МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ
РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ
НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ
ТОМСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
Механико-математический факультет

Молодежная научная конференция «Все грани математики и механики»

(24–30 апреля 2015 г.)

Сборник статей

Под редакцией
д-ра физ.-мат. наук, профессора А.В. Старченко

Томск
Издательский Дом Томского государственного университета
2015

Расстояние до алгебраической поверхности (на примере эллипсоида)

К.Е. Курганков

Томский государственный университет
E-mail: kastetkos@mail.ru

Рассматривается практика конструирования рефлекторных антенн и алгоритмы расчетов характеристик.
Ключевые слова: *рефлекторная антенна, алгоритм.*

Теория и практика конструирования рефлекторных антенн (как правило, орбитального размещения) зачастую требует надежной оценки расстояний от некоторых узлов и агрегатов спутника до поверхности рефлектора. В достаточно несложном случае задача сводится к оценке расстояния от точки до рефлектора.

Источник, указанный в списке литературы, содержит описание алгоритма, позволяющего (кроме прочего) вычислить расстояние от заданной точки до заданной квадрики в n-мерном евклидовом пространстве $\mathbb{R}^n$. Наша задача – составить Maple-программу [1], реализующую указанный алгоритм для сравнительно несложного случая: расстояние от точки до эллипсоида в $\mathbb{R}^3$. Maple-програма применена для конкретного эллипсоида и конкретной точки. Результат допускает визуализацию.

Эллипсоид задаем уравнением так, что слагаемое нулевой степени равно 1.

$$\frac{7}{18}x_1^{\ 2}+\frac{1}{3}x_2^{\ 2}+\frac{5}{18}x_3^{\ 2}-\frac{2}{9}x_1x_2-\frac{2}{9}x_2x_3-\frac{1}{6}x_1-\frac{2}{9}x_2+\frac{5}{18}x_3-1=0\,. \quad (1)$$

Точка $O(0,0,0)$.

Значение функции в левой части уравнения

$$f(x_1,x_2,x_3)= \\ =\frac{7}{18}x_1^{\ 2}+\frac{1}{3}x_2^{\ 2}+\frac{5}{18}x_3^{\ 2}-\frac{2}{9}x_1x_2-\frac{2}{9}x_2x_3-\frac{1}{6}x_1-\frac{2}{9}x_2+\frac{5}{18}x_3-1 \quad (2)$$

в точке O равно 1.

Объекты, с которыми мы имеем дело, представлены на следующем рисунке.

Нам потребуется матрица Гессе для нашей функции (она составляется из частных производных второго порядка функции $f(x_1,x_2,x_3)$).

$$A=\begin{pmatrix} \frac{7}{18} & -\frac{1}{9} & 0 \\ -\frac{1}{9} & \frac{1}{3} & -\frac{1}{9} \\ 0 & -\frac{1}{9} & \frac{5}{18} \end{pmatrix}. \qquad (3)$$

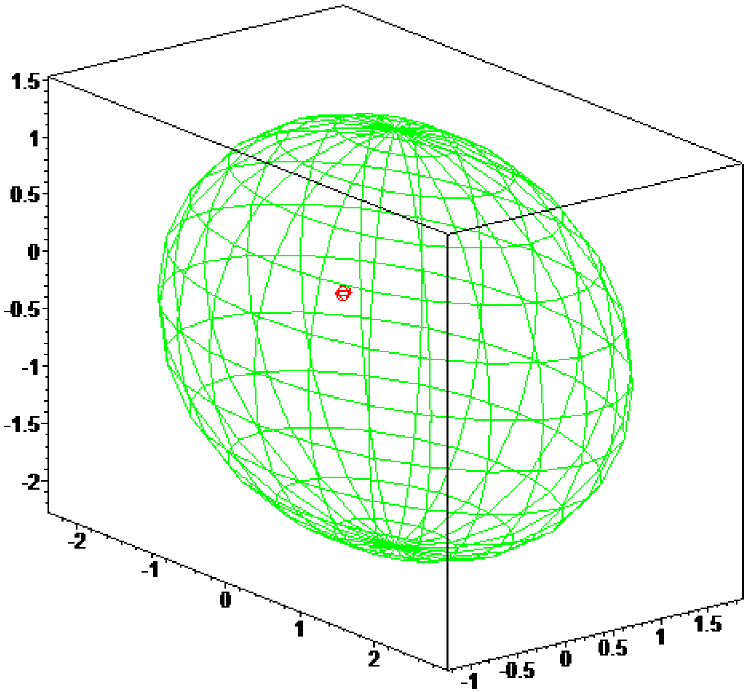

Рис. 1. Эллипсоид и точка O

Оставив в (2) только слагаемые не выше первой степени, получаем выражение

$$b=-\frac{x_1}{6}-\frac{2x_2}{9}+\frac{5}{18}x_3-1\,. \qquad (4)$$

Характеристический полином матрицы A имеет вид

$$\det\begin{pmatrix} \frac{7}{18}-\mu & -\frac{1}{9} & 0 \\ -\frac{1}{9} & \frac{1}{3}-\mu & -\frac{1}{9} \\ 0 & -\frac{1}{9} & \frac{5}{18}-\mu \end{pmatrix} = \frac{1}{36}-\frac{11}{36}\mu+\mu^2-\mu^3 . \qquad (5)$$

Взаимная матрица матрицы Q

$$q=\begin{pmatrix} \frac{13}{162}-\frac{11}{18}\mu+\mu^2 & \frac{5}{162}-\frac{\mu}{9} & \frac{1}{81} \\ \frac{5}{162}-\frac{\mu}{9} & \left(\frac{7}{18}-\mu\right)\left(\frac{5}{18}-\mu\right) & \frac{7}{162}-\frac{\mu}{9} \\ \frac{1}{81} & \frac{7}{162}-\frac{\mu}{9} & \frac{19}{162}-\frac{13}{18}\mu+\mu^2 \end{pmatrix}. \qquad (6)$$

Агрегат, нужный для дальнейшего

$$GG=\left(\frac{1}{36}-\frac{11\mu}{36}+\mu^2-\mu^3\right)(\mu z-1)-$$
$$-\left[\frac{31}{17496}-\frac{49}{2916}\mu+\frac{17}{648}\mu^2+\frac{\left(\frac{7}{18}-\mu\right)\left(\frac{5}{18}-\mu\right)}{81}\right],$$

или в развернутой записи

$$GG=\frac{\mu z-1}{36}-\frac{11}{36}\mu^2 z+\frac{11}{36}\mu+\mu^3 z-\mu^2-\mu^4 z+\mu^3-$$
$$-\left[\frac{163}{52488}-\frac{73}{2916}\mu+\frac{25}{648}\mu^2\right] . \qquad (7)$$

Для дальнейшего потребуется и следующее выражение:

$$G1=\left(\frac{1}{36}-\frac{11}{36}\mu+\mu^2-\mu^3\right)(\mu z-1) . \qquad (8)$$

Также потребуется и матрица типа (1,1). Её единственный элемент

$$G2[1,1]=\frac{163}{52488}-\frac{73}{2916}\mu+\frac{25}{648}\mu^2 . \qquad (9)$$

Напомним, что характеристический полином имеет вид

$$z=\frac{1}{36}-\frac{11}{36}\mu+\mu^2-\mu^3\ .$$

Величину $G1-G2[1,1]$ обозначим

$$G=\frac{\mu z}{36}-\frac{1621}{52488}-\frac{11}{36}\mu^2 z+\frac{241}{729}\mu+\mu^3 z-\frac{673}{648}\mu^2-\mu^4 z+\mu^3\ .$$

Вычисляем дискриминант многочлена G по переменной μ, то есть результант многочлена G и его производной по μ.

$$\begin{gathered}DIS=\frac{1}{15116544}z^6-\frac{36827}{22039921152}z^5+\frac{14470657}{892616806656}z^4-\\-\frac{43882396481}{578415690713088}z^3+\frac{12872761609}{72301961339136}z^2-\\-\frac{38915968609}{192805230237696}z+\frac{104728729}{1190155742208}\end{gathered}\ .$$

Вещественные корни дискриминанта таковы:

$$1.39469,\ 5.70181,\ 7.04394,\ 7.59006\ .$$

Квадрат расстояния r от заданной точки до эллипсоида равен наименьшему положительному вещественному корню дискриминанта. В нашем случае

$$r=1.39469\ .$$

Сфера S с центром (0,0,0) и квадратом радиуса r касается нашего эллипсоида. Её уравнение

$$S:\ x_1^2+x_2^2+x_3^2-1.39469=0\ . \tag{10}$$

Требование пересечения сферы и эллипсоида приводит к уравнению

$$\begin{gathered}-\frac{11}{18}x_1^2-\frac{2}{3}x_2^2-\frac{13}{18}x_3^2-\frac{2}{9}x_1x_2-\\-\frac{2}{9}x_2x_3-\frac{1}{6}x_1-\frac{2}{9}x_2+\frac{5}{18}x_3+0.39469=0.\end{gathered} \tag{11}$$

Точка касания сферы и эллипсоида

$$\mathrm{Y}\left(-0.102469,\ -0.186420,\ 0.220988\right).$$

Рисунок 2 есть рисунок 1, дополненный сферой радиуса $\sqrt{r}$ с центром в точке $O\left(0,0,0\right)$, точкой касания сферы и эллипсоида, а также отрезком, соединяющим центр сферы с точкой касания.

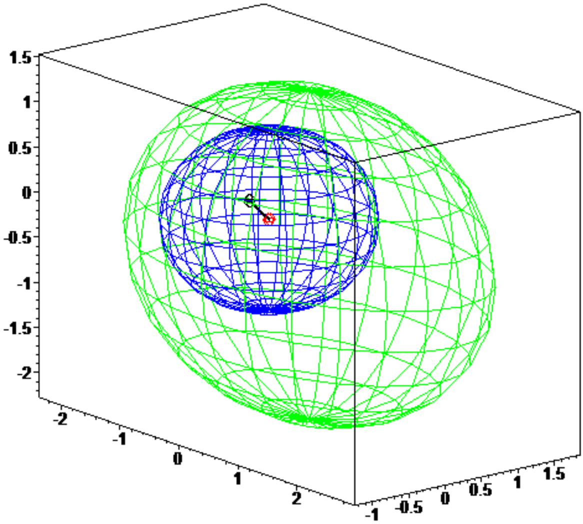

Рис. 2. Эллипсоид, точка O и точка касания сферы с центром O с эллипсоидом

Литература

1. Дьяконов В.П. Maple 6 : учебный курс. СПб. : Питер, 2001.
2. Вычисление расстояний между геометрическими объектам. URL: http://pmpu.ru/vf4/ algebra2/optimiz/distance