\frac{2}{5} + \frac{1}{2}\cdot\frac{4}{5} = \frac{6}{10} = 0.6.$$

Пример 53. В группе студентов, пришедших на зачет, 30% подготовлены отлично, 50% – хорошо, 20% – посредственно. Всего имеется 30 билетов. Отлично подготовленный студент знает все билеты, хорошо подготовленный – знает только 25, посредственно – 15. Найти вероятность того, что вызванный наугад студент знает попавшийся ему билет.

Решение. Испытание – вынимание наугад билета вызванным наугад студентом. Данное испытание распадается на два этапа. На первом этапе осуществляется случайный выбор (вызов) студента из группы. На втором – вынимание наугад билета этим студентом.

Сформулируем гипотезы (возможные исходы первого этапа испытания):

B_1 = {выбран отлично подготовленный студент};

B_2 = {выбран хорошо подготовленный студент};

B_3 = {выбран посредственно подготовленный студент}.

Нетрудно убедиться в том, что события (гипотезы) B_1, B_2 и B_3 образуют полную группу событий. Поскольку отлично подготовлены 30% студентов, хорошо – 50%, посредственно – 20%, то

$$P(B_1) = \frac{30\%}{100\%} = 0.3,\ P(B_2) = 0.5,\ P(B_3) = 0.2.$$

Интересующее событие A = {студент знает попавшийся ему билет} является исходом непосредственно второго этапа испытания.

Найдем условные вероятности события A. Так как отлично подготовленный студент знает все билеты, то

$$\mathrm{P}(A \mid B_1) = 1 .$$

Хорошо подготовленный студент знает только 25 билетов из 30. Следовательно,

$$\mathrm{P}(A \mid B_2) = \frac{25}{30} = \frac{5}{6} .$$

Посредственно подготовленный студент знает только 15 билетов из 30. Следовательно,

$$\mathrm{P}(A \mid B_3) = \frac{15}{30} = \frac{1}{2} .$$

По формуле полной вероятности (15) окончательно получаем:

$$\mathrm{P}(A) = \mathrm{P}(B_1)\mathrm{P}(A \mid B_1) + \mathrm{P}(B_2)\mathrm{P}(A \mid B_2) + \mathrm{P}(B_3)\mathrm{P}(A \mid B_3) =$$

$$= 0.3 \cdot 1 + 0.5 \cdot \frac{5}{6} + 0.2 \cdot \frac{1}{2} = \frac{49}{60} .$$

Пример 54. Имеются две урны: в первой – 3 белых и 2 черных шара; во второй – 5 белых и 3 черных шара. Из первой урны во вторую перекладывают, не глядя, два шара. После этого из второй урны берут наугад один шар. Найти вероятность того, что этот шар будет белым.

Решение. Испытание – извлечение наудачу шара из второй урны, после того как в нее были переложены, не глядя, два шара из первой урны. Данное испытание распадается на два этапа. На первом этапе осуществляется перекладывание, не глядя, двух шаров из первой урны во вторую. На втором – извлечение наудачу шара из второй урны.

Сформулируем гипотезы (возможные исходы первого этапа испытания):

B_1 = {из первой урны во вторую переложены 2 белых шара};

B_2 = {из первой урны во вторую переложен 1 белый и 1 черный шар};

B_3 = {из первой урны во вторую переложены 2 черных шара}.

Нетрудно убедиться в том, что события (гипотезы) B_1, B_2 и B_3 образуют полную группу событий. Поскольку в первой урне 3 белых и 2 черных шара, то

$$\mathrm{P}(B_1) = \frac{C_3^2}{C_5^2} = \frac{3}{10} = 0.3;$$

$$P(B_2) = \frac{C_3^1 C_2^1}{C_5^2} = \frac{3 \cdot 2}{10} = 0.6;$$

$$P(B_3) = \frac{C_2^2}{C_5^2} = \frac{1}{10} = 0.1.$$

Интересующее событие $A = \{$из второй урны извлечен белый шар$\}$ является исходом непосредственно второго этапа испытания. Найдем условные вероятности события A.

После первого этапа испытания состав второй урны изменился. Если в результате первого этапа испытания произошло событие B_1, то во второй урне стало 7 белых и 3 черных шара. Следовательно,

$$P(A \mid B_1) = \frac{7}{10} = 0.7 .$$

Если в результате первого этапа испытания произошло событие B_2, то во второй урне стало 6 белых и 4 черных шара. Следовательно,

$$P(A \mid B_2) = \frac{6}{10} = 0.6 .$$

Если в результате первого этапа испытания произошло событие B_3, то во второй урне стало 5 белых и 5 черных шаров. Следовательно,

$$P(A \mid B_2) = \frac{5}{10} = 0.5 .$$

По формуле полной вероятности (15) окончательно получаем:

$$P(A) = P(B_1)P(A \mid B_1) + P(B_2)P(A \mid B_2) + P(B_3)P(A \mid B_3) =$$
$$= 0.3 \cdot 0.7 + 0.6 \cdot 0.6 + 0.1 \cdot 0.5 = 0.62.$$

Задачи

142. В первом ящике содержится 20 деталей, из них 15 стандартных; во втором – 30 деталей, из них 24 стандартных; в третьем – 10 деталей, из них 6 стандартных. Найти вероятность того, что наудачу извлеченная деталь из наудачу взятого ящика – стандартная.

143. На фабрике, изготовляющей болты, первая машина производит 25%, вторая – 35%, третья – 40% всех изделий. Брак в их продукции составляет соответственно 5%, 4%, 2%. Найти вероятность того, что случайно выбранный болт оказался бракованным.

144. В пирамиде стоят 20 винтовок, из них 5 с оптическим прицелом. Стрелок, стреляя из винтовки с оптическим прицелом, может поразить мишень с вероятностью 0.8, а стреляя из винтовки без оптического прицела, – с вероятностью 0.5. Найти вероятность того, что стрелок поразит мишень, стреляя из случайно взятой винтовки.

145. Вероятность изготовления изделия с браком на данном предприятии равна 0.04. Перед выпуском изделие подвергается упрощенной проверке, которая в случае стандартного изделия пропускает его с вероятностью 0.96, а в случае изделия с браком – с вероятностью 0.05. Найти вероятность того, что изготовленное изделие будет выпущено предприятием в продажу.

146. Студент знает только 20 экзаменационных билетов из 25. Найти вероятность того, что студент вытянет неизвестный билет, если он вытягивает: a) первым; b) вторым.

147. На рис. 2.1 изображена схема дорог. Туристы вышли из пункта O, выбирая наугад на разветвлении дорог один из возможных путей. Найти вероятность того, что они попадут в пункт A.

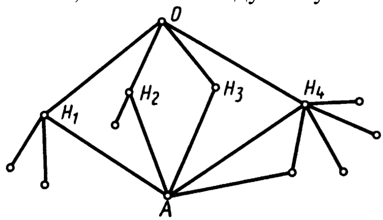


Рис. 2.1

148. При помещении в урну тщательно перемешанных 12 шаров (7 белых и 5 черных) один шар неизвестного цвета затерялся. Из оставшихся в урне 11 шаров наудачу вынимают один шар. Какова вероятность, что вынутый шар окажется белым?

149. В урне 3 белых и 4 черных шара. Из урны случайным образом вынимают по одному без возврата 2 шара. Найти вероятность того, что второй вынутый шар окажется белым.

150. В урне имеются 3 белых и 5 черных шаров. Из урны наугад извлекают два шара. Затем из этих двух шаров также наугад извлекают один шар. Найти вероятность, что этот шар окажется белым.

151. Из колоды в 36 карт наудачу одна за другой вынимаются две карты. Первую извлеченную карту смотрят – она оказалась дамой; после этого две вынутые карты перемешивают (между собой), и одну из них берут наугад. Найти вероятность того, что она окажется тузом.

152. Из колоды в 36 карт наудачу одна за другой вынимаются две карты. Первую извлеченную карту смотрят – она оказалась тузом;

после этого две вынутые карты перемешивают (между собой), и одну из них берут наугад. Найти вероятность того, что она тоже окажется тузом.

153. В группе спортсменов 20 пловцов, 6 велосипедистов и 4 бегуна. Вероятность выполнить квалификационную норму такова: для пловца – 0.9, для велосипедиста – 0.8 и для бегуна – 0.75. Найти вероятность того, что спортсмен, выбранный наудачу, выполнит квалификационную норму.

154. Имеются две урны: в первой 3 белых шара и 2 черных; во второй 4 белых и 5 черных. Из первой урны во вторую перекладывают, не глядя, два шара. После этого из второй урны берут один шар. Найти вероятность того, что этот шар будет белым.

155. В одной урне 3 белых и 7 черных шаров, а в другой 8 белых и 2 черных шара. Из первой урны случайным образом вынимают 3 шара и опускают во вторую урну. После этого из второй урны также случайно вынимают 2 шара. Найти вероятность того, что все шары, вынутые из второй урны, белые.

156. В ящике находятся 8 новых теннисных мячей и 5 игранных. Из ящика наугад вынимают два мяча, которыми играют. После этого мячи возвращают в ящик. Через некоторое время из ящика снова вынимают наугад два мяча. Найти вероятность того, что они будут новыми.

157. Имеются три урны: в первой урне 4 белых и 3 черных шара; во второй – 3 белых и 1 черный; в третьей – 2 белых и 2 черных. Найти вероятность того, что извлеченные наудачу 2 шара из наудачу выбранной урны окажутся одного цвета.

158. Из 10 стрелков можно выделить 2 группы: 3 отличных стрелка и 7 хороших. Вероятность попадания в мишень при одном выстреле для отличного стрелка равна 0.8, для хорошего – 0.6. Два стрелка, вызванные наугад, стреляют по одной и той же мишени. Найти вероятность хотя бы одного попадания в мишень.

159. В группе из 10 студентов, пришедших на экзамен, 3 подготовленных отлично, 4 – хорошо, 2 – удовлетворительно и 1 – плохо. В экзаменационных билетах имеется 20 вопросов. Отлично подготовленный студент может ответить на все 20 вопросов, хорошо подготовленный – на 16, удовлетворительно – на 10, плохо – на 5. Найти вероятность того, что вызванный наугад студент ответит на три произвольно заданных вопроса.

160. В первой урне содержится 10 шаров, из них 8 белых; во второй урне 20 шаров, из них 4 белых. Из каждой урны наудачу извлекли по одному шару, а затем из этих двух шаров наудачу взят один шар. Найти вероятность того, что взят белый шар.

161. В урне содержится 3 шара, каждый из которых может быть белым или черным. К ним добавляют 2 белых шара. После этого из урны случайным образом вынимают 3 шара. Найти вероятность того, что все вынутые шары белые, предполагая, что все возможные предположения о первоначальном содержании урны равновозможны.

162*. По самолету производится три одиночных выстрела. Вероятность попадания при первом выстреле равна 0.4, при втором – 0.5, при третьем – 0.7. Для вывода самолета из строя заведомо достаточно трех попаданий; при одном попадании самолет выходит из строя с вероятностью 0.2, при двух попаданиях с вероятностью 0.6. Найти вероятность того, что в результате трех выстрелов самолет будет выведен из строя.

163*. Фирма участвует в трех проектах, каждый из которых может закончиться неудачей с вероятностью 0.1. В случае неудачи одного проекта вероятность разорения фирмы равна 0.2, двух – 0.5, трех – 0.9. Найти вероятность разорения фирмы.

164*. Два аудитора проверяют 10 фирм (по 5 каждый). В двух фирмах допущены нарушения. Вероятность выявления нарушений (в отдельной фирме-нарушителе) первым аудитором равна 0.8, вторым – 0.9. Найти вероятность того, что обе фирмы-нарушителя будут выявлены.

165*. Имеются две урны: в первой 2 белых и 4 черных шара; во второй – 3 белых и 2 черных. Из первой урны во вторую перекладывают не глядя один шар; шары перемешиваются, затем из второй урны в первую перекладывают не глядя один шар. После этого из первой урны берут наугад один шар. Найти вероятность того, что он будет белым.

2.3. Формула Байеса

Рассмотрим следующую задачу: имеется полная группа событий (гипотез) $B_1, B_2, \ldots, B_n$, вероятности которых $P(B_i)$ ($i = 1, 2, ..., n$) известны до испытания (**априорные вероятности**). Теперь предположим, что испытание произведено, и в его результате появилось событие A. Спрашивается, каковы будут вероятности этих гипотез после испытания (**апостериорные вероятности**). Иными словами нам нужно определить условные вероятности $P(B_i|A)$ ($i = 1, 2, ..., n$).

Искомые вероятности гипотез вычисляются по **формуле Байеса**:

$$P(B_i \mid A) = \frac{P(B_i)P(A \mid B_i)}{\sum_{i=1}^{n} P(B_i)P(A \mid B_i)} \quad (i = 1, 2, ..., n). \qquad (16)$$

Замечание. Формула Байеса позволяет пересчитывать вероятности гипотез в свете новой информации, состоящей в том, что в результате испытания произошло событие A.

Пример 55. Имеются три урны: в первой – 2 белых и 3 черных шара, во второй – 4 белых и 1 черный шар, в третьей – 3 белых и 2 черных шара. Извлеченный наудачу шар из наудачу выбранной урны оказался белым. Найти вероятность того, что: a) вынимали из первой урны; b) вынимали из второй урны; c) вынимали из третьей урны.

Решение. Испытание – извлечение наудачу шара из наудачу выбранной урны. Данное испытание распадается на 2 этапа. На первом этапе осуществляется выбор урны. На втором – извлечение наудачу шара из выбранной (на первом этапе) урны.

Сформулируем гипотезы (возможные исходы первого этапа испытания):

$B_1 = \{$выбрана первая урна$\}$;

$B_2 = \{$выбрана вторая урна$\}$;

$B_3 = \{$выбрана третья урна$\}$.

Нетрудно убедиться в том, что события (гипотезы) B_1, B_2 и B_3 образуют полную группу событий. Поскольку выбор каждой из трех урн равновозможен, то $P(B_1) = P(B_2) = P(B_3) = \frac{1}{3}$.

Произошло событие $A = \{$извлечен белый шар$\}$ (исход второго этапа испытания). Найдем условные вероятности события A:

$$P(A \mid B_1) = \frac{2}{5}, \; P(A \mid B_2) = \frac{4}{5}, \; P(A \mid B_3) = \frac{3}{5}.$$

Вероятности гипотез после испытания вычислим по формуле Байеса (16):

a) $$P(B_1 \mid A) = \frac{P(B_1)P(A \mid B_1)}{P(B_1)P(A \mid B_1) + P(B_2)P(A \mid B_2) + P(B_3)P(A \mid B_3)} =$$

$$= \frac{\frac{1}{3}\cdot\frac{2}{5}}{\frac{1}{3}\cdot\frac{2}{5} + \frac{1}{3}\cdot\frac{4}{5} + \frac{1}{3}\cdot\frac{3}{5}} = \frac{2}{2+4+3} = \frac{2}{9};$$

b) $$\mathrm{P}(B_2 \mid A)=\frac{\mathrm{P}(B_2)\mathrm{P}(A \mid B_2)}{\mathrm{P}(B_1)\mathrm{P}(A \mid B_1)+\mathrm{P}(B_2)\mathrm{P}(A \mid B_2)+\mathrm{P}(B_3)\mathrm{P}(A \mid B_3)}=$$

$$=\frac{\frac{1}{3}\cdot\frac{4}{5}}{\frac{1}{3}\cdot\frac{2}{5}+\frac{1}{3}\cdot\frac{4}{5}+\frac{1}{3}\cdot\frac{3}{5}}=\frac{4}{2+4+3}=\frac{4}{9};$$

c) $$\mathrm{P}(B_3 \mid A)=\frac{\mathrm{P}(B_3)\mathrm{P}(A \mid B_3)}{\mathrm{P}(B_1)\mathrm{P}(A \mid B_1)+\mathrm{P}(B_2)\mathrm{P}(A \mid B_2)+\mathrm{P}(B_3)\mathrm{P}(A \mid B_3)}=$$

$$=\frac{\frac{1}{3}\cdot\frac{3}{5}}{\frac{1}{3}\cdot\frac{2}{5}+\frac{1}{3}\cdot\frac{4}{5}+\frac{1}{3}\cdot\frac{3}{5}}=\frac{3}{2+4+3}=\frac{1}{3}.$$

Задачи

166. Имеются 2 урны: в первой из них 4 белых шара и 7 черных; во второй 8 белых шаров и 7 черных. Некто выбирает наугад одну из урн и вынимает из нее шар. Этот шар оказался белым. Найти вероятность того, что этот шар вынут: a) из первой урны; b) из второй урны.

167. В урне 4 белых и 6 черных шаров. Из урны случайным образом вынимают по одному без возврата 2 шара. Второй вынутый шар оказался черным. Найти вероятность того, что первым был извлечен белый шар.

168. В пирамиде 10 винтовок, из которых 4 снабжены оптическим прицелом. Вероятность того, что стрелок поразит мишень при выстреле из винтовки с оптическим прицелом, равна 0.95, а при выстреле из винтовки без оптического прицела – 0.8. Стрелок поразил мишень из наудачу взятой винтовки. Найти вероятность того, что стрелок стрелял из винтовки с оптическим прицелом.

169. Команда стрелков состоит из 5 человек. Трое из них подготовлены хорошо (попадают в цель с вероятностью 0.8), а двое подготовлены удовлетворительно (попадают в цель с вероятностью 0.6). Наудачу из команды берется стрелок, который производит выстрел и попадает в цель. Какова вероятность того, что он подготовлен хорошо?

170. Изделие имеет скрытые дефекты с вероятностью 0.2. В течение года выходит из строя 75 % изделий со скрытыми дефектами и

15 % – без дефектов. Найти вероятность того, что изделие имело скрытые дефекты, если оно вышло из строя в течение года.

171. При помещении в урну тщательно перемешанных 12 шаров (7 белых и 5 черных) один шар неизвестного цвета затерялся. Из оставшихся в урне 11 шаров наудачу вынимают один шар, он оказался белым. Найти вероятность того, что утерян черный шар.

172. По результатам проверки контрольных работ оказалось, что в первой группе получили положительную оценку 20 студентов из 30, а во второй – 15 из 25. Найти вероятность того, что наудачу выбранная работа (из общего списка данных работ) написана студентом первой группы, если оказалось, что она имеет положительную оценку.

173. Фирма нарушает закон с вероятностью 0.3. Обычно аудитор выявляет нарушение с вероятностью 0.75. Однако в данном случае проведенная им проверка нарушение не выявила. Найти вероятность того, что оно на самом деле есть.

174. На фабрике, изготовляющей болты, первая машина производит 25%, вторая – 35%, третья – 40% всех изделий. В их продукции брак составляет соответственно 5%, 4% и 2%. Случайно выбранный из продукции болт оказался дефектным. Какой машиной вероятнее всего он был произведен?

175. Имеются две урны: в первой 3 белых шара и 2 черных; во второй 4 белых и 5 черных. Из первой урны во вторую перекладывают, не глядя, два шара. После этого из второй урны берут наугад один шар, он оказался белым. Найти вероятность того, что из первой урны во вторую переложили 2 белых шара.

176. Из полной колоды в 36 карт утеряна 1 карта. Из оставшейся колоды вынимают наугад 1 карту, она оказалась дамой. Найти вероятность того, что была утеряна: a) дама; b) туз.

177. В группе из 10 студентов, пришедших на экзамен, 3 подготовлено отлично, 4 – хорошо, 2 – удовлетворительно и 1 – плохо. В экзаменационных билетах имеется 20 вопросов. Отлично подготовленный студент может ответить на все 20 вопросов, хорошо подготовленный – на 16, удовлетворительно – на 10, плохо – на 5. Вызванный наугад студент ответил на три произвольно заданных вопроса. Найти вероятность того, что студент подготовлен: a) отлично; b) плохо.

178. Два стрелка независимо один от другого стреляют по одной мишени, делая каждый по одному выстрелу. Вероятность попадания в мишень для первого стрелка равна 0.8, для второго – 0.4. После стрельбы в мишени обнаружено одно попадание. Найти вероятность того, что в мишень попал первый стрелок.

179. Имеются две урны: в первой 2 белых шара и 3 черных; во второй 4 белых и 1 черный. Из первой урны во вторую перекладывают, не глядя, один шар. После этого из второй урны берут наугад один шар, он оказался белым. Найти вероятность того, что ранее он находился в первой урне.

180*. Упрощенная система контроля изделий состоит из одной проверки. В результате проверки стандартное изделие ошибочно считается бракованным с вероятностью 0.05, а бракованное изделие ошибочно считается стандартным с вероятностью 0.02. Предполагая, что каждое изделие удовлетворяет стандарту с вероятностью 0.8, найти вероятности следующих событий: a) изделие, признанное стандартным, в действительности является браком; b) изделие, признанное бракованным, в действительности удовлетворяет стандарту.

181*. По каналу связи может быть передана одна из трех последовательностей букв: AAAA, BBBB, CCCC. Известно, что вероятности передачи каждой из данных последовательностей равны соответственно 0.1; 0.6; 0.3. В результате шумов буква принимается правильно с вероятностью 0.6. Вероятности приема переданной буквы за две другие равны 0.2 и 0.2. Предполагается, что буквы искажаются независимо друг от друга. На приемном устройстве получено ABCA. Какая из трех последовательностей букв вероятнее всего была передана по каналу связи?

3. Схема Бернулли

На практике часто приходится сталкиваться с задачами, которые можно представить в виде многократно повторяющихся испытаний при данном комплексе условий, в которых представляет интерес вероятность числа m наступлений некоторого события A в n испытаниях. Например, необходимо определить вероятность определенного числа попаданий в мишень при нескольких выстрелах, вероятность некоторого числа бракованных изделий в данной партии и т.д.

3.1. Последовательность независимых испытаний. Испытания Бернулли

Испытания называются **независимыми**, если вероятность какого-либо исхода каждого из них не зависит от того, какие исходы имели другие испытания.

Пример 56. Испытания S_1 = {подбрасывание один раз игральной кости} и S_2 = {подбрасывание один раз монеты} независимы.

Пример 57. Пусть имеется урна с несколькими шарами. Испытания S_1 = {первое извлечение одного шара из урны с его последующим возвратом}, S_2 = {второе извлечение одного шара из урны с его последующим возвратом}, …, S_n = {n-е извлечение одного шара из урны с его последующим возвратом} независимы.

Пример 58. Пусть имеется урна с тремя шарами. Испытания S_1 = {первое извлечение одного шара из урны без возврата}, S_2 = {второе извлечение одного шара из урны без возврата} и S_3 = {третье извлечение одного шара из урны без возврата} зависимы.

Повторные независимые испытания называются **испытаниями Бернулли** или **схемой Бернулли**, если:

1) каждое испытание имеет только два возможных исхода;

2) вероятности этих исходов постоянны для всех испытаний.

Таким образом, в схеме Бернулли для каждого испытания имеются только два исхода: событие A («**успех**») и событие $\overline{A}$ («**неудача**») с постоянными вероятностями $P(A) = p$ и $P(\overline{A}) = q$. При этом $p + q = 1$.

Замечание. Испытания Бернулли возникают и при более сложных экспериментах, если мы не будем различать несколько возможных исходов, а опишем результат каждого испытания только в виде двух исходов: A («успех») или $\overline{A}$ («неудача»).

Примеры испытаний Бернулли:

1) Подбрасывание n раз одной монеты. Данное испытание представляет собой последовательность из n испытаний Бернулли, каждое из которых заключается в подбрасывании монеты один раз. Событие A = {выпал «герб»} («успех»), событие $\overline{A}$ = {выпала «решка»} («неудача»). $p = P(A) = 1 / 2$, $q = P(\overline{A}) = 1 / 2$.

2) Подбрасывание n раз игральной кости. Данное испытание представляет собой последовательность из n испытаний Бернулли, каждое из которых заключается в подбрасывании игральной кости один раз. Событие A = {выпало 1 или 3 очка} («успех»), событие $\overline{A}$ = {выпало 2, 4, 5 или 6 очков} («неудача»). $p = P(A) = 2 / 6 = 1 / 3$, $q = P(\overline{A}) = 2 / 3$.

3) Производится n выстрелов по мишени. Данное испытание представляет собой последовательность из n испытаний Бернулли,

каждое из которых заключается в одном выстреле по мишени. Событие A = {попадание} («успех»), событие $\overline{A}$ = {промах} («неудача»).

4) Обследование n изделий на предмет годности. Данное испытание представляет собой последовательность из n испытаний Бернулли, каждое из которых заключается в проверке одного изделия на предмет годности. Событие A = {изделие годное} («успех»), событие $\overline{A}$ = {изделие бракованное} («неудача»).

3.2. Формула Бернулли

Теорема (формула Бернулли). Вероятность того, что в n испытаниях Бернулли «успех» наступит ровно m раз, равна

$$\mathrm{P}_n(m) = C_n^m p^m q^{n-m}, \quad m = 0, 1, 2, \ldots, n, \tag{17}$$

где p – вероятность появления «успеха» в каждом испытании, $q = 1 - p$ – вероятность «неудачи».

Алгоритм решения задач с применением схемы Бернулли

Шаг 1. Описываем испытания Бернулли для данной задачи.
Шаг 2. Описываем интересующее событие.
Шаг 3. Определяем «успех» для отдельного испытания Бернулли с учетом интересующего события.
Шаг 4. Находим вероятность «успеха».
Шаг 5. Вычисляем вероятность интересующего события, применяя формулу Бернулли (17).

Пример 59. Монету подбрасывают 8 раз. Какова вероятность того, что 6 раз она упадет «гербом» вверх?

Решение. Шаг 1. Здесь мы имеем дело с последовательностью из 8 испытаний Бернулли, каждое из которых заключается в подбрасывании монеты один раз.

Шаг 2. Интересующее событие B = {в результате 8 подбрасываний монеты 6 раз она упадет «гербом» вверх}.

Шаг 3. Исходя из содержания (смысла) интересующего события B разумно определить «успех» для каждого из указанных испытаний Бернулли следующим образом: A («успех») = {выпадение «герба» при одном подбрасывании монеты}.

Шаг 4. Очевидно, что $p = \mathrm{P}(A) = 1 / 2$, а значит $q = 1 - p = 1 / 2$.

Шаг 5. По формуле Бернулли (17) при $n = 8$ и $m = 6$ окончательно находим

$$P(B) = P_8(6) = C_8^6 \left(\frac{1}{2}\right)^6 \left(\frac{1}{2}\right)^{8-6} = \frac{8!}{6! \cdot 2!} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^8 = \frac{7}{64}.$$

Пример 60. Группа из 7 одинаково подготовленных студентов сдает зачет. Вероятность того, что студент сдаст зачет, равна 0.8. Найти вероятность того, что: а) более четырех студентов сдадут зачет; б) хотя бы один студент сдаст зачет.

Решение. Шаг 1. Здесь мы имеем дело с последовательностью из 7 испытаний Бернулли, каждое из которых заключается в сдаче зачета одним студентом.

Шаг 2. Интересующие события:

а) B = {из 7 студентов более четырех сдадут зачет};

б) C = {хотя бы один из 7 студентов сдаст зачет}.

Событие B можно представить в виде суммы следующих попарно несовместных событий: B_1 = {из 7 студентов ровно 5 сдадут зачет}, B_2 = {из 7 студентов ровно 6 сдадут зачет} и B_3 = {из 7 студентов все 7 сдадут зачет}, т.е. $B = B_1 + B_2 + B_3$.

Событие C можно представить в виде суммы следующих попарно несовместных событий: C_1 = {из 7 студентов ровно 1 сдаст зачет}, C_2 = {из 7 студентов ровно 2 сдадут зачет}, …, C_7 = {из 7 студентов все 7 сдадут зачет}, т.е. $C = C_1 + C_2 + \ldots + C_7$. Но в данном случае удобнее перейти к противоположному событию: $\overline{C}$ = {ни один из 7 студентов не сдаст зачет} = {0 из 7 студентов сдаст зачет}.

Шаг 3. Исходя из содержания интересующих событий B и C разумно определить «успех» для каждого из указанных испытаний Бернулли следующим образом: A = {студент сдал зачет}.

Шаг 4. Из условия задачи следует, что $p = P(A) = 0.8$, а значит $q = 0.2$.

Шаг 5. а) Найдем вероятность события B_1 по формуле Бернулли (17) при $n = 7$ и $m = 5$

$$P(B_1) = P_7(5) = C_7^5 \cdot 0.8^5 \cdot 0.2^{7-5} = \frac{7!}{5! \cdot 2!} \cdot 0.8^5 \cdot 0.2^2 = 0.2752512.$$

Аналогично найдем вероятности событий B_2 и B_3 по формуле Бернулли (17) при $m = 6$ и $m = 7$ соответственно:

$$P(B_2) = P_7(6) = C_7^6 \cdot 0.8^6 \cdot 0.2^{7-6} = \frac{7!}{6! \cdot 1!} \cdot 0.8^6 \cdot 0.2^1 = 0.3670016,$$

$$P(B_3) = P_7(7) = C_7^7 \cdot 0.8^7 \cdot 0.2^{7-7} = \frac{7!}{7! \cdot 0!} \cdot 0.8^7 = 0.2097152.$$

Так как события B_1, B_2 и B_3 попарно несовместны, то $P(B) = P(B_1) + P(B_2) + P(B_3) = 0.85$.

б) Найдем вероятность события $\overline{C}$ по формуле Бернулли (17) при $n = 7$ и $m = 0$

$$P\left(\overline{C}\right) = P_7(0) = C_7^0 \cdot 0.8^0 \cdot 0.2^{7-0} = \frac{7!}{0! \cdot 7!} \cdot 0.2^7 = 0.0000128 .$$

Следовательно, $P(C) = 1 - P\left(\overline{C}\right) = 1 - 0.0000128 = 0.9999872$.

3.3. Наивероятнейшее число наступления события

Число m_0 называется **наивероятнейшим** числом наступления события A («успеха») в n испытаниях Бернулли, если $P_n(m_0) \geq P_n(m)$, $m = 0, 1, 2, \ldots, n$.

Замечание. Наивероятнейшее число m_0 можно находить двумя способами:

1) m_0 равно целой части числа $(n + 1)\,p$, т.е.

$$m_0 = [(n + 1)\,p], \tag{18}$$

где p – вероятность наступления события A («успеха») в каждом испытании Бернулли. При этом, если число $(n + 1)\,p$ целое, то наивероятнейшим является также и число $m_0 - 1$ с той же вероятностью $P_n(m_0)$.

2) m_0 может быть определено из двойного неравенства

$$np - q \leq m_0 \leq np + p, \ (p \neq 0 \text{ и } p \neq 1) \tag{19}$$

где $q = 1 - p$.

Пример 61. Доля изделий высшего сорта на данном предприятии составляет 30%. Чему равно наивероятнейшее число изделий высшего сорта в случайно отобранной партии из 75 изделий.

Решение. Здесь мы имеем дело с последовательностью из 75 испытаний Бернулли, каждое из которых заключается в случайном выборе одного изделия. Определим «успех» для каждого из указанных испытаний Бернулли следующим образом: A = {изделие высшего сорта}. Из условия задачи следует, что $p = P(A) =$ $= 30\% / 100\% = 0.3$. По формуле (18) находим, что наивероятнейшее число изделий высшего сорта в случайно отобранной партии из 75 изделий равно

$$m_0 = [(n + 1)\,p] = [(75 + 1) \cdot 0.3] = [22.8] = 22.$$

Пример 62. Сколько раз необходимо подбросить игральную кость, чтобы наивероятнейшее число выпадений 2 очков было равно 32?

Решение. Здесь мы имеем дело с последовательностью из нескольких (из n) испытаний Бернулли, каждое из которых заключается в подбрасывании игральной кости один раз. Определим «успех» для каждого из указанных испытаний Бернулли следующим образом: $A = \{$выпало 2 очка$\}$. Очевидно, что $p = \mathrm{P}(A) = 1/6$, а значит $q = 5/6$. Неизвестное количество испытаний n, при котором наивероятнейшее число «успехов» равно 32, найдем, используя двойное неравенство (19),

$$n \cdot \frac{1}{6} - \frac{5}{6} \le 32 \le n \cdot \frac{1}{6} + \frac{1}{6}.$$

Отсюда

$$\begin{cases} n \cdot \dfrac{1}{6} - \dfrac{5}{6} \le 32 \\ n \cdot \dfrac{1}{6} + \dfrac{1}{6} \ge 32 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} n \le 197 \\ n \ge 191 \end{cases} \Leftrightarrow 191 \le n \le 197 .$$

Итак, наивероятнейшее число выпадений 2 очков будет равно 32, если подбросить игральную кость 191, либо 192, …, либо 197 раз.

Задачи

182. Вероятность поражения мишени стрелком при одном выстреле равна 0.9. Найти вероятность того, что он поразит мишень 2 раза, сделав 5 выстрелов.

183. Игральная кость брошена 6 раз. Найти вероятность того, что ровно 3 раза выпадет 6 очков.

184. Наблюдениями установлено, что в некоторой местности в сентябре в среднем бывает 12 дождливых дней. Какова вероятность того, что из случайно взятых в этом месяце 8 дней 3 дня окажутся дождливыми?

185. Изделия некоторого производства содержат 5% брака. Найти вероятность того, что среди пяти взятых наугад изделий: а) нет ни одного испорченного; б) будут два испорченных.

186. В среднем по 15 % договоров страховая компания выплачивает страховую сумму. Найти вероятность того, что из десяти договоров, компания выплатит страховую сумму: а) по трем договорам; б) менее чем по двум договорам.

187. В результате каждого визита страхового агента договор заключается с вероятностью 1/4. Найти вероятность того, что из 10 визитов страхового агента 5 закончатся заключением договора?

188. Два равносильных шахматиста играют в шахматы. Что вероятнее: выиграть две партии из четырех или три партии из шести (ничьи во внимание не принимаются)?

189. Два лица А и В играют в шахматы. Вероятность того, что А выиграет партию равна 0.7, вероятность того, что В выиграет партию равна 0.3 (ничьи во внимание не принимаются). Что вероятнее для шахматиста В: выиграть не менее 3 партий из 5 или не менее 4 партий из 7?

190. Что вероятнее, выиграть у равносильного противника: а) три партии из четырех или пять из восьми? б) не менее трех партий из четырех или не менее пяти партии из восьми?

191. В среднем 20% пакетов акций на аукционах продаются по первоначально заявленной цене. Найти вероятность того, что из 9 пакетов акций в результате торгов по первоначально заявленной цене будет продано: а) ровно 2 пакета; б) менее 2 пакетов; в) не более 2 пакетов; г) хотя бы 2 пакета.

192. Подбрасывается 5 монет. Найти вероятность того, что: а) выпало ровно 2 «герба»; б) выпало более одного «герба».

193. Всхожесть семян данного растения равна 90%. Найти вероятность того, что из четырех посеянных семян взойдут: а) три; б) менее трех.

194. Монету подбрасывают шесть раз. Найти вероятность того, что «герб» выпадет: а) менее двух раз; б) не менее двух раз, в) не менее 2 раз и не более 4 раз.

195. Человек, принадлежащий к определенной группе населения, с вероятностью 0.2 оказывается брюнетом, с вероятностью 0.3 – шатеном, с вероятностью 0.4 – блондином и с вероятностью 0.1 – рыжим. Выбирается наугад группа из шести человек. Найти вероятности следующих событий: $B = \{$в составе группы ровно два рыжих$\}$; $C = \{$в составе группы не меньше четырех блондинов$\}$; $D = \{$в составе группы хотя бы один шатен$\}$.

196. Зачетная работа по предмету состоит из 6 задач, при этом зачет считается сданным, если студент решил хотя бы три из них. Студент Иванов может решить каждую задачу с вероятностью 0.6. Какова вероятность того, что он сдаст зачет?

197. Тест по теории вероятностей состоит из 10 вопросов. На каждый вопрос в тесте предлагается 4 варианта ответа, из которых необходимо выбрать один правильный. Какова вероятность того, что, будучи совершенно не готовым к тесту, студент угадает правильные ответы по крайней мере на 8 вопросов?

198. Вероятность рождения мальчика равна 0.515, а девочки 0.485. В некоторой семье шестеро детей. Найти вероятность того, что среди них не больше двух девочек.

199. Производится залп из шести орудий по некоторому объекту. Вероятность попадания в объект из каждого орудия равна 0.6. Найти вероятность ликвидации объекта, если для этого достаточно четырех попаданий.

200. Какое событие более вероятно при четырехкратном бросании игральной кости: выпадет шестерка хотя бы один раз или же шестерка не появится ни разу?

201. Какое событие более вероятно при 24 подбрасываниях двух игральных костей: хотя бы раз появятся две шестерки или же две шестерки не появится ни разу?

202*. (Задача кавалера де Мере.) Сколько раз надо бросить пару игральных костей, чтобы вероятность хотя бы одного появления двух шестёрок была больше ½?

203*. Сколько раз необходимо подбросить игральную кость, чтобы 6 очков выпало хотя бы один раз с вероятностью, не меньшей: а) 0.7; б) 0.9?

204*. Проведено 10 независимых испытаний, каждое из которых заключается в одновременном подбрасывании пяти игральных костей. Найти вероятность того, что ровно в четырех испытаниях появятся в точности по две «6».

205*. Некий курящий математик носит с собой две коробки спичек. Каждый раз, когда он хочет достать спичку, он выбирает наугад одну из коробок. Найти вероятность того, что когда математик вынет в первый раз пустую коробку, в другой коробке окажутся 2 спички, если в каждой коробке первоначально находится по 3 спички.

206*. (Задача Банаха.) Некий курящий математик носит с собой две коробки спичек. Каждый раз, когда он хочет достать спичку, он выбирает наугад одну из коробок. Найти вероятность того, что когда математик вынет в первый раз пустую коробку, в другой коробке окажутся r спичек, если в каждой коробке первоначально находится по n спичек.

207*. Вероятность хотя бы одного попадания при двух выстрелах равна 0.96. Найти вероятность трех попаданий при четырех выстрелах.

208*. В коробке 4 детали. Вероятность, что деталь стандартна, равна 0.9. Сколько необходимо взять коробок, чтобы с вероятностью не менее 0.99 получить хотя бы одну коробку, не содержащую брак?
209*. Сколько раз следует подбросить 2 монеты, чтобы с вероятностью не менее 0.95 хотя бы один раз появилось событие {один «герб» и одна «решка»}?
210*. В лотерее каждый сотый билет выигрышный. Сколько необходимо купить билетов, чтобы с вероятностью не менее 0.95 быть уверенным в том, что хотя бы один билет окажется выигрышным?
211. Батарея дала 14 выстрелов по объекту, вероятность попадания при одном выстреле в который равна 0.2. Найти наивероятнейшее число попаданий и вероятность этого числа попаданий.
212. Определите наиболее вероятное число выпадений «герба» при 25 подбрасываниях монеты.
213. Вероятность рождения мальчика равна 0.515. Найти наивероятнейшее число девочек из 600 новорожденных.
214. В одном из учебных заведений обучаются 730 студентов. Найти наиболее вероятное число студентов, родившихся 1 января.
215. Два стрелка стреляют по мишени. Вероятность промаха при одном выстреле для первого стрелка равна 0.2, а для второго – 0.4. Найти наивероятнейшее число залпов, при которых не будет ни одного попадания в мишень, если стрелки произведут 25 залпов.
216. Сколько раз необходимо подбросить монету, чтобы наивероятнейшее число выпавших «решек» было равно 3.
217. Вероятность попадания в цель при одном выстреле равна 0.7. Сколько необходимо сделать выстрелов, чтобы наивероятнейшее число попаданий в цель было равно 15?

3.4. Приближенные асимптотические формулы для схемы Бернулли

3.4.1. Формула Пуассона

Теорема (формула Пуассона). Вероятность того, что в n ($n \to \infty$) испытаниях Бернулли «успех» наступит ровно m раз, приближенно равна

$$\mathrm{P}_n(m) \approx \frac{\lambda^m}{m!} e^{-\lambda}, \tag{20}$$

где $\lambda = np$, p ($p \to 0$) – вероятность появления «успеха» в каждом испытании.

Замечание. Приближенную формулу Пуассона применяют практически в случаях, когда n велико, а p мало. Обычно $p < 0.1$, $\lambda = np \le 10$. Существуют таблицы значений функции $\frac{\lambda^m}{m!} e^{-\lambda}$.

Пример 63. На факультете обучается 1825 студентов. Какова вероятность того, что 1 сентября является днем рождения одновременно у четырех студентов факультета?

Решение. Шаг 1. Здесь мы имеем дело с последовательностью из 1825 испытаний Бернулли, каждое из которых заключается в проверке дня рождения у отдельного студента.

Шаг 2. Интересующее событие $B = \{$1 сентября является днем рождения одновременно у четырех студентов факультета$\}$.

Шаг 3. Исходя из содержания интересующего события B разумно определить «успех» для каждого из указанных испытаний Бернулли следующим образом: $A = \{$день рождения студента приходится на 1 сентября$\}$.

Шаг 4. Очевидно, что $p = \mathrm{P}(A) = 1 / 365$.

Шаг 5. Поскольку вероятность $p = 1 / 365$ – мала ($p < 0.1$), $n = 1825$ – велико и $\lambda = np = 1825 \cdot \frac{1}{365} = 5 \le 10$, то, применяя формулу Пуассона (20) при $m = 4$, находим

$$\mathrm{P}(B) = \mathrm{P}_{1825}(4) \approx \left. \frac{\lambda^m}{m!} e^{-\lambda} \right|_{\substack{\lambda=5 \\ m=4}} \approx |\, \textit{таблица}\ 1 | \approx 0.1755 .$$

Пример 64. Известно, что вероятность выпуска дефектной детали равна 0.02. Детали укладываются в коробки по 100 штук. Найти вероятность того, что в случайно взятой коробке: а) дефектных деталей не более двух; б) дефектных деталей более двух; в) есть хотя бы одна дефектная деталь.

Решение. Шаг 1. Здесь мы имеем дело с последовательностью из 100 испытаний Бернулли, каждое из которых заключается в проверке одной детали на годность.

Шаг 2. Интересующие события:

а) $B = \{$в случайно взятой коробке дефектных деталей не более двух$\}$;

б) C = {в случайно взятой коробке дефектных деталей более двух};

в) D = {в случайно взятой коробке есть хотя бы одна дефектная деталь}.

Событие B можно представить в виде суммы следующих попарно несовместных событий: B_1 = {в случайно взятой коробке нет дефектных деталей}, B_2 = {в случайно взятой коробке 1 дефектная деталь} и B_3 = {в случайно взятой коробке 2 дефектные детали}, т.е. $B = B_1 + B_2 + B_3$.

Событие C является противоположным для события B, т.е. $C = \overline{B}$.

Событие D является противоположным для события B_1, т.е. $D = \overline{B_1}$.

Шаг 3. Исходя из содержания интересующих событий B, C, D разумно определить «успех» для каждого из указанных испытаний Бернулли следующим образом: A = {деталь дефектная}.

Шаг 4. Из условия задачи следует, что $p = \mathrm{P}(A) = 0.02$.

Шаг 5. а) Поскольку вероятность $p = 0.02$ – мала ($p < 0.1$), $n = 100$ – велико и $\lambda = np = 100 \cdot 0.02 = 2 \leq 10$, то применяя формулу Пуассона (20) при $m = 0$ находим

$$\mathrm{P}(B_1) = \mathrm{P}_{100}(0) \approx \left. \frac{\lambda^m}{m!} e^{-\lambda} \right|_{\substack{\lambda=2 \\ m=0}} \approx |\,\textit{таблица}\ 1\,| \approx 0.1353\,;$$

при $m = 1$ находим

$$\mathrm{P}(B_2) = \mathrm{P}_{100}(1) \approx \left. \frac{\lambda^m}{m!} e^{-\lambda} \right|_{\substack{\lambda=2 \\ m=1}} \approx |\,\textit{таблица}\ 1\,| \approx 0.2707\,;$$

при $m = 2$ находим

$$\mathrm{P}(B_3) = \mathrm{P}_{100}(2) \approx \left. \frac{\lambda^m}{m!} e^{-\lambda} \right|_{\substack{\lambda=2 \\ m=2}} \approx |\,\textit{таблица}\ 1\,| \approx 0.2707\,.$$

Так как события B_1, B_2 и B_3 попарно несовместны, то $\mathrm{P}(B) = \mathrm{P}(B_1) + \mathrm{P}(B_2) + \mathrm{P}(B_3) \approx 0.6767$.

б) $\mathrm{P}(C) = \mathrm{P}\left(\overline{B}\right) = 1 - \mathrm{P}(B) \approx 1 - 0.6767 = 0.3233$.

в) $\mathrm{P}(D) = \mathrm{P}\left(\overline{B}_1\right) = 1 - \mathrm{P}(B_1) \approx 1 - 0.1353 = 0.8647.$

3.4.2. Локальная формула Муавра-Лапласа

Теорема (локальная формула Муавра-Лапласа). Вероятность того, что в n ($n \to \infty$) испытаниях Бернулли «успех» наступит ровно m раз, приближенно равна

$$\mathrm{P}_n(m) \approx \frac{1}{\sqrt{npq}} \varphi(x_{n,m}), \tag{21}$$

где p – вероятность появления «успеха» в каждом испытании; $q = 1 - p$; $\varphi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}$;

$$x_{n,m} = \frac{m - np}{\sqrt{npq}}. \tag{22}$$

Замечание. Вычисление по локальной формуле Муавра-Лапласа дает незначительную погрешность при выполнении условия $npq \geq 20$. Существуют специальные таблицы значений функции $\varphi(x)$ для положительных значений x. Для отрицательных значений x пользуются теми же таблицами, так как функция $\varphi(x)$ четная. Также следует учитывать, что $\varphi(x) \approx 0$ при $x \geq 4.1$.

Пример 65. В некоторой местности в среднем 80 семей из 100 имеют автомобили. Найти вероятность того, что из 400 семей 300 имеют автомобили.

Решение. Шаг 1. Здесь мы имеем дело с последовательностью из 400 испытаний Бернулли, каждое из которых заключается в проверке наличия автомобиля в отдельной семье.

Шаг 2. Интересующее событие B = {из 400 семей 300 имеют автомобили}.

Шаг 3. Исходя из содержания интересующего события B разумно определить «успех» для каждого из указанных испытаний Бернулли следующим образом: A = {семья имеет автомобиль}.

Шаг 4. Из условия задачи следует, что $p = \mathrm{P}(A) = 80 / 100 = 0.8$, а значит $q = 0.2$.

Шаг 5. Поскольку $n = 400$ достаточно велико и $npq = 400 \cdot 0.8 \cdot 0.2 = 64 \geq 20$, то применяем локальную формулу Муавра-Лапласа (21) при $m = 300$. Вначале найдем по формуле (22) значение $x_{n,m}$:

$$x_{n,m} = \frac{300 - 400 \cdot 0.8}{\sqrt{400 \cdot 0.8 \cdot 0.2}} = -2.5\,.$$

Тогда по формуле (21)

$$\mathrm{P}(B) = \mathrm{P}_{400}(300) \approx \frac{1}{\sqrt{400 \cdot 0.8 \cdot 0.2}}\,\varphi(-2.5) = |\,\varphi(x) - \textit{четная функция}\,| =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{64}}\,\varphi(2.5) = \frac{1}{8}\,\varphi(2.5) \approx |\,\textit{таблица}\ \ 2\,| \approx \frac{0{,}01753}{8} \approx 0{,}0022\,.$$

3.4.3. Интегральная формула Муавра-Лапласа

Теорема (интегральная формула Муавра-Лапласа). Вероятность того, что в n ($n \to \infty$) испытаниях Бернулли число «успехов» μ находится между m_1 и m_2, приближенно равна

$$\mathrm{P}\{m_1 \le \mu \le m_2\} \approx \Phi(x_2) - \Phi(x_1)\,, \qquad (23)$$

где $\Phi(x) = \dfrac{1}{\sqrt{2\pi}} \displaystyle\int_{-\infty}^{x} e^{-\frac{t^2}{2}}\,dt$ – функция Лапласа (интеграл вероятностей);

$$x_1 = \frac{m_1 - np}{\sqrt{npq}}\,;\ x_2 = \frac{m_2 - np}{\sqrt{npq}}\,; \qquad (24)$$

p – вероятность появления «успеха» в каждом испытании; $q = 1 - p$.

Замечание. Вычисление по интегральной формуле Муавра-Лапласа дает незначительную погрешность при выполнении условия $npq \ge 20$. Существуют специальные таблицы функции Лапласа. При этом $\Phi(x) + \Phi(-x) = 1$. Также следует учитывать, что $\Phi(x) \approx 1$ при $x \ge 4.05$.

Пример 66. Вероятность поражения мишени стрелком при одном выстреле равна 0.75. Найти вероятность того, что при 200 выстрелах мишень будет поражена: а) не менее 140 и не более 160 раз; б) не более 150 раз; в) не менее 135 раз.

Решение. Шаг 1. Здесь мы имеем дело с последовательностью из 200 испытаний Бернулли, каждое из которых заключается в одном выстреле по мишени.

Шаг 2. Интересующие события:

а) B = {при 200 выстрелах мишень будет поражена не менее 140 и не более 160 раз};

б) C = {при 200 выстрелах мишень будет поражена не более 150 раз};

в) D = {при 200 выстрелах мишень будет поражена не менее 135 раз}.

Данные события могут быть представлены в следующей эквивалентной форме:

$B = \{140 \le \mu \le 160\}$;

$C = \{\mu \le 150\} = \{0 \le \mu \le 150\}$;

$D = \{\mu \ge 135\} = \{135 \le \mu \le 200\}$,

где μ – число успехов (поражений мишени) при 200 выстрелах.

Шаг 3. Исходя из содержания интересующих событий B, C и D разумно определить «успех» для каждого из указанных испытаний Бернулли следующим образом: A = {мишень поражена}.

Шаг 4. Из условия задачи следует, что $p = \mathrm{P}(A) = 0.75$, а значит $q = 0.25$.

Шаг 5. Поскольку $n = 200$ достаточно велико и $npq = 200 \cdot 0.75 \cdot 0.25 = 37.5 \ge 20$, то применяем интегральную формулу Муавра-Лапласа (23).

а) Вначале по формулам (24) находим

$$x_1 = \frac{140 - 200 \cdot 0.75}{\sqrt{200 \cdot 0.75 \cdot 0.25}} \approx -1.633\,;\;\; x_2 = \frac{160 - 200 \cdot 0.75}{\sqrt{200 \cdot 0.75 \cdot 0.25}} \approx 1.633\,.$$

Отсюда по формуле (23) получим

$$\mathrm{P}(B) = \mathrm{P}\{140 \le \mu \le 160\} \approx \Phi(1.633) - \Phi(-1.633) = |\,\textit{свойство}: \; \Phi(-x) = 1 - \Phi(x)\,| = \Phi(1.633) - \big(1 - \Phi(1.633)\big) = 2 \cdot \Phi(1.633) - 1 \approx |\,\textit{таблица } 3\,| \approx 2 \cdot 0.94845 - 1 = 0.8969.$$

б) Вначале по формулам (24) находим

$$x_1 = \frac{0 - 200 \cdot 0.75}{\sqrt{200 \cdot 0.75 \cdot 0.25}} \approx -24.5\,;\;\; x_2 = \frac{150 - 200 \cdot 0.75}{\sqrt{200 \cdot 0.75 \cdot 0.25}} = 0\,.$$

Отсюда по формуле (23) получим

$$\mathrm{P}(C) = \mathrm{P}\{0 \le \mu \le 150\} \approx \Phi(0) - \Phi(-24.5) = |\,\textit{свойство}: \; \Phi(-x) = 1 - \Phi(x)\,| = \Phi(0) - \big(1 - \Phi(24.5)\big) \approx |\,\textit{т.к. } 24.5 \ge 4.05, \; \textit{то} \; \Phi(24.5) \approx 1\,| \approx \Phi(0) - (1 - 1) \approx |\,\textit{таблица } 3\,| \approx 0.5\,.$$

в) Вначале по формулам (24) находим

$$x_1 = \frac{135 - 200 \cdot 0.75}{\sqrt{200 \cdot 0.75 \cdot 0.25}} \approx -2.45\,;\;\; x_2 = \frac{200 - 200 \cdot 0.75}{\sqrt{200 \cdot 0.75 \cdot 0.25}} \approx 8.16\,.$$

Отсюда по формуле (23) получим

$\mathrm{P}(D)=\mathrm{P}\{135\le\mu\le 200\}\approx\Phi(8.16)-\Phi(-2.45)\approx|\,т.к.\ 8.16\ge 4.05,$ *то* $\Phi(8.16)\approx 1\,|\approx 1-\Phi(-2.45)=|$ *свойство:* $\Phi(-x)=1-\Phi(x)\,|=$
$=1-(1-\Phi(2.45))=\Phi(2.45)\approx|$ *таблица* $3\,|\approx 0.99286$.

Задачи

218. Вероятность того, что любой абонент позвонит на коммутатор в течение часа, равна 0.01. Телефонная станция обслуживает 800 абонентов. Какова вероятность, что в течение часа позвонят 5 абонентов?

219. Рыбак забросил спиннинг 100 раз. Какова вероятность того, что он поймал хотя бы одну рыбу, если одна рыба приходится в среднем на 200 забрасываний?

220. В лотерее разыгрывается один выигрыш на каждые 20 билетов. Какова вероятность получить не менее трех выигрышей, имея 80 билетов?

221. При передаче сообщения вероятность искажения одного знака равна 0.01. В предположении независимости искажения знаков найти вероятность того, что сообщение из 600 знаков: а) не будет искажено; б) содержит не более трех искажений.

222. Известно, что процент брака для некоторой детали равен 0.5%. Контролер проверяет 1000 деталей. Какова вероятность того, что он обнаружит: а) ровно 3 бракованные детали; б) не менее трех бракованных деталей?

223. Завод отправил на базу 10000 стандартных изделий. Среднее число изделий, повреждаемых при транспортировке, составляет 0.02%. Найти вероятность того, что из 10000 изделий будет повреждено: а) 2; б) по крайней мере 2.

224. Известно, что вероятность выпуска сверла повышенной хрупкости (брак) равна 0.03. Сверла укладываются в коробки по 100 штук. Чему равна вероятность того, что: а) в коробке не окажется бракованных сверл; б) число бракованных сверл окажется не более 3; в) сколько нужно класть в коробку сверл, чтобы с вероятностью, не меньшей 0.9, в ней было не менее 100 исправных?

225. Вероятность рождения мальчика равна 0.515. Найти вероятность того, что среди 100 новорожденных мальчиков и девочек окажется поровну.

226. Найти вероятность того, что в серии из 200 подбрасываний монеты число выпавших «гербов» составит 98.

227. Найти вероятность того, что число выпадений 1 очка при 12000 подбрасываний игральной кости заключено между 1900 и 2150.

228. Страховая фирма заключила 10000 договоров. Вероятность страхового случая по каждому в течение года составляет 2%. Найти вероятность того, что таких случаев будет не более 250.

229. На научную конференцию приглашены 100 человек, причем каждый из них прибывает с вероятностью 0.7. В гостинице для гостей заказано 65 мест. Какова вероятность, что все прибывшие участники будут поселены в гостинице?

230*. На научную конференцию приглашены 100 человек, причем каждый из них прибывает с вероятностью 0.7. а) Сколько необходимо заказать мест, чтобы с вероятностью не менее 0.9 все прибывшие участники были размещены в гостинице? б) Сколько необходимо заказать мест, чтобы с вероятностью не менее 0.99 все прибывшие участники были размещены в гостинице?

231. В страховой компании 10000 клиентов. Страховой взнос каждого клиента составляет 300 руб. При наступлении страхового случая, вероятность которого по имеющимся данным и оценкам экспертов можно считать равной 0.005, страховая компания обязана выплатить клиенту страховую сумму размером 50 000 руб. Найти вероятность того, что общая сумма страховых выплат превысит общую сумму страховых взносов.

232. В страховом обществе застраховано 10 000 лиц одного возраста и одной социальной группы. Вероятность смерти в течение года для каждого лица равна 0.006. Каждый застрахованный вносит 1 января 1 200 руб. страховых и в случае смерти его родственники получают от общества 100 000 руб. Чему равна вероятность того, что: а) общество потерпит убытки; б) получит прибыль, не меньшую 4 000 000 руб.?

Приложение

Таблица 1. Значения функции $\dfrac{\lambda^m}{m!}e^{-\lambda}$

m \ λ	**0.1**	**0.2**	**0.3**	**0.4**	**0.5**	**0.6**	**0.7**	**0.8**	**0.9**
0	9048	8187	7408	6703	6065	5488	4966	4493	4066
1	0905	1637	2222	2681	3033	3293	3476	3595	3659
2	0045	0164	0333	0536	0758	0988	1217	1438	1647
3	0002	0011	0033	0072	0126	0198	0284	0383	0494
4		0001	0003	0007	0016	0030	0050	0077	0111
5				0001	0002	0004	0007	0012	0020
6							0001	0002	0003

m \ λ	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	**9**
0	3679	1353	0498	0183	0067	0025	0009	0003	0001
1	3679	2707	1494	0733	0337	0149	0064	0027	0011
2	1839	2707	2240	1465	0842	0446	0223	0107	0050
3	0613	1804	2240	1954	1404	0892	0521	0286	0150
4	0153	0902	1680	1954	1755	1339	0912	0573	0337
5	0031	0361	1008	1563	1755	1606	1277	0916	0607
6	0005	0120	0504	1042	1462	1606	1490	1221	0911
7	0001	0034	0216	0595	1044	1377	1490	1396	1171
8		0009	0081	0298	0653	1033	1304	1396	1318
9		0002	0027	0132	0363	0688	1014	1241	1318
10			0008	0053	0181	0413	0710	0993	1186
11			0002	0019	0082	0225	0452	0722	0970
12			0001	0006	0034	0113	0263	0481	0728
13				0002	0013	0052	0142	0296	0504

m \ λ	1	2	3	4	5	6	7	8	9
14				0001	0005	0022	0071	0169	0324
15					0002	0009	0033	0090	0194
16						0003	0014	0045	0109
17						0001	0006	0021	0058
18							0002	0009	0029
19							0001	0004	0014
20								0002	0006
21								0001	0003
22									0001

При использовании таблицы 1 необходимо к соответствующему табличному значению слева приписать запятую и перед ней поставить нуль. Например, пусть $\lambda = 0.5$, $m = 2$. Тогда

$$\left.\frac{\lambda^m}{m!}e^{-\lambda}\right|_{\substack{\lambda=0.5\\ m=2}} \approx 0.0758\,.$$

Таблица 2. Значения функции $\varphi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}$

x	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0.0	39894	39892	39886	39876	39862	39844	39822	39797	39767	39733
0.1	39695	39654	39608	39559	39505	39448	39387	39322	39253	39181
0.2	39104	39024	38940	38853	38762	38667	38568	38466	38361	38251
0.3	38139	38023	37903	37780	37654	37524	37391	37255	37115	36973
0.4	36827	36678	36526	36371	36213	36053	35889	35723	35553	35381
0.5	35207	35029	34849	34667	34482	34294	34105	33912	33718	33521
0.6	33322	33121	32918	32713	32506	32297	32086	31874	31659	31443
0.7	31225	31006	30785	30563	30339	30114	29887	29659	29431	29200
0.8	28969	28737	28504	28269	28034	27798	27562	27324	27086	26848
0.9	26609	26369	26129	25888	25647	25406	25164	24923	24681	24439
1.0	24197	23955	23713	23471	23230	22988	22747	22506	22265	22025
1.1	21785	21546	21307	21069	20831	20594	20357	20121	19886	19652
1.2	19419	19186	18954	18724	18494	18265	18037	17810	17585	17360
1.3	17137	16915	16694	16474	16256	16038	15822	15608	15395	15183
1.4	14973	14764	14556	14350	14146	13943	13742	13542	13344	13147
1.5	12952	12758	12566	12376	12188	12001	11816	11632	11450	11270
1.6	11092	10915	10741	10567	10396	10226	10059	09893	09728	09566
1.7	09405	09246	09089	08933	08780	08628	08478	08329	08183	08038
1.8	07895	07754	07614	07477	07341	07206	07074	06943	06814	06687
1.9	06562	06438	06316	06195	06077	05959	05844	05730	05618	05508
2.0	05399	05292	05186	05082	04980	04879	04780	04682	04586	04491
2.1	04398	04307	04217	04128	04041	03955	03871	03788	03706	03626
2.2	03547	03470	03394	03319	03246	03174	03103	03034	02965	02898
2.3	02833	02768	02705	02643	02582	02522	02463	02406	02349	02294
2.4	02239	02186	02134	02083	02033	01984	01936	01888	01842	01797

x	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
2.5	01753	01709	01667	01625	01585	01545	01506	01468	01431	01394
2.6	01358	01323	01289	01256	01223	01191	01160	01130	01100	01071
2.7	01042	01014	00987	00961	00935	00909	00885	00861	00837	00814
2.8	00792	00770	00748	00727	00707	00687	00668	00649	00631	00613
2.9	00595	00578	00562	00545	00530	00514	00499	00485	00470	00457
3.0	00443	00430	00417	00405	00393	00381	00370	00358	00348	00337
3.1	00327	00317	00307	00298	00288	00279	00271	00262	00254	00246
3.2	00238	00231	00224	00216	00210	00203	00196	00190	00184	00178
3.3	00172	00167	00161	00156	00151	00146	00141	00136	00132	00127
3.4	00123	00119	00115	00111	00107	00104	00100	00097	00094	00090
3.5	00087	00084	00081	00079	00076	00073	00071	00068	00066	00063
3.6	00061	00059	00057	00055	00053	00051	00049	00047	00046	00044
3.7	00042	00041	00039	00038	00037	00035	00034	00033	00031	00030
3.8	00029	00028	00027	00026	00025	00024	00023	00022	00021	00021
3.9	00020	00019	00018	00018	00017	00016	00016	00015	00014	00014
4.0	00013	00013	00012	00012	00011	00011	00011	00010	00010	00009

Замечание. Функция $\varphi(x)$ – четная. Если $x \geq 4.1$, то $\varphi(x) \approx 0$.

При использовании таблицы 2 необходимо округлить данное значение x до сотых, а к соответствующему табличному значению слева приписать запятую и перед ней поставить нуль.

Примеры применения таблицы 2.

1. Пусть $x = 1.3681$. Тогда $\varphi(1.3681) \approx |$ округляем значение $x = 1.3681$ до сотых: $x \approx 1.37 | \approx \varphi(1.37) \approx |$ находим по таблице 2 $| \approx 0.15608$.

2. Пусть $x = -2.162$. Тогда $\varphi(-2.162) \approx |$ округляем значение $x = -2.162$ до сотых: $x \approx -2.16 | \approx \varphi(-2.16) = | \varphi(x)$ – четная функция $| = \varphi(2.16) \approx |$ находим по таблице 2 $| \approx 0.03871$.

3. Пусть $x = 5.7833$. Так как $5.7833 \geq 4.1$, то $\varphi(5.7833) \approx 0$.

Таблица 3. Значения функции $\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{x} e^{-\frac{t^2}{2}} dt$

x	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0.0	50000	50399	50798	51197	51595	51994	52392	52790	53188	53586
0.1	53983	54380	54776	55172	55567	55962	56356	56749	57142	57535
0.2	57926	58317	58706	59095	59483	59871	60257	60642	61026	61409
0.3	61791	62172	62552	62930	63307	63683	64058	64431	64803	65173
0.4	65542	65910	66276	66640	67003	67364	67724	68082	68439	68793
0.5	69146	69497	69847	70194	70540	70884	71226	71566	71904	72240
0.6	72575	72907	73237	73565	73891	74215	74537	74857	75175	75490
0.7	75804	76115	76424	76730	77035	77337	77637	77935	78230	78524
0.8	78814	79103	79389	79673	79955	80234	80511	80785	81057	81327
0.9	81594	81859	82121	82381	82639	82894	83147	83398	83646	83891
1.0	84134	84375	84614	84849	85083	85314	85543	85769	85993	86214
1.1	86433	86650	86864	87076	87286	87493	87698	87900	88100	88298
1.2	88493	88686	88877	89065	89251	89435	89617	89796	89973	90147
1.3	90320	90490	90658	90824	90988	91149	91309	91466	91621	91774
1.4	91924	92073	92220	92364	92507	92647	92785	92922	93056	93189
1.5	93319	93448	93574	93699	93822	93943	94062	94179	94295	94408
1.6	94520	94630	94738	94845	94950	95053	95154	95254	95352	95449
1.7	95543	95637	95728	95818	95907	95994	96080	96164	96246	96327
1.8	96407	96485	96562	96638	96712	96784	96856	96926	96995	97062
1.9	97128	97193	97257	97320	97381	97441	97500	97558	97615	97670
2.0	97725	97778	97831	97882	97932	97982	98030	98077	98124	98169
2.1	98214	98257	98300	98341	98382	98422	98461	98500	98537	98574
2.2	98610	98645	98679	98713	98745	98778	98809	98840	98870	98899
2.3	98928	98956	98983	99010	99036	99061	99086	99111	99134	99158
2.4	99180	99202	99224	99245	99266	99286	99305	99324	99343	99361

x	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
2.5	99379	99396	99413	99430	99446	99461	99477	99492	99506	99520
2.6	99534	99547	99560	99573	99585	99598	99609	99621	99632	99643
2.7	99653	99664	99674	99683	99693	99702	99711	99720	99728	99736
2.8	99744	99752	99760	99767	99774	99781	99788	99795	99801	99807
2.9	99813	99819	99825	99831	99836	99841	99846	99851	99856	99861
3.0	99865	99869	99874	99878	99882	99886	99889	99893	99896	99900
3.1	99903	99906	99910	99913	99916	99918	99921	99924	99926	99929
3.2	99931	99934	99936	99938	99940	99942	99944	99946	99948	99950
3.3	99952	99953	99955	99957	99958	99960	99961	99962	99964	99965
3.4	99966	99968	99969	99970	99971	99972	99973	99974	99975	99976
3.5	99977	99978	99978	99979	99980	99981	99981	99982	99983	99983
3.6	99984	99985	99985	99986	99986	99987	99987	99988	99988	99989
3.7	99989	99990	99990	99990	99991	99991	99992	99992	99992	99992
3.8	99993	99993	99993	99994	99994	99994	99994	99995	99995	99995
3.9	99995	99995	99996	99996	99996	99996	99996	99996	99997	99997
4.0	99997	99997	99997	99997	99997	99997	99998	99998	99998	99998

Замечание. $\Phi(-x) = 1 - \Phi(x)$. Если $x \geq 4.1$, то $\Phi(x) \approx 1$.

При использовании таблицы 3 необходимо округлить данное значение x до сотых, а к соответствующему табличному значению слева приписать запятую и перед ней поставить нуль.

Примеры применения таблицы 3.

1. Пусть $x = 1.3681$. Тогда $\Phi(1.3681) \approx$ | округляем значение $x = 1.3681$ до сотых: $x \approx 1.37$ | $\approx \Phi(1.37) \approx$ | находим по таблице 3 | ≈ 0.91466.

2. Пусть $x = -2.162$. Тогда $\Phi(-2.162) \approx$ | округляем значение $x = -2.162$ до сотых: $x \approx -2.16$ | $\approx \Phi(-2.16) =$ | т.к. $\Phi(-x) = 1 - \Phi(x)$ | $= 1 - \Phi(2.16) \approx$ | находим по таблице 3 | $\approx 1 - 0.98461 = 0.01539$.

3. Пусть $x = 5.7833$. Так как $5.7833 \geq 4.1$, то $\Phi(5.7833) \approx 1$.

4. Пусть $x = -4.2345$. Тогда $\Phi(-4.2345) =$ | т.к. $\Phi(-x) = 1 - \Phi(x)$ | $= 1 - \Phi(4.2345) \approx$ | т.к. $4.2345 \geq 4.1$, то $\Phi(4.2345) \approx 1$ | $\approx 1 - 1 = 0$.

Ответы к задачам

1.

a) {ГГГ, ГГР, ГРГ, ГРР, РГГ, РГР, РРГ, РРР};

b) {ГГГГ, ГГГР, ГГРГ, ГГРР, ГРГГ, ГРГР, ГРРГ, ГРРР, РГГГ, РГГР, РГРГ, РГРР, РРГГ, РРГР, РРРГ, РРРР};

c) {Г, РГ, РРГ, РРРГ, РРРР};

d)

1 1	1 2	1 3	1 4	1 5	1 6
2 1	2 2	2 3	2 4	2 5	2 6
3 1	3 2	3 3	3 4	3 5	3 6
4 1	4 2	4 3	4 4	4 5	4 6
5 1	5 2	5 3	5 4	5 5	5 6
6 1	6 2	6 3	6 4	6 5	6 6

e) {Г 1, Г 2, Г 3, Г 4, Г 5, Г 6, Р 1, Р 2, Р 3, Р 4, Р 5, Р 6};

f) {Ч, Б, С};

g) {ЧБ, ЧС, БС};

h) {ЧЧ, ЧБ, ЧС, БЧ, ББ, БС, СЧ, СБ, СС};

i) {Б, ЧБ, СБ, ЧСБ, СЧБ};

j) {ББ, БЧ, БК, ЧБ, ЧЧ, ЧК, КБ, КЧ, КК};

k) {БББ, ББЧ, БЧБ, БЧЧ, ЧББ, ЧБЧ, ЧЧБ, ЧЧЧ};

l)

1 1	1 2	1 3	1 4	1 5
2 1	2 2	2 3	2 4	2 5
3 1	3 2	3 3	3 4	3 5
4 1	4 2	4 3	4 4	4 5

m) {$Б_1Б_2$, $Б_1Б_3$, $Б_1Ч_1$, $Б_1Ч_2$, $Б_1Ч_3$, $Б_2Б_3$, $Б_2Ч_1$, $Б_2Ч_2$, $Б_2Ч_3$, $Б_3Ч_1$, $Б_3Ч_2$, $Б_3Ч_3$, $Ч_1Ч_2$, $Ч_1Ч_3$, $Ч_2Ч_3$};

n)

2 2	2 3	2 4	2 5	2 6	2 7
3 2	3 3	3 4	3 5	3 6	3 7
4 2	4 3	4 4	4 5	4 6	4 7
5 2	5 3	5 4	5 5	5 6	5 7
6 2	6 3	6 4	6 5	6 6	6 7
7 2	7 3	7 4	7 5	7 6	7 7

o) {ССС, ССН, СНС, СНН, НСС, НСН, ННС, ННН};

p) {22, 23, 24, 25, 32, 33, 34, 35, 42, 43, 44, 45, 52, 53, 54, 55}.

2. $A - B = A;\ B - A = B;\ AB = \varnothing$. **3.** $A + B = B;\ AB = A;\ A - B = \varnothing$. **4.** a) извлечена деталь первого или третьего сорта; b) извлечена деталь третьего сорта. **5.** a) победитель награжден или призом, или денежной премией, или и тем и другим; b) победитель награжден одновременно и призом, и денежной премией, и медалью; c) победитель награжден призом и медалью, но без выдачи денежной премии. **6.** a) выпало менее 6 очков; b) выпало 3 или 5 очков; c) выпало 1 очко. **7.** a) появление хотя бы одного «герба»; b) появление двух «гербов»; c) появление «герба» на первой монете и «решки» – на второй. **8.** a), c) совместны; b) несовместны. **9.** a), c), d) совместны; b) несовместны. **10.** $\overline{A}$ = {выпадение хотя бы одной «решки»}; $\overline{B}$ = {появление черного или красного шара}; $\overline{C}$ = {менее трех попаданий}; $\overline{D}$ = {ни одного попадания}; $\overline{E}$ = {более двух попаданий}; $\overline{F}$ = {выигрыш второго игрока или ничья}; $\overline{G}$ = {появление карты не пиковой масти}; $\overline{H}$ = {появление «решки» на второй монете}. **11.** $B = A_1 A_2$; $C = \overline{A}_1 \overline{A}_2$; $D = A_1 + A_2 = A_1 A_2 + A_1 \overline{A}_2 + \overline{A}_1 A_2 = \Omega - \overline{A}_1 \overline{A}_2$; $E = A_1 \overline{A}_2 + \overline{A}_1 A_2$. **12.** $B = A_1 + A_2 = A_1 A_2 + A_1 \overline{A}_2 + \overline{A}_1 A_2 = \Omega - \overline{A}_1 \overline{A}_2$; $C = \overline{A}_1 \overline{A}_2$; $D = A_1 \overline{A}_2 + \overline{A}_1 A_2$; $E = A_1 A_2$. **13.** $B = A_1 A_2 A_3$; $C = A_1 A_2 A_3 + \overline{A}_1 \overline{A}_2 \overline{A}_3$; $D = A_1 \overline{A}_2 \overline{A}_3 + \overline{A}_1 A_2 \overline{A}_3 + \overline{A}_1 \overline{A}_2 A_3$; $E = A_1 \overline{A}_2 \overline{A}_3 + \overline{A}_1 A_2 \overline{A}_3 + \overline{A}_1 \overline{A}_2 A_3 + A_1 A_2 \overline{A}_3 + A_1 \overline{A}_2 A_3 + \overline{A}_1 A_2 A_3 + A_1 A_2 A_3 = A_1 + A_2 + A_3 = \Omega - \overline{A}_1 \overline{A}_2 \overline{A}_3$. **14.** $B = A_1 \overline{A}_2 \overline{A}_3 + \overline{A}_1 A_2 \overline{A}_3 + \overline{A}_1 \overline{A}_2 A_3$; $C = \overline{A}_1 \overline{A}_2 \overline{A}_3$; $D = A_1 \overline{A}_2 \overline{A}_3 + \overline{A}_1 A_2 \overline{A}_3 + \overline{A}_1 \overline{A}_2 A_3 + A_1 A_2 \overline{A}_3 + A_1 \overline{A}_2 A_3 + \overline{A}_1 A_2 A_3 + A_1 A_2 A_3 = A_1 + A_2 + A_3 = \Omega - \overline{A}_1 \overline{A}_2 \overline{A}_3$; $E = \overline{A}_1 A_2 + \overline{A}_1 \overline{A}_2 A_3$. **15.** $B = A_1 A_2 A_3$; $C = A_1 \overline{A}_2 \overline{A}_3 + \overline{A}_1 A_2 \overline{A}_3 + \overline{A}_1 \overline{A}_2 A_3 + A_1 A_2 \overline{A}_3 + A_1 \overline{A}_2 A_3 + \overline{A}_1 A_2 A_3 + \overline{A}_1 \overline{A}_2 \overline{A}_3 = \overline{A}_1 + \overline{A}_2 + \overline{A}_3 = \Omega - A_1 A_2 A_3$; $D = A_1 A_2 \overline{A}_3 + A_1 \overline{A}_2 A_3 + \overline{A}_1 A_2 A_3$; $E = A_1 \overline{A}_2 \overline{A}_3 + \overline{A}_1 A_2 \overline{A}_3 + \overline{A}_1 \overline{A}_2 A_3 + A_1 A_2 \overline{A}_3 + A_1 \overline{A}_2 A_3 + \overline{A}_1 A_2 A_3 + A_1 A_2 A_3 = A_1 + A_2 + A_3 = \Omega - \overline{A}_1 \overline{A}_2 \overline{A}_3$; $F = A_1 \overline{A}_2 \overline{A}_3 + \overline{A}_1 A_2 \overline{A}_3 + \overline{A}_1 \overline{A}_2 A_3$. **16.** $B = \overline{A}_1 \overline{A}_2 \overline{A}_3 \overline{A}_4 A_5$; $C = A_1 + \overline{A}_1 A_2 + \overline{A}_1 \overline{A}_2 A_3$. **17.** $B = A_1 \overline{A}_2 A_3 \overline{A}_4 \overline{A}_5 + \overline{A}_1 A_2 \overline{A}_3 A_4 A_5$; $C = A_1 A_2 + \overline{A}_1 \overline{A}_2 + A_1 \overline{A}_2 \overline{A}_3 + \overline{A}_1 A_2 A_3$. **18.** $B = A_{11} A_{12} A_{21} \overline{A}_{22} + A_{11} A_{12} \overline{A}_{21} A_{22} + A_{11} A_{12} \overline{A}_{21} \overline{A}_{22} + A_{11} \overline{A}_{12} \overline{A}_{21} \overline{A}_{22} + \overline{A}_{11} A_{12} \overline{A}_{21} \overline{A}_{22}$; $C = A_{11} A_{12} A_{21} A_{22} + \overline{A}_{11} A_{12} \overline{A}_{21} A_{22} +$

$+\overline{A}_{11}A_{12}A_{21}\overline{A}_{22}+A_{11}\overline{A}_{12}\overline{A}_{21}A_{22}+A_{11}\overline{A}_{12}A_{21}\overline{A}_{22}+\overline{A}_{11}\overline{A}_{12}\overline{A}_{21}\overline{A}_{22}$. **19.** $B=$ $=A_{11}A_{21}+\overline{A}_{11}A_{12}A_{21}+A_{11}\overline{A}_{21}A_{22}+\overline{A}_{11}A_{12}\overline{A}_{21}A_{22}$; $C=A_{11}\overline{A}_{21}\overline{A}_{22}+$ $+\overline{A}_{11}\overline{A}_{12}A_{21}+\overline{A}_{11}A_{12}\overline{A}_{21}\overline{A}_{22}+\overline{A}_{11}\overline{A}_{12}\overline{A}_{21}A_{22}$. **20.** 7 / 12. **21.** a) 3 / 10; b) 7 / 10. **22.** a) 1 / 2; b) 1 / 3; c) 1 / 3. **23.** 3 / 5. **24.** События равновероятны, т.к. P(A) = P(B) = 1 / 2. **25.** a) 1 / 4; b) 3 / 4; c) 1 / 4. **26.** a) 1 / 8; b) 3 / 8; c) 7 / 8; d) 1 / 2; e) 1 / 2. **27.** a) 1 / 16; b) 15 / 16; c) 1 / 4; d) 5 / 16. **28.** a) 1 / 4; b) 1 / 2; c) 1 / 6; d) 1 / 12; e) 11 / 36; f) 5 / 18; g) 5 / 18; h) 11 / 36. **29.** a) 1 / 49; b) 13 / 49; c) 1 / 7; d) 6 / 7; e) 9 / 49; f) 45 / 49; g) 3 / 7. **30**. 0.4. **31.** a) 1 / 8; b) 1 / 4; c) 7 / 8; d) 1 / 2. **32.** a) 1 / 9; b) 1 / 3; c) 4 / 9; d) 5 / 9; e) 4 / 9. **33.** a) 1 / 4; b) 1 / 8; c) 3 / 8. **34.** a) 1 / 3; b) 1 / 9; c) 2 / 3; d) 4 / 9. **35.** a) 1 / 2; b) 1 / 2. **36.** 1 / P_5 = 1 / 120. **37**. 1 / 24. **38.** a) 1 / 7! = 1 / 5040; b) 2!3!2! / 10!; c) 2!3!2!2! / 10!; d) 3!2!2!2!2! / 16!; e) 3!2!3!2!2! / 17!; f) 2!3!2! / 10!. **39.** (3 + 3) P_2 / P_4 = 1 / 2. **40.** (6 + 6) P_4 / P_6 = 2 / 5. **41.** (5 + 5) P_4 / P_6 = = 1 / 3. **42.** (5 + 5) P_6 / P_8 = 5 / 28. **43.** (n + n) P_{n-2} / P_n = 2 / (n-1). **44.** (n – 1 + n – 1) P_{n-2} / P_n = 2 / n. **45.** C_7^2/C_{10}^2 = 7 / 15. **46**. C_5^3/C_{12}^3 = 1 / 22. **47.** a) $C_{90}^4/C_{100}^4\approx 0.65$; b) $C_{10}^4/C_{100}^4\approx 0.000054$. **48.** C_{20}^3/C_{25}^3 = 57 / 115. **49**. 24 / 91. **50**. a) $C_4^1C_{32}^2/C_{36}^3$ = 496 / 1785; b) $1-C_{32}^3/C_{36}^3$ = 109 / 357. **51.** $C_5^1C_7^1/C_{12}^2$ = 35 / 66. **52.** $C_3^2C_4^2/C_7^4$ = 18 / 35. **53.** $C_2^1C_8^4/C_{10}^5$ = 5 / 9. **54.** $C_8^5C_{12}^4/C_{20}^9\approx 0.17$. **55.** $C_7^4C_3^2/C_{10}^6$ = 1 / 2. **56.** $C_4^3C_2^2C_2^1/C_{10}^6$ = 4 / 105. **57.** $\left(C_4^3+C_6^3\right)/C_{10}^3$ = 24 / 120. **58.** Более вероятно событие B, т.к. P(A) = $\left(C_3^2+C_4^2\right)/C_7^2$ = 3 / 7; P(B) = $C_3^1C_4^1/C_7^2$ = 4 / 7. **59.** $\left(C_{16}^5+C_4^1C_{16}^4\right)/C_{20}^5$ = 728 / 969. **60.** $1-\left(C_{10}^5+C_9^5\right)/C_{19}^5$ = 625 / 646. **61.** $1-C_{80}^3/C_{100}^3\approx 0.49$. **62.** a) C_7^4/C_{13}^4 = 7 / 143; b) $\left(C_7^4+C_6^4\right)/C_{13}^4$ = 10 / 143; c) $C_7^2C_6^2/C_{13}^4$ = 63 / 143; d) $\left(C_7^3C_6^1+C_7^4\right)/C_{13}^4$ = 49 / 143; e) 1 – C_6^4/C_{13}^4 = 700 / 715. **63.** $C_1^1C_{99}^9/C_{100}^{10}$ = 1 / 10. **64**. $C_{18}^9C_{18}^9/C_{36}^{18}$. **65.** $C_2^1C_{14}^7/C_{16}^8$ = 8 / 15. **66.** $C_4^2C_{96}^{48}/C_{100}^{50}\approx 0.38$. **67.** $1/A_{10}^3$ = 1 / 720. **68.** $1/A_5^3$ = 1 / 60. **69**. 1 / 840. **70.** $1/A_7^3$ = 1 / 720. **71.** $1/A_7^3$ = 1 / 210. **72**. $A_{35}^3/A_{36}^4=1/36$. **73**. $A_3^2/A_4^3=0.25$. **74**. $3A_4^2/A_5^3=0.6$. **75**. 2·3 / A_5^2 = 0.3.

76. $2A_4^2 / A_5^3 = 0.4$. **77**. a) $A_4^2 / A_5^3 = 0.2$; b) $(A_4^2 + 4A_3^2) / A_5^3 =$ $= A_4^2 \cdot 3 / A_5^3 = 3/5$. **78**. $A_5^2 A_3^2 / A_8^4 = 1/14$. **79.** 0.45. **80.** 2 / 3. **81.** 1 / 6. **82.** 1 / 3. **83**. a) 0.1; b) 0.35; c) 0.05. **84**. r^2 / R^2. **85.** $2/\pi$. **86.** $3\sqrt{3}/4\pi$. **87**. 2 / 9. **88**. 23 / 32. **89**. (1 + ln6) / 6. **90.** 8 / 9. **91.** 4 / 9. **92**. 1 / 12. **93.** 0.88. **94.** 21 / 35. **95.** 1 / 4. **96.** $2l/a\pi$. **97.** 5 / 7. **98.** 1 / 9. **99.** 8 / 35. **100.** 9 / 14. **101.** a) 47 / 50; b) 19 / 20; c) 14 / 15. **102.** 1 / 2. **103.** 1 / 2. **104.** 1 / 3. **105**. 5 / 18. **106.** a), c), d) зависимы; b) независимы. **107.** a), c) зависимы; b) независимы. **108.** зависимы. **109.** зависимы. **110.** a) зависимы; b) независимы. **111.** 0.7. **112.** a) 0.7; b) 0.1. **113.** 0.81. **114**. 25 / 49. **115.** 0.125. **116.** 15 / 56. **117.** 7 / 30. **118.** a) 0.81; b) 0.99; c) 0.18. **119**. 0.9999. **120.** $C_6^3 C_3^3 / C_9^3 C_9^3 \approx 0.003$. **121.** 0.88. **122.** 0.936. **123.** 111 / 225. **124.** 5 / 9. **125.** 0.38. **126.** 0.32. **127.** a) 0.16; b) 0.96. **128.** 0.36. **129**. 0.954. **130.** Вероятнее победа общества А (т.к. 0.544 > 0.456). **131.** 1 / 8. **132.** 0.8736. **133.** 0.3808.

134. a) $\left(C_6^3 C_5^2 + C_4^3 C_7^2\right) / C_{10}^3 C_{12}^2 = 71/1980 \approx 0.04$;

b) $\left(C_6^3 C_7^2 + C_6^2 C_4^1 C_5^1 C_7^1 + C_6^1 C_4^2 C_5^2\right) / C_{10}^3 C_{12}^2 = 4/11$;

c) $1 - C_4^3 C_7^2 / C_{10}^3 C_{12}^2 = 653/660$. **135.** a) $\left(C_4^2 C_5^3 + C_5^2 C_8^3\right) / C_9^2 C_{13}^3 \approx 0.06$;

b) $\left(C_4^2 C_8^3 + C_5^1 C_4^1 C_5^1 C_8^2 + C_5^2 C_5^2 C_8^1\right) / C_9^2 C_{13}^3 \approx 0.38$;

c) $1 - C_5^2 C_8^3 / C_9^2 C_{13}^3 \approx 0.95$. **136**. a) 0.188; b) 0.788; c) 0.976. **137.** 2 / 5. **138.** 3 / 5. **139.** 0.65. **140.** a) 1 / 216; b) 1 / 36; c) 5 / 9. **141.** Не менее 5. **142.** 43 / 60. **143.** 0.0345. **144.** 23 / 40. **145.** 0.9236. **146.** a) 1 / 5; b) 1 / 5. **147**. 67 / 120. **148.** 7 / 12. **149.** 3 / 7. **150**. 3 / 8. **151.** 2 / 35. **152.** 19 / 35. **153.** 43 / 50. **154.** $(6C_3^2 + 5 \cdot 3 \cdot 2 + 4 \cdot 1) / (11C_5^2) = 26/55$.

155. $1/C_{10}^3 \cdot C_{11}^2/C_{13}^2 + C_3^2 C_7^1/C_{10}^3 \cdot C_{10}^2/C_{13}^2 + C_3^1 C_7^2/C_{10}^3 \cdot C_9^2/C_{13}^2 +$ $+ C_7^3/C_{10}^3 \cdot C_8^2/C_{13}^2 = 59/130$.

156. $\left(C_8^2 C_6^2 + 8 \cdot 5 \cdot C_7^2 + C_5^2 C_8^2\right) / \left(C_{13}^2 C_{13}^2\right) \approx 0.25$.

157. $\left(\left(C_4^2 + C_3^2\right) / C_7^2 + C_3^2 / C_4^2 + \left(C_2^2 + C_2^2\right) / C_4^2\right) / 3 = 53/126$.

158. $1 - \left(0.2 \cdot 0.2 \cdot C_3^2 + 0.4 \cdot 0.4 \cdot C_7^2 + 0.2 \cdot 0.4 \cdot C_3^1 \cdot C_7^1\right) / C_{10}^2 = 332/375$.

159. $0.3 \cdot 1 + 0.4 \cdot C_{16}^3 / C_{20}^3 + 0.2 \cdot C_{10}^3 / C_{20}^3 + 0.1 \cdot C_5^3 / C_{20}^3 = 591/1140$.

160. 1 / 2. **161.** $\left(1 + C_4^3 / C_5^3 + C_3^3 / C_5^3 + 0\right) / 4 = 3/8$. **162.** 0.458.

163. 0.063. **164.** $\left(0.8 \cdot 0.8 \cdot C_2^2 C_8^3 + 0.8 \cdot 0.9 \cdot C_2^1 C_8^4 + 0.9 \cdot 0.9 \cdot C_8^5\right) / C_{10}^5 =$ $= 13/18$. **165.** 10 / 27. **166.** a) 0.41; b) 0.59. **167**. 4 / 9. **168.** 0.44.

169. 2 / 3. **170.** 0.56. **171.** 5 / 11. **172.** 0.57. **173.** 3 / 31. **174.** Вероятнее всего он был произведен второй машиной (т.к. 0.41 > 0.36, 0.23). **175.** 9 / 26. **176.** a) 3 / 35; b) 4 / 35. **177.** a) 0.58; b) 0.002. **178.** 0.86. **179**. 1 / 11. **180.** a) 0.005; b) 0.17. **181.** Вероятнее всего была передана последовательность ВВВВ (т.к. 0.5 > 0.25). **182.** 0.0081. **183.** 0.054. **184**. 0.2787. **185.** а) 0.77; б) 0.02. **186**. а) 0.13; б) 0.54. **187.** 0.058. **188.** Вероятнее выиграть две партии из четырех, чем три из шести, т.к. $P_4(2) = 6 / 16 > P_6(3) = 5 / 16$. **189.** Вероятнее выиграть не менее трех партий из пяти (соответствующая вероятность приблизительно равна 0.163), чем не менее четырех партий из семи (соответствующая вероятность приблизительно равна 0.126). **190.** а) Вероятнее выиграть три партии из четырех, чем пять из восьми, т.к. $P_4(3) = 1 / 4 > P_8(5) = 7 / 32$. б) Вероятнее выиграть не менее пяти партий из восьми (соответствующая вероятность равна 93 / 256), чем не менее трех партий из четырех (соответствующая вероятность равна 5 / 16). **191.** а) 0.302; б) 0.436; в) 0.738; г) 0.564. **192.** а) 0.3125; б) 0.8125. **193.** а) 0.2916; б) 0.0523. **194.** а) 7 / 64; б) 57 / 64; в) 50 / 64. **195.** $P(B) \approx 0.098$; $P(C) = 0.1792$; $P(D) \approx 0.88$. **196.** 0.8208. **197.** 0.0004. **198.** 0.37. **199.** 0.544. **200**. 0.52. **201**. 0.49. **202**. Необходимо бросить пару игральных костей более 24 раз. **203.** а) Необходимо подбросить игральную кость более шести раз; б) необходимо подбросить игральную кость более двенадцати раз. **204.** 0.048. **205.** 0.25. **206**. $C_{2n-r}^{n}\big/2^{2n-r}$. **207.** 0.4096. **208.** Не менее пяти коробок. **209.** Не менее пяти раз. **210.** Не менее 299 билетов. **211.** $m_0 = 2$ или $m_0 = 3$, $P_n(m_0) = 0.25$. **212.** 12 или 13. **213.** 291. **214**. 2. **215.** 2. **216.** Необходимо подбросить монету 5, 6 или 7 раз. **217.** 21. **218.** 0.0916. **219.** 0.3935. **220**. 0.7619. **221.** а) 0.0025; б) 0.1512. **222.** а) 0.1404; б) 0.8754. **223.** а) 0.2707; б) 0.594. **224**. а) 0.0498; б) 0.6472; в) не менее 105 сверл. **225.** 0.076. **226**. 0.054. **227.** 0.99. **228.** 0.99982. **229.** 0.138. **230.** а) Необходимо заказать не менее 76 мест; б) необходимо заказать не менее 81 места. **231.** 0.05938. **232**. а) 0; б) 0.9952.

Литература

1. Теория вероятностей: учебник для вузов / Е.С. Вентцель. – 8-е изд., стер. – М.: Высш. шк., 2002. – 575 с.: ил.
2. Вентцель Е.С., Овчаров Л.А. Задачи и упражнения по теории вероятностей. – Учеб. пособие для втузов. – 3-е изд., стер. – М.: Высш. шк., 2000. – 366 с.: ил.
3. Чистяков В.П. Курс теории вероятностей. – 4-е изд. – М.: Агар, 1996. – 256 с.
4. Гмурман В.Е. Теория вероятностей и математическая статистика: учеб. пособие. – 13-е изд., перераб. – М.: Высшее образование, 2006. – 575 с.: ил. (Основы наук).
5. Гмурман В.Е. Руководство к решению задач по теории вероятностей и математической статистике: Учеб. пособие – 11-е изд., перераб. – М.: Высшее образование, 2006. – 404 с. (Основы наук).
6. Агапов Г.И. Задачник по теории вероятностей: Учеб. пособие для студентов втузов. – М.: Высш. шк., 1986. – 80 с.: ил.
7. Гусак А.А., Бричикова Е.А. Теория вероятностей. Справочное пособие к решению задач. – 2-е изд., стер. – Мн.: ТетраСистемс, 2000. – 288 с.
8. Кремер Н.Ш. Теория вероятностей и математическая статистика: Учебник для вузов. – 2-е изд., перераб. и доп. – М.: ЮНИТИ-ДАНА, 2006. – 573 с.
9. Фадеева Л.Н., Жуков Ю.В., Лебедев А.В. Математика для экономистов: Теория вероятностей и математическая статистика. Задачи и упражнения. – М.: Эксмо, 2007. – 336 с. (Высшее экономическое образование).
10. Колде Я.К. Практикум по теории вероятностей и математической статистике. – М.: Высш. шк., 1991. – 157 с.: ил.
11. Большакова Л. В. Теория вероятностей для экономистов. Учебное пособие по специальностям: "Бухгалтерский учет, анализ и аудит", "Финансы и кредит", "Налоги и налогообложение" и "Мировая экономика". – М.: Финансы и статистика, 2009. – 206 с.
12. Карлов А. М. Теория вероятностей и математическая статистика для экономистов. Учебное пособие для студентов по специальностям "Финансы и кредит", "Бухгалтерский учет, анализ и аудит". – М.: Кнорус, 2011. – 260 с.
13. Попов А. М., Попова А. М. Теория вероятностей и математическая статистика: высшая математика для экономистов: учебник для бакалавров (учебник для студентов высших учебных заведений, обучающихся по специальностям экономики и управления). – М.: Юрайт, 2011 – 440 с.

Содержание

Издание подготовлено в авторской редакции

Отпечатано на участке цифровой печати
Издательского Дома Томского государственного университета

Заказ № 1652 от «3» марта 2016 г. Тираж 200 экз.