

УДК 532.542.2

DOI 10.17223/19988621/39/8

Е.И. Борзенко, Е.И. Хегай

ЧИСЛЕННОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ СТАЦИОНАРНОГО ТЕЧЕНИЯ ЖИДКОСТИ БАЛКЛИ – ГЕРШЕЛЯ В КАНАЛЕ С ВНЕЗАПНЫМ РАСШИРЕНИЕМ¹

Исследуется установившееся течение неньютоновской жидкости в плоском канале с внезапным расширением. Реологическое поведение среды описывается моделью Балкли – Гершеля. Для нахождения стационарных полей скорости и давления используется численный алгоритм, в основе которого лежат метод установления и процедура SIMPLE. С целью ускорения расчета применяется технология параллельных вычислений MPI. Приводятся распределения основных характеристик потока с выделением зоны двумерного течения в области скачка сечения. Показано влияние основных параметров задачи на картину распределения квазитвердых ядер в потоке жидкости.

Ключевые слова: течение жидкости, канал с внезапным расширением, численное моделирование, модель Балкли – Гершеля, квазитвердые ядра.

Течения реологически сложной жидкости в каналах с различными геометрическими особенностями реализуются в технологических процессах во многих отраслях промышленности. В частности, течения в каналах с внезапным расширением или сужением широко распространены в технологии формования полимерных изделий на этапах транспортировки. Сложное реологическое поведение многих полимерных композиций сильно осложняет математическое моделирование их течений.

За последнее десятилетие было выполнено множество теоретических [1–8] и экспериментальных [9–13] исследований течений неньютоновских жидкостей в каналах различной геометрии. Авторами [1–3] численно решались задачи о течении вязкопластичных жидкостей в различных системах. Исследование течений ньютоновских, степенных, вязкопластичных и вязкоупругих жидкостей в каналах с внезапным сужением/расширением проводилось в работах [4–8]. Обзор экспериментальных данных по исследованиям жидкостей с пределом текучести приведен в [9].

В данном случае исследуется ламинарное стационарное течение жидкости Балкли – Гершеля в канале с внезапным расширением. Сформулированная задача решается численно с помощью алгоритма SIMPLE, при этом для обеспечения устойчивого расчета в областях малых скоростей деформаций используется регуляризация реологической модели.

Постановка задачи

Рассматривается установившееся ламинарное течение неньютоновской жидкости в плоском канале с внезапным расширением. Жидкость считается несжимае-

¹ Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект № 15-08-03935).

мой. Течение описывается системой, состоящей из уравнений движения и неразрывности, записанных в безразмерной форме

$$\text{Re} \left(\frac{\partial UU}{\partial x} + \frac{\partial VU}{\partial y} \right) = -\frac{\partial p}{\partial x} + B \left(\frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} \right) + 2 \frac{\partial B}{\partial x} \frac{\partial U}{\partial x} + \frac{\partial B}{\partial y} \left(\frac{\partial U}{\partial y} + \frac{\partial V}{\partial x} \right); \quad (1)$$

$$\text{Re} \left(\frac{\partial UV}{\partial x} + \frac{\partial VV}{\partial y} \right) = -\frac{\partial p}{\partial y} + B \left(\frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} \right) + 2 \frac{\partial B}{\partial y} \frac{\partial V}{\partial y} + \frac{\partial B}{\partial x} \left(\frac{\partial V}{\partial x} + \frac{\partial U}{\partial y} \right); \quad (2)$$

$$\frac{\partial U}{\partial x} + \frac{\partial V}{\partial y} = 0. \quad (3)$$

Реологические свойства жидкости подчиняются закону Балкли – Гершеля, согласно которому выражение для эффективной вязкости B определяется формулой [14]

$$B = \frac{\text{Se} + A^k}{A}, \quad A = \left[2 \left(\frac{\partial U}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial U}{\partial y} + \frac{\partial V}{\partial x} \right)^2 + 2 \left(\frac{\partial V}{\partial y} \right)^2 \right]^{\frac{1}{2}}. \quad (4)$$

Здесь: U и V – поперечная и продольная проекции вектора скорости \mathbf{u} на оси декартовой системы координат (x, y) , p – давление, k – степень нелинейности, A – безразмерная интенсивность тензора скоростей деформаций, $\text{Re} = \rho \frac{U_0^{2-k} l^k}{\mu}$ –

обобщенное число Рейнольдса, $\text{Se} = \frac{\tau_0 l^k}{\mu U_0^k}$ – безразмерный параметр вязкопла-

стичности, ρ – плотность жидкости, τ_0 – предел текучести, μ – константа реологического закона. В качестве масштабов длины, скорости и давления используются величины: l – полуширина входного сечения, U_0 – среднерасходная скорость во входном сечении, комплекс $\mu \left(\frac{U_0}{l} \right)^k$ соответственно.

Область течения схематично показана на рис. 1, отношение поперечных размеров входного и выходного каналов равняется 2. Жидкость подается через входное сечение Γ_2 с постоянным расходом, при этом профиль скорости совпадает с профилем, характерным для установившегося течения рассматриваемой жидкости в плоском бесконечном канале. В выходном сечении Γ_3 используются «мягкие» граничные условия для продольной скорости и равенство нулю поперечной скорости. На твердых границах Γ_4 выполняются условия прилипания, на плоскости симметрии – условия симметрии. Входная и выходная границы находятся на достаточном удалении от уступа во избежание влияния последнего на характер течения в окрестностях этих границ.

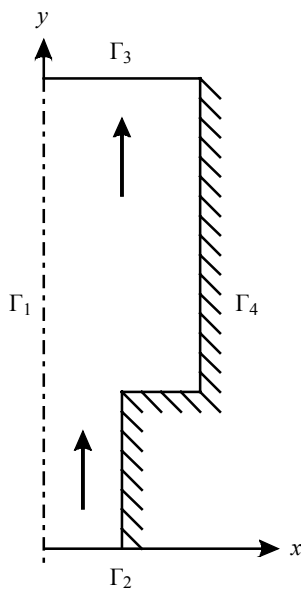


Рис. 1. Область течения

Согласно такой постановке задачи, граничные условия записываются в виде

$$\Gamma_1: \frac{\partial V}{\partial x} = 0, U = 0; \quad (5)$$

$$\Gamma_2: V = V_1(x), U = 0; \quad (6)$$

$$\Gamma_3: \frac{\partial V}{\partial y} = 0, U = 0; \quad (7)$$

$$\Gamma_4: V = 0, U = 0. \quad (8)$$

Профиль скорости во входном сечении $V_1(x)$ находится из решения одномерной задачи об установившемся течении жидкости Балкли – Гершеля в плоском бесконечном канале с заданным постоянным расходом и имеет вид

$$V_1(x) = \begin{cases} -\frac{1}{C} \frac{k}{k+1} (-C - Se)^{\frac{k+1}{k}} & \text{при } x \leq x_1; \\ \frac{1}{C} \frac{k}{k+1} \left[(-Cx - Se)^{\frac{k+1}{k}} - (-C - Se)^{\frac{k+1}{k}} \right] & \text{при } x > x_1, \end{cases} \quad (9)$$

где $x_1 = -Se / C$ – уравнение плоскости, разделяющей области квазитвердого и сдвигового течений; $C < 0$ находится из решения алгебраического уравнения

$$k(-C - Se)^{\frac{k+1}{k}} [k Se - (k+1)C] - C^2(k+1)(2k+1) = 0.$$

Распределения скорости во входном сечении для значений $Se = 0$ и $Se = 1$ в зависимости от степени нелинейности представлены на рис. 2.

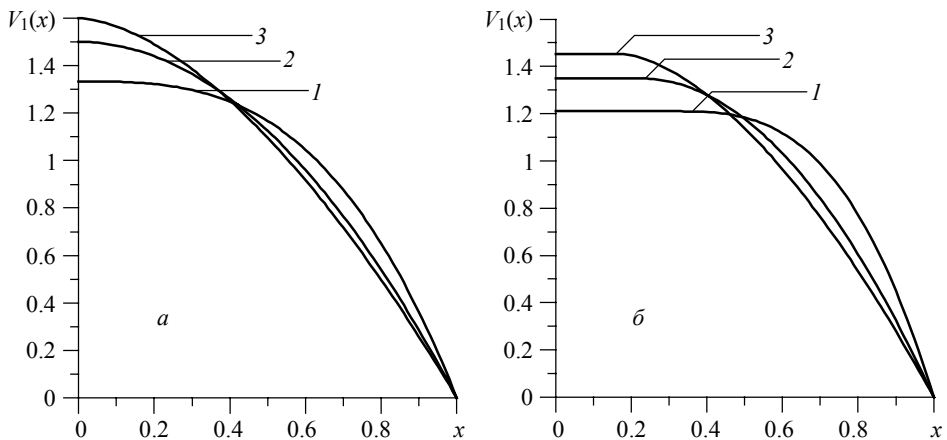


Рис. 2. Профили скорости $V_1(x)$ при $Se = 0$ (а) и $Se = 1$ (б).
 $1 - k = 0.5, 2 - k = 1, 3 - k = 1.5$

Таким образом, решение поставленной задачи сводится к отысканию стационарных полей скорости и давления, удовлетворяющих системе уравнений (1) – (4) и граничным условиям (5) – (9), а также линий тока, иллюстрирующих картину течения.

Метод решения

Задача решается численно с помощью конечно-разностного метода. Для нахождения стационарных полей скорости и давления в расчетных узлах разнесенной сетки используется метод установления [15], который подразумевает добавление производных искомых функций по времени в уравнения (1) и (2) соответственно, с последующей записью системы (1) – (4) в разностном виде и её решением с применением процедуры SIMPLE [16]. С целью ускорения расчета применяется технология параллельных вычислений MPI.

Рассматриваемая реологическая модель обладает особенностью «бесконечной» вязкости при стремлении к нулю второго инварианта тензора скоростей деформаций. С целью обеспечения сходимости методики расчета применяются различные способы регуляризации реологической модели [17]. Суть регуляризации состоит в том, что в реологический закон вводится малый параметр, который ограничивает рост вязкости в областях малых скоростей сдвига, слабо изменяя ее величину в остальной части потока, например:

1. $B = (Se + (A + \varepsilon)^k) / (A + \varepsilon)$ – простая регуляризация;

2. $B = (Se + (\sqrt{A^2 + \varepsilon^2})^k) / (\sqrt{A^2 + \varepsilon^2})$ – модель Беркавиер – Энглмэна (Bercovier – Engleman model).

Рис. 3 иллюстрирует влияние малого параметра на профиль вязкости, рассчитанный для случая установившегося течения жидкости в плоском бесконечном канале. Сплошная линия соответствует аналитическому решению, пунктирная – простая модель, штрих-пунктир – модель Беркавиер – Энглмэна. Предлагаемые модификации, допуская предельный переход при $\varepsilon \rightarrow 0$ к модели Балкли – Гершеля,

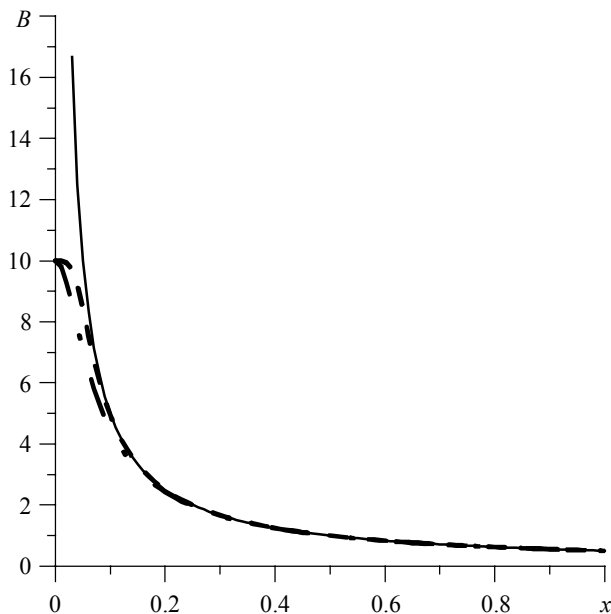


Рис. 3. Распределение вязкости при $Se = 0$, $k = 0.5$ и $\varepsilon = 10^{-2}$

обеспечивают возможность сквозного расчета течений с наличием квазитвердых ядер или застойных зон. Выбирая величину ε заведомо большей ошибок аппроксимации, но достаточно малой для того, чтобы не исказить характер течения, можно сгладить профили эффективной вязкости в областях малых скоростей деформаций и, в то же время, получить решения, близкие к решениям с использованием исходной модели. Параметрические исследования показали, что лучшую сходимость и скорость расчета обеспечивает модель Беркавиер – Энглмэна с использованием значения параметра $\varepsilon \sim 10^{-2}$. В качестве условия выделения зон квазитвердого движения вязкопластичных жидкостей используется неравенство $VA \leq Se$, которое является безразмерным аналогом условия $\tau \leq \tau_0$.

Решение рассматриваемой задачи подразумевает формирование профиля скорости в сечении Γ_3 , соответствующего решению одномерной задачи об установившемся течении жидкости в плоском бесконечном канале. В таблице представлены значения максимальной относительной ошибки рассчитанного профиля скорости в выходном сечении по сравнению с аналитическим решением для различных реологических параметров в зависимости от шага сетки h . Из таблицы видно, что наблюдается аппроксимационная сходимость численной методики. Все дальнейшие расчеты проводились на сетке с шагом $1/40$.

Максимальная ошибка по скорости в выходном сечении, %

h	1/10	1/20	1/40
$\Delta\varepsilon$ ($Se = 0, k = 0$) ньютоновская жидкость	0.18	0.12	0.11
$\Delta\varepsilon$ ($Se = 0, k = 0.8$) псевдопластичная жидкость	0.23	0.13	0.11
$\Delta\varepsilon$ ($Se = 1, k = 1$) вязкопластичная жидкость	39.86	7.44	2.85

Результаты

На рис. 4 показана типичная картина течения ньютоновской жидкости. Безразмерная вязкость в этом случае во всей области равна единице. По характеру распределения представленных характеристик поток можно условно разделить на три области: область одномерного движения вблизи входной границы, соответствующую течению в плоском бесконечном канале; область двумерного движения с образованием циркуляционной зоны в окрестности уступа; область одномерного движения в окрестности выходной границы. Длина области течений, представленных на рисунках, практически полностью охватывает двумерную зону, возмущенную за счет скачка сечения. Размеры этой зоны зависят от параметров задачи.

Расчеты показали, что при увеличении числа Рейнольдса продольный размер циркуляционной зоны L увеличивается (рис. 5), что объясняется усилением инерционных эффектов. При этом, как видно из графика на рис. 6, данная зависимость удовлетворительно аппроксимируется линейной функцией в рассматриваемом диапазоне изменения Re , как в случае ньютоновского поведения жидкости, так и в случае течения реологически сложной жидкости (псевдопластичной $k < 1$, дилатантной $k > 1$).

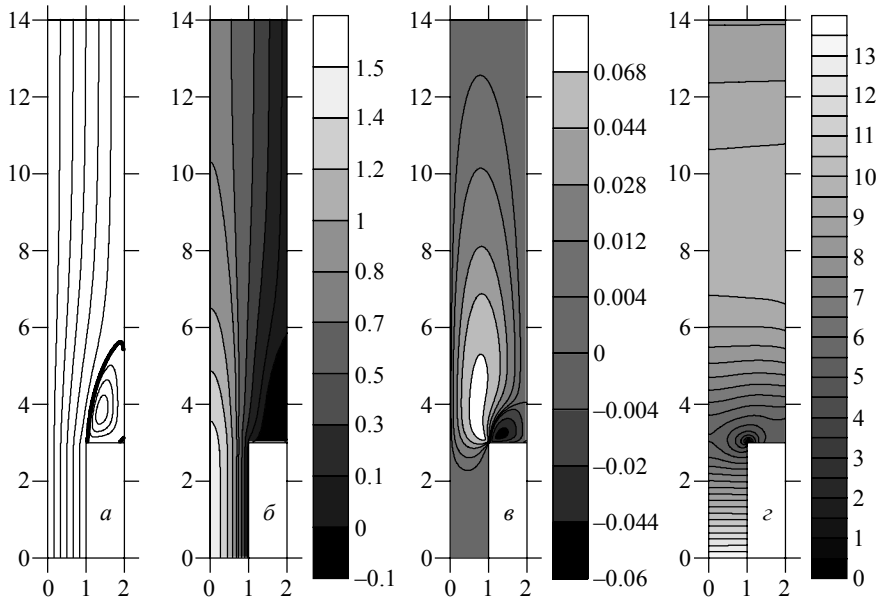


Рис. 4. Распределения характеристик течения при $Re = 20$, $k = 1$ и $Se = 0$: a – линии тока, b – поле продольной скорости, v – поле поперечной скорости, z – поле давления

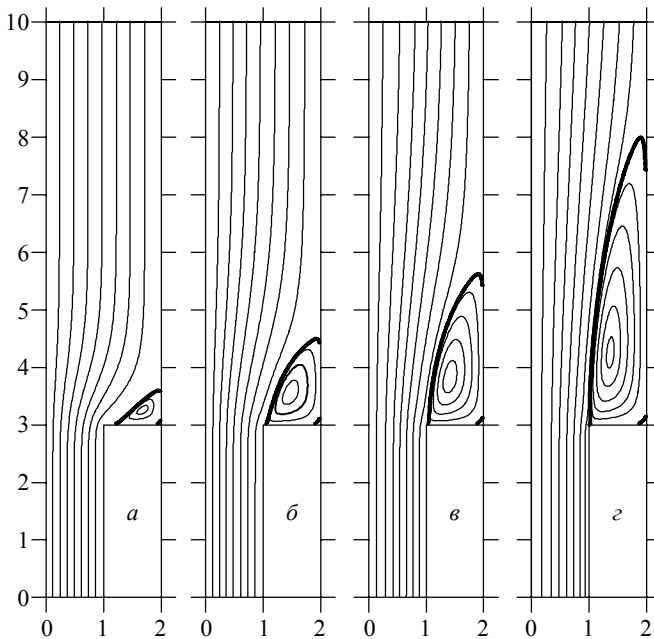


Рис. 5. Структура течения в окрестности циркуляционных зон при $Se = 0$ и $k = 1$: a – $Re = 1$, b – $Re = 10$, v – $Re = 20$, z – $Re = 40$

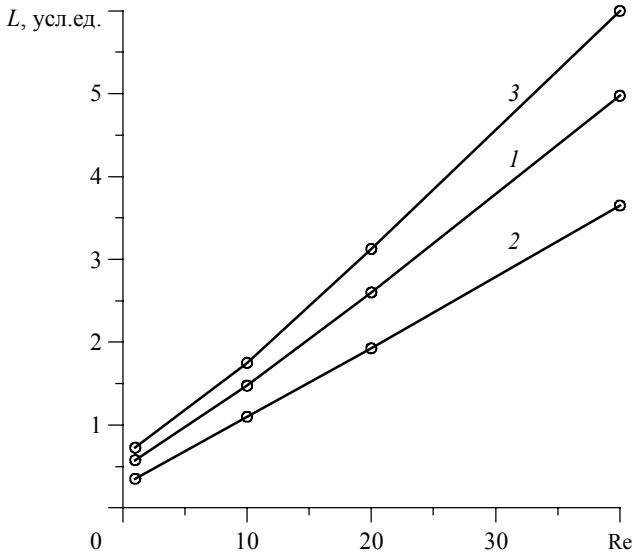


Рис. 6. Зависимость длины циркуляционной зоны от числа Рейнольдса при $Se = 1$: 1 – $k = 1$, 2 – $k = 0.6$, 3 – $k = 1.4$

На рис. 7 представлена картина течения для псевдопластичной жидкости, качественно совпадающая с таковой для ньютоновской жидкости. Видно, что в центре циркуляционной зоны и на плоскости симметрии (в областях одномерного течения) локализуются зоны повышенной вязкости. Кинематический характер течения качественно совпадает с ньютоновским случаем. Усиление псевдопластичных свойств приводит к росту интенсивности поперечного движения в области двумерного течения, наряду с ее увеличением.

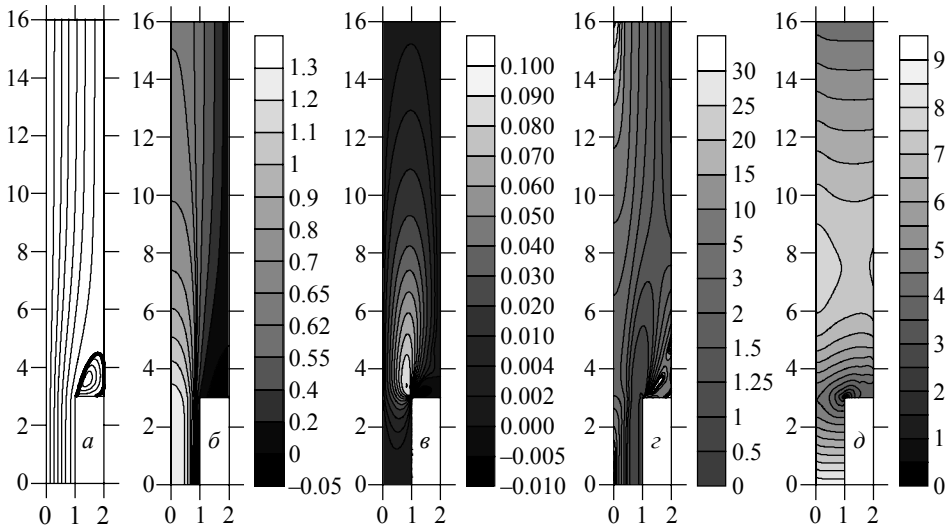


Рис. 7. Картина течения при $Re = 20$, $k = 0.4$ и $Se = 0$: а – линии тока, б – поле продольной скорости, в – поле поперечной скорости, г – поле вязкости, д – поле давления

Влияние степени нелинейности жидкости на структуру течения исследовалось в диапазоне значений $0.4 \leq k \leq 2$ и показано на рис. 8. На рис. 9 представлена аппроксимирующая кривая длины циркуляционной зоны L от степени нелинейности.

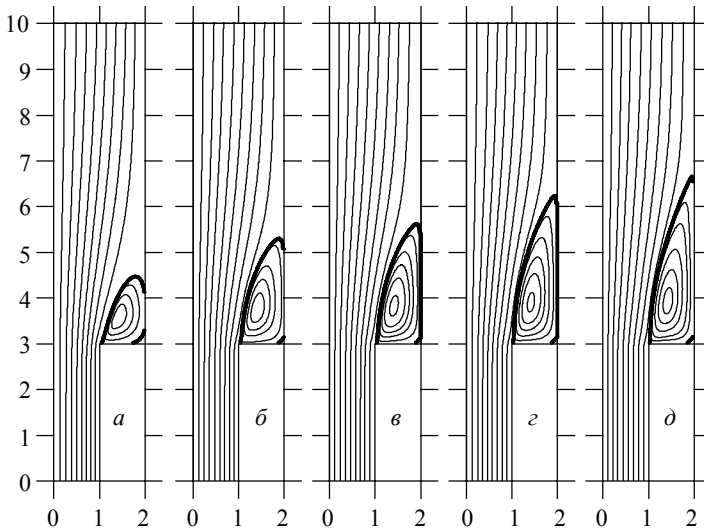


Рис. 8. Структура течения в области двумерного течения:
 $a - k = 0.4$, $б - k = 0.7$, $в - k = 1$, $г - k = 1.5$, $д - k = 2$

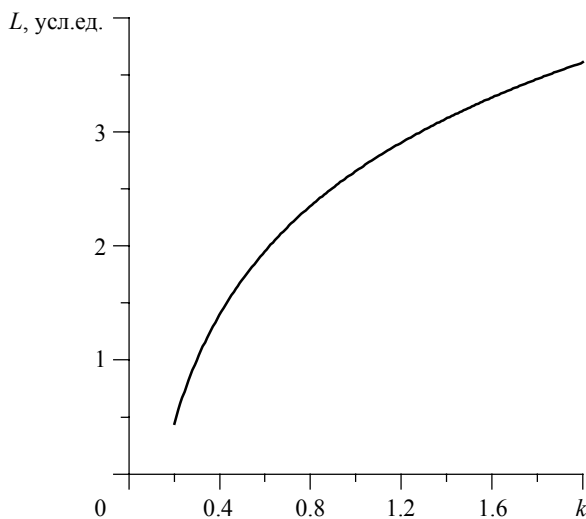


Рис. 9. Зависимость длины циркуляционной зоны от степени нелинейности при $Re = 20$ и $Se = 0$

На рис. 10 показаны распределения продольной скорости и вязкости в сечении канала, проходящем через центр циркуляционной зоны для различных степеней нелинейности. Для дилатантной жидкости с ростом k кинематика течения в об-

ласти двумерного течения меняется слабо. В случае течения псевдопластичной среды с уменьшением k в области расширения наблюдается значительный рост значений вязкости, наряду с уменьшением величины скорости. При $k = 0.4$ жидкость практически покоится. Зависимость длины циркуляционной зоны от k имеет нелинейный характер.

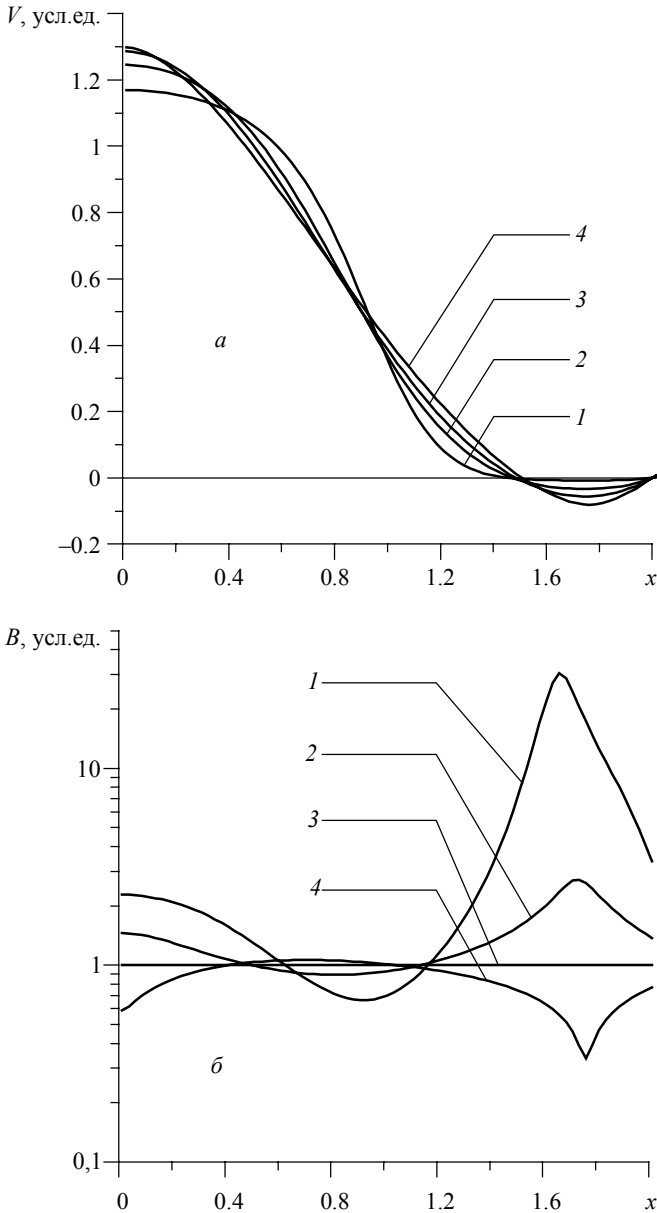


Рис. 10. Распределение скорости (а) и вязкости (б) в сечении, проходящем через центр циркуляционной зоны: 1 – $k = 0.4$, 2 – $k = 0.7$, 3 – $k = 1.0$, 4 – $k = 1.5$

Далее проводились исследования течений жидкости Шведова – Бингама, для которой характерно образование квазитвердых ядер в областях малых скоростей деформаций. На рис. 11 показаны квазитвердые ядра и линии тока для различных параметров вязкопластичности Se . Местоположение квазитвердых ядер соответствует разделению потока на зоны одномерного и двумерного течений. С увеличением Se наблюдаются формирование застойной зоны в окрестности скачка сечения и увеличение размеров квазитвердых ядер в областях одномерного течения, при этом продольные размеры зоны двумерного движения уменьшаются. При этом, начиная со значения $Se = 1$, дальнейшее его увеличение практически не влияет на размеры застойной зоны. Регуляризация реологической модели позволяет проводить расчеты без явного выделения границы ядер, что в данном случае приводит к формированию ненулевого поля скоростей в застойной зоне. Однако максимальное значение модуля скорости не превышает 0.002.

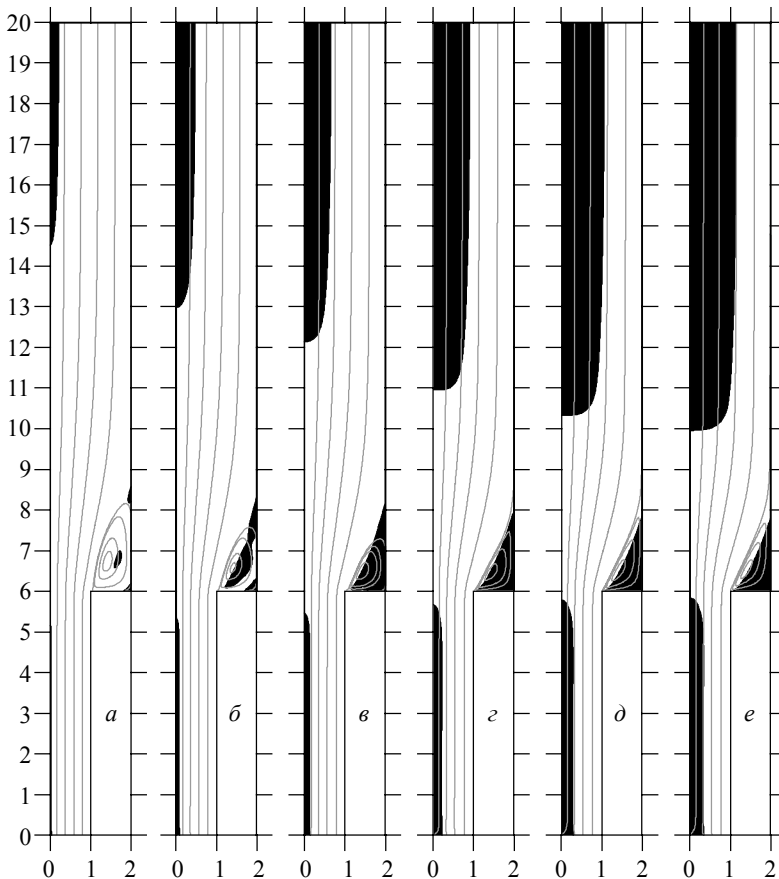


Рис. 11. Распределение линий тока и квазитвердых ядер при $Re = 20$ и $k = 1$:
 $a - Se = 0.1$, $b - Se = 0.3$, $в - Se = 0.5$, $г - Se = 1.0$, $д - Se = 1.5$, $e - Se = 2.0$

На рис. 12 показаны размеры и местоположение квазитвердых ядер для различных чисел Рейнольдса. Наблюдается увеличение зоны двумерного течения и продольных размеров застойной зоны при увеличении Re . Влияние параметра

нелинейности k в случае течения жидкости с пределом текучести показано на рис. 13.

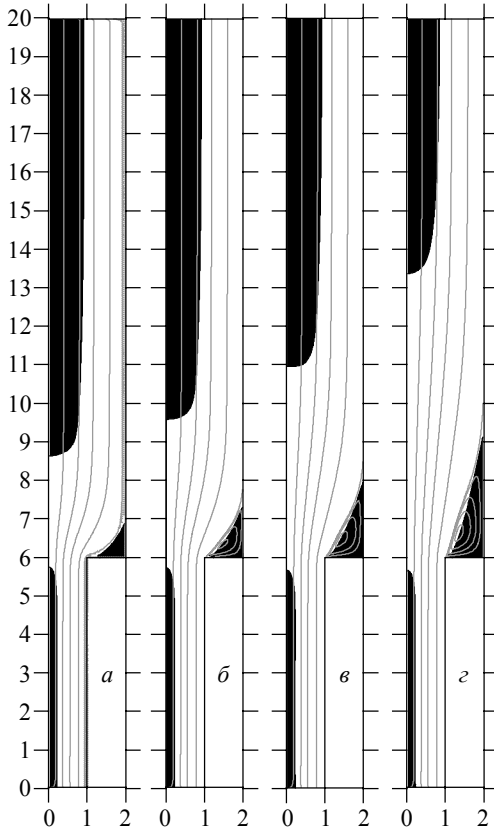


Рис. 12. Зависимость формы квазитвердых ядер от Re при $k = 1$ и $Se = 1$: $a - Re = 1$, $б - Re = 10$, $в - Re = 20$, $г - Re = 40$

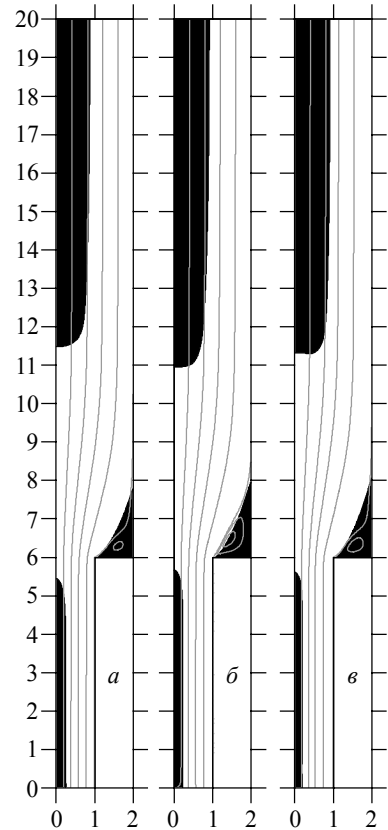


Рис. 13. Зависимость формы квазитвердых ядер от k при $Re = 20$ и $Se = 1$: $a - k = 0.8$, $б - k = 1$, $в - k = 1.2$

Заключение

Сформулирована математическая постановка задачи о стационарном течении неньютоновской жидкости в канале с внезапным расширением и предложена численная методика ее решения. Показано наличие в потоке трех зон: одномерного движения в окрестности входа; одномерного движения в окрестности выхода; двумерного движения в области скачка сечения, которое характеризуется наличием циркуляционной зоны. Продемонстрирована линейная зависимость продольных размеров последней в зависимости от числа Рейнольдса в диапазоне $1 \leq Re \leq 40$. В случае течения степенной жидкости зависимость $L(k)$ имеет нелинейный характер при изменении k в пределах от 0.4 до 2. Для течений жидкостей с пределом текучести показано наличие квазитвердых ядер вблизи плоскости симметрии в зонах одномерного движения и застойных участков в области скачка сечения. Исследовано влияние параметра вязкопластичности в диапазоне $0 \leq Se \leq 5$ на картину течения.

ЛИТЕРАТУРА

1. Patel S.A., Chhabra R.P. Steady flow of Bingham plastic fluids past an elliptical cylinder // Journal of Non-Newtonian Fluid Mechanics. 2013. No. 202. P. 32–53.
2. Ying-Hsin Wua, Ko-Fei Liu. Start-up flow of a Bingham fluid between two coaxial cylinders under a constant wall shear stress // J. Non-Newtonian Fluid Mechanics. 2015. No. 223. P. 116–121.
3. Yiolanda Damianou, Georgios C. Georgiou, Irene Moulitsas. Combined effects of compressibility and slip in flows of a Herschel – Bulkley fluid // J. Non-Newtonian Fluid Mechanics. 2013. No. 193. P. 89–102.
4. Ferrás L.L., Afonso A.M., Alves M.A., Nóbrega J.M., Carneiro O.S., Pinho F.T. Slip flows of Newtonian and viscoelastic fluids in a 4:1 contraction // J. Non-Newtonian Fluid Mechanics. 2014. No. 214. P. 28–37.
5. Fernanda B. Link, Sérgio Frey, Roney L. Thompson, Mônica F. Naccache, Paulo R. de Souza Mendes. Plane flow of thixotropic elasto-viscoplastic materials through a 1:4 sudden expansion // J. Non-Newtonian Fluid Mechanics. 2015. No. 220. P. 162–174.
6. Primož Ternik. Planar sudden symmetric expansion flows and bifurcation phenomena of purely viscous shear-thinning fluids // J. Non-Newtonian Fluid Mechanics. 2009. No. 157. P. 15–25.
7. Dhinakaran S., Oliveira M.S.N., Pinho F.T., Alves M.A. Steady flow of power-law fluids in a 1:3 planar sudden expansion // J. Non-Newtonian Fluid Mechanics. 2013. No. 198. P. 48–58.
8. Lober Hermany, Daniel Dall'Onder dos Santos, Sérgio Frey, Mônica F. Naccache, Paulo R. de Souza Mendes. Flow of yield-stress liquids through an axisymmetric abrupt expansion-contraction // J. Non-Newtonian Fluid Mechanics. 2013. No. 201. P. 1–9.
9. Coussot P. Yield stress fluid flows: A review of experimental data // J. Non-Newtonian Fluid Mechanics. 2014. No. 211. P. 31–49.
10. Pérez-Camacho M., López-Aguilar J.E., Calderas F., Manero O., Webster M.F. Pressure-drop and kinematics of viscoelastic flow through an axisymmetric contraction – expansion geometry with various contraction-ratios // J. Non-Newtonian Fluid Mechanics. 2015. No. 222. P. 260–271.
11. Stéphane Mossaz, Pascal Jay, Albert Magnin. Experimental study of stationary inertial flows of a yield-stress fluid around a cylinder // J. Non-Newtonian Fluid Mechanics. 2012. No. 189–190. P. 40–52.
12. Ovarlez G., Cohen-Addad S., Krishan K., Goyon J., Coussot P. On the existence of a simple yield stress fluid behavior // J. Non-Newtonian Fluid Mechanics. 2013. No. 193. P. 68–79.
13. Maillard M., Boujlel J., Coussot P. Flow characteristics around a plate withdrawn from a bath of yield stress fluid // J. Non-Newtonian Fluid Mechanics. 2015. No. 220. P. 33–43.
14. Смольский Б.М., Шульман З.П., Гориславец В.М. Реодинамика и теплообмен нелинейно-вязкопластичных материалов. Минск: Наука и техника, 1970.
15. Годунов С.К., Рябенкий В.С. Разностные схемы. М.: Наука, 1977. 440 с.
16. Патанкар С. Численные методы решения задач теплообмена и динамики жидкости. М.: Энергоатомиздат, 1984. 152 с.
17. Frigaard, C. Nouar. On the usage of viscosity regularisation methods for visco-plastic fluid flow computation // J. Non-Newtonian Fluid Mechanics. 2005. No. 127. P. 1–26.

Статья поступила 15.12.2015 г.

Borzenko E.I., Khagai E.I. NUMERICAL SIMULATION OF THE STEADY-STATE HERSHEY-BULKLEY FLUID FLOW IN A CHANNEL WITH SUDDEN EXPANSION

DOI 10.17223/19988621/39/8

In this paper, the steady-state flow of a non-Newtonian fluid in a planar channel with sudden expansion is investigated. The rheological behavior of this media is described by the Herschel – Bulkley model. To determine the static velocity and pressure fields, a numerical algorithm based on the relaxation method and SIMPLE procedure are used. The MPI technique of parallel pro-

gramming is used to accelerate the computation. Regularization of the rheological model is used to provide algorithm stability and limit viscosity increase at low deformation rates.

The mathematical problem statement involves non-dimensional parameters: the Reynolds number, Bingham number (non-dimensional viscoplasticity parameter), and power-law index. We report results of numerical simulation in a range of $1 \leq \text{Re} \leq 40$ for the Reynolds number, $0 \leq \text{Se} \leq 2$ for the Bingham number, and $0.4 \leq k \leq 2$ for the power-law index (shear thinning and shear thickening fluids).

Main characteristic distribution of the fluid flow with a two-dimensional localization in the expansion zone is presented. The impact of main parameters of the problem on the dead zone distribution in the fluid flow is shown.

Keywords: fluid flow, channel with sudden expansion, numerical simulation, Herschel–Bulkley model, dead zone.

HEGAJ Efim Igorevich (Student, Tomsk State University, Tomsk, Russian Federation)
E-mail: efim_h@ftf.tsu.ru

BORZENKO Evgeniy Ivanovich (Candidate of Physics and Mathematics, Assoc. Prof, Tomsk, Russian Federation)
E-mail: borzenko@ftf.tsu.ru

REFERENCES

1. Patel S.A., Chhabra R.P. Steady flow of Bingham plastic fluids past an elliptical cylinder. *Journal of Non-Newtonian Fluid Mechanics*, 2013, no. 202, pp. 32–53.
2. Ying-Hsin Wua, Ko-Fei Liu. Start-up flow of a Bingham fluid between two coaxial cylinders under a constant wall shear stress. *J. Non-Newtonian Fluid Mechanics*, 2015, no. 223, pp. 116–121.
3. Yiólanda Damianou, Georgios C. Georgiou, Irene Moulitsas. Combined effects of compressibility and slip in flows of a Herschel – Bulkley fluid. *J. Non-Newtonian Fluid Mechanics*, 2013, no. 193, pp. 89–102.
4. Ferrás L.L., Afonso A.M., Alves M.A., Nóbrega J.M., Carneiro O.S., Pinho F.T. Slip flows of Newtonian and viscoelastic fluids in a 4:1 contraction. *J. Non-Newtonian Fluid Mechanics*, 2014, no. 214, pp. 28–37.
5. Fernanda B. Link, Sérgio Frey, Roney L. Thompson, Mônica F. Naccache, Paulo R. de Souza Mendes. Plane flow of thixotropic elasto-viscoplastic materials through a 1:4 sudden expansion. *J. Non-Newtonian Fluid Mechanics*, 2015, no. 220, pp. 162–174.
6. Primož Ternik. Planar sudden symmetric expansion flows and bifurcation phenomena of purely viscous shear-thinning fluids. *J. Non-Newtonian Fluid Mechanics*, 2009, no. 157, pp. 15–25.
7. Dhinakaran S., Oliveira M.S.N., Pinho F.T., Alves M.A. Steady flow of power-law fluids in a 1:3 planar sudden expansion. *J. Non-Newtonian Fluid Mechanics*, 2013, no. 198, pp. 48–58.
8. Lober Hermany, Daniel Dall'Onder dos Santos, Sérgio Frey, Mônica F. Naccache, Paulo R. de Souza Mendes. Flow of yield-stress liquids through an axisymmetric abrupt expansion-contraction. *J. Non-Newtonian Fluid Mechanics*, 2013, no. 201, pp. 1–9.
9. Coussot P. Yield stress fluid flows: A review of experimental data. *J. Non-Newtonian Fluid Mechanics*, 2014, no. 211, pp. 31–49.
10. Pérez-Camacho M., López-Aguilar J.E., Calderas F., Manero O., Webster M.F. Pressure-drop and kinematics of viscoelastic flow through an axisymmetric contraction – expansion geometry with various contraction-ratios. *J. Non-Newtonian Fluid Mechanics*, 2015, no. 222, pp. 260–271.
11. Stéphane Mossaz, Pascal Jay, Albert Magnin. Experimental study of stationary inertial flows of a yield-stress fluid around a cylinder. *J. Non-Newtonian Fluid Mechanics*, 2012, no. 189–190, pp. 40–52.
12. Ovarlez G., Cohen-Addad S., Krishan K., Goyon J., Coussot P. On the existence of a simple yield stress fluid behavior. *J. Non-Newtonian Fluid Mechanics*, 2013, no. 193, pp. 68–79.

13. Maillard M., Boujlel J., Coussot P. Flow characteristics around a plate withdrawn from a bath of yield stress fluid. *J. Non-Newtonian Fluid Mechanics*, 2015, no. 220, pp. 33–43.
14. Smol'skiy B.M., Shul'man Z.P., Gorislavets V.M. *Reodinamika i teploobmen nelineynovyazkoplachnykh materialov*. Minsk, Nauka i tekhnika Publ., 1970. (in Russian)
15. Godunov S.K., Ryaben'kiy V.S. *Raznostnye skhemy*. Moscow, Nauka Publ., 1977. 440 p. (in Russian)
16. Patankar S. *Chislennyye metody resheniya zadach teploobmena i dinamiki zhidkosti*. Moscow, Energoatomizdat Publ., 1984. 152 p. (in Russian)
17. Frigaard, C. Nouar. On the usage of viscosity regularisation methods for visco-plastic fluid flow computation. *J. Non-Newtonian Fluid Mechanics*, 2005, no. 127, pp. 1–26.