На правах рукописи

Зад

Задиранова Любовь Александровна

ИССЛЕДОВАНИЕ МАТЕМАТИЧЕСКИХ МОДЕЛЕЙ ПОТОКОВ В БЕСКОНЕЧНОЛИНЕЙНЫХ СМО С ПОВТОРНЫМ ОБСЛУЖИВАНИЕМ ТРЕБОВАНИЙ

05.13.18 – Математическое моделирование,
численные методы и комплексы программ

АВТОРЕФЕРАТ
диссертации на соискание ученой степени
кандидата физико-математических наук

Томск – 2016

Работа выполнена в федеральном государственном автономном образовательном учреждении высшего образования «Национальный исследовательский Томский государственный университет», на кафедре теории вероятностей и математической статистики.

Научный руководитель: доктор физико-математических наук, доцент
Моисеева Светлана Петровна

Официальные оппоненты:
Рожкова Светлана Владимировна, доктор физико-математических наук, доцент, федеральное государственное автономное образовательное учреждение высшего образования «Национальный исследовательский Томский политехнический университет», кафедра высшей математики, профессор
Семенова Дарья Владиславовна, кандидат физико-математических наук, доцент, федеральное государственное автономное образовательное учреждение высшего образования «Сибирский федеральный университет», базовая кафедра вычислительных и информационных технологий, доцент

Ведущая организация: Федеральное государственное автономное образовательное учреждение высшего образования «Российский университет дружбы народов», г. Москва

Защита состоится 05 мая 2016 г. в 12 ч. 30 мин на заседании диссертационного совета Д 212.267.08, созданного на базе федерального государственного автономного образовательного учреждения высшего образования «Национальный исследовательский Томский государственный университет», по адресу: 634050, г. Томск, пр. Ленина, 36 (учебный корпус № 2, ауд. 102).

С диссертацией можно ознакомиться в Научной библиотеке и на сайте федерального государственного автономного образовательного учреждения высшего образования «Национальный исследовательский Томский государственный университет» www.tsu.ru.

Материалы по защите диссертации размещены на официальном сайте ТГУ:
http://www.ams.tsu.ru/TSU/QualificationDep/co-searchers.nsf/newpublicationn/ZadiranovaLA05052016.html

Автореферат разослан « _____ » марта 2016 г.

Ученый секретарь
диссертационного совета
доктор технических наук, профессор — Скворцов Алексей Владимирович

ОБЩАЯ ХАРАКТЕРИСТИКА РАБОТЫ

Актуальность работы. Теория массового обслуживания (ТМО) считается одной из стандартных методик исследований операций в промышленном строительстве, обрабатывающей техники, а также в области телекоммуникаций, компьютерной техники и информатики. В настоящее время диапазон применения моделей массового обслуживания включает в себя не только телекоммуникационные и информационные системы, в том числе проблемы перегруженности телетрафика, но и производство, управление воздушным движением, военную логистику, супермаркеты, управление запасами, а также многие другие области, которые связаны обслуживанием случайных требований. В монографиях российских ученых Г. П. Башарина, К. Е. Самуйлова, а также зарубежных специалистов E. Gelenbe, G. Pujolle, L. Kleinrock, A. Z. Melikov, M. Schneps-Schneppe, V. B. Iversen дается подробный обзор современных приложений моделей СМО в области телекоммуникаций, современных компьютерных сетей и информационных систем.

Системы массового обслуживания с неограниченным числом обслуживающих приборов также часто используют в качестве математических моделей социально-экономических и демографических процессов. Как правило, в таких системах число потенциальных клиентов (страховых и торговых компаний, пенсионных фондов, банков и т.д.) считается неограниченным. В реальных технических системах число обслуживающих приборов конечно, но в случае, когда вероятностью потери заявки можно пренебречь, такие системы можно аппроксимировать бесконечнолинейными СМО. Так, например, в своих работах А. С. Морозова, И. Р. Гарайшина, М. Г. Носова использовали системы массового обслуживания с бесконечным числом обслуживающих устройств для описания математических моделей торговых компаний, процесса изменения числа лиц, застрахованных в Пенсионном фонде и описания демографических процессов.

Классической задачей в ТМО является исследование числа заявок в системе. В случае систем с большим числом обслуживающих приборов основные результаты по исследованию таких процессов изложены в работах D. R. Cox, Б. А. Севастьянова, L. Takács, А. А. Назарова, D. L. Iglegart и др.

В середине XX века возник интерес к исследованию потоков в системах и сетях массового обслуживания, в том числе выходящих. Здесь следует отметить работы по исследованию выходящих потоков P. J. Burke, E. Reich, P. D. Finch, которые установили, что выходящий поток для бесконечнолинейной системы с пуассоновским входящим потоком и экспоненциальным распределением времени обслуживания, также является простейшим. Дальнейшее изучение потоков в системах развивалось достаточно медленно, так как не были предложены общие методы и подходы к их исследованию.

Одной из модификаций систем массового обслуживания являются системы с повторным обслуживанием заявок или системы с обратной связью. Такие системы можно применять, как для описания социально-экономических процессов, так и для описания процессов дообслуживания в информационных системах. Исследованию систем с обратной связью посвящены труды A. Z. Melikov, С. Зарядова, R. L. D'Avignon, R. D. Disney, E. A. Foley, E. A. Pekoz и др.

Так как во многих случаях аналитическое решение получить затруднительно, поскольку задача настолько сложна, что составление уравнений, к которым сводится задача, представляет практически неразрешимую задачу, то следует отметить наиболее эффективный метод исследования систем с непуассоновскими входящими потоками – метод асимптотического анализа, позволяющий получить приемлемое для практических приложений решение при определенных условиях относительно потока требований, длительностей обслуживания и структуры самой системы.

Настоящая диссертационная работа посвящена исследованию математических моделей потоков (повторных, суммарных) в бесконечнолинейных СМО с повторным обслуживанием требований и входящими марковским модулированным пуассоновским (*MMPP*) и рекуррентным (*GI*) потоками заявок, в том числе развитию асимптотических методов их исследования.

Цель и задачи исследования. Построение математических моделей суммарного потока и потока повторных обращений в бесконечнолинейных СМО вида $MMPP|M|\infty$, $GI|M|\infty$ с повторным обслуживанием требований, разработка и применение асимптотических методов для их исследования.

В рамках поставленной цели были сформулированы следующие задачи:

1. Построить математические модели суммарного потока и потока повторных обращений в бесконечнолинейных СМО вида $MMPP|M|\infty$, $GI|M|\infty$ с повторным обслуживанием требований.

2. Разработать модификацию метода асимптотического анализа для: исследования суммарного потока и потока повторных обращений в системах вида $MMPP|M|\infty$, $GI|M|\infty$ при предельном условии растущего времени обслуживания; исследования суммарного потока обращений в системе $MMPP|M|\infty$ при условии растущего времени обслуживания и предельно частых изменениях состояний входящего потока.

3. Разработать комплекс проблемно-ориентированных программ для имитационного моделирования и численного анализа потоков в исследуемых системах.

Научная новизна результатов, изложенных в диссертации, состоит в следующем:

1. Впервые предложены математические модели суммарного потока и потока повторных обращений в бесконечнолинейных СМО вида $MMPP|M|\infty$, $GI|M|\infty$ с повторным обслуживанием требований, получены выражения для определения точных вероятностных характеристик числа занятых приборов в рассматриваемых системах.

2. С помощью метода асимптотического анализа доказано, что при условии растущего времени обслуживания число занятых приборов в рассматриваемых системах можно аппроксимировать гауссовским распределением, за счет нахождения вида асимптотической характеристической функции третьего порядка удалось повысить точность аппроксимации и увеличить область применимости асимптотического метода в 2 раза.

3. Предложена модификация метода асимптотического анализа для исследования суммарного потока и потока повторных обращений в бесконечнолинейных СМО вида $MMPP|M|\infty$, $GI|M|\infty$ с повторным обслуживанием требований, доказано, что исследуемые потоки обращений при условии растущего времени обслуживания заявок в системе, а также при условии предельно частых изменений состояний входящего потока, является пуассоновскими с параметрами $\frac{r\lambda t}{1-r}$, $\frac{\lambda t}{1-r}$ соответственно, где параметр λ определяет интенсивность входящего потока.

4. С помощью разработанного комплекса проблемно-ориентированных программ проведена оценка области применимости полученных асимптотических результатов.

Положения и результаты, выносимые на защиту, состоят в следующем:

1. Математические модели суммарного потока и потока повторных обращений в бесконечнолинейных СМО вида $MMPP|M|\infty$, $GI|M|\infty$ с повторным обслуживанием требований.

2. Теоремы о виде асимптотической характеристической функции распределения вероятностей числа занятых приборов в системах вида $MMPP|M|\infty$, $GI|M|\infty$ при предельном условии растущего времени обслуживания требований. За счет нахождения вида асимптотической характеристической функции третьего порядка в 2 раза повышена точность аппроксимации.

3. Модификация метода асимптотического анализа для исследования суммарного потока и потока повторных обращений в системах вида $MMPP|M|\infty$, $GI|M|\infty$ при предельном условии растущего времени обслуживания, а также для исследования суммарного потока обращений в системе $MMPP|M|\infty$ при условии

растущего времени обслуживания и предельно частых изменениях состояний входящего потока.

4. Теоремы о виде характеристической функции распределения вероятностей числа заявок суммарного потока и потока повторных обращений в системах вида $MMPP|M|\infty$, $GI|M|\infty$ при предельном условии растущего времени обслуживания, а также при условии растущего времени обслуживания и предельно частых изменениях состояний входящего потока.

5. Оригинальный комплекс проблемно-ориентированных программ, позволяющий провести численный анализ и имитационное моделирование потоков в бесконечнолинейных СМО вида $MMPP|M|\infty$ и $GI|M|\infty$ с повторным обслуживанием требований.

Методы исследования. Исследования, предложенные в настоящей диссертационной работе, проводились с использованием аппарата теории вероятностей и случайных процессов, дифференциальных уравнений и теории массового обслуживания.

Для исследования числа занятых приборов были использованы: метод начальных моментов; метод асимптотического анализа при условии растущего времени обслуживания.

Для исследования суммарного потока и потока повторных обращений в системах вида $MMPP|M|\infty$, $GI|M|\infty$ с повторным обслуживанием требований применяется метод асимптотического анализа при условии растущего времени обслуживания.

Для исследования суммарного потока в системе $MMPP|M|\infty$ с повторным обслуживанием требований был использован метод асимптотического анализа при условии растущего времени обслуживания и предельно частых изменений состояний входящего потока.

Имитационное моделирование, как метод, позволяющий определить область применимости используемого метода асимптотического анализа.

С помощью методов математической статистики проводилась обработка результатов имитационного моделирования.

Результаты, представленные в работе, имеют как теоретическое, так и практическое значение.

Теоретическая значимость работы заключается в развитии асимптотических методов для исследования потоков обращений в системах вида $MMPP|M|\infty$, $GI|M|\infty$ с повторным обслуживанием требований. Доказано, что характеристическая функция числа заявок суммарного потока и потока повторных обращений в систему при условии растущего времени обслуживания имеет вид характеристической функции для распределения Пуассона и зависит только от интенсивности входящего потока, инвариантна по отношению к его типу.

Полученные результаты можно отнести к теоремам о предельных пуассоновских потоках, что является вкладом в развитие теории массового обслуживания, позволяет расширить круг решаемых практических задач.

Практическая значимость работы. Результаты диссертационной работы могут быть использованы для анализа характеристик и управления объектами, связанных с обслуживанием случайных требований. Полученные результаты могут быть применены для расчета вероятностно-временных характеристик телекоммуникационных и информационных систем, подсистем компьютерных сетей с целью повышения их производительности, а также для описания экономико-математических моделей торговых, страховых систем с целью определения оптимального режима их функционирования и максимизации дохода.

Достоверность полученных результатов подтверждается корректным применением математических выкладок, осуществленных с использованием аппарата теории вероятностей, корректностью методов исследования, что подтверждается согласованностью результатов работы с результатами, полученными ранее другими учеными, статистическими экспериментами, проведенными на основе имитационного моделирования исследуемых систем с помощью разработанного комплекса программ.

Личное участие автора в получении результатов, изложенных в диссертации. Задачи, изложенные в диссертационной работе, были поставлены научным руководителем. Автор лично участвовала в получении теоретических результатов, численном анализе и разработке комплекса проблемно-ориентированных программ.

Связь работы с крупным научным проектом. Значительная часть результатов, представленных в данной работе, была получена в рамках выполнения следующих научных проектов: 1) научный проект АВЦП «Развитие научного потенциала высшей школы (2009 – 2011 годы)» Федерального агентства по образованию, проект № 4761 «Разработка методов исследования немарковских систем массового обслуживания и их применение к сложным экономическим системам и компьютерным сетям связи»; 2) научно-исследовательская работа в рамках госзадания Минобрнауки РФ на проведение научных исследований в Томском государственном университете на 2012 – 2013 годы «Разработка и исследование вероятностных, статистических и логических моделей компонентов интегрированных информационно-телекоммуникационных систем обработки, хранения, передачи и защиты информации» № 8.4055.2011; 3) научно-исследовательская работа в рамках проектной части государственного задания в сфере научной деятельности Минобрнауки РФ № 1.511.2014/К «Исследование математических моделей информационных потоков, компьютерных сетей, алгоритмов обработки и передачи данных» (2014 – 2015г.).

Апробация работы. Основные положения работы и отдельные ее вопросы докладывались и обсуждались на следующих научных конференциях: XV Всероссийская научно-практическая конференция «Научное творчество молодежи», г. Анжеро-Судженск, 28-29 апреля 2011 г.; X Всероссийская научно-практическая конференция с международным участием «Информационные технологии и математическое моделирование», г. Анжеро-Судженск, 25-26 ноября 2011 г.; XLIX Международная научная студенческая конференция «Студент и научно-технический прогресс», г. Новосибирск, 16-20 апреля 2011 г.; XII-XIV Всероссийская научно-практическая конференция с международным участием «Информационные технологии и математическое моделирование» г. Анжеро-Судженск, 2013-2015 гг.; 52-й Международная научная студенческая конференция МНСК-2014. Математика, г. Новосибирск, 11-18 апреля 2014 г.; XVIII Всероссийская научно-практическая конференция «Научное творчество молодежи», г. Анжеро-Судженск, 22-25 апреля 2014 г.; 10 Российская конференция с международным участием «Новые информационные технологии в исследовании сложных структур», пос. Катунь Алтайского края, 9-11 июня 2014 г.; II-III Всероссийская молодежная научная конференция «Математическое и программное обеспечение информационных, технических и экономических систем», г. Томск, 2014-2015 гг.; Международная научная конференция, посвященная 80-летию профессора, доктора физико-математических наук Геннадия Алексеевича Медведева «Теория вероятностей, математическая статистика и их приложения», г. Минск, 2014-2015 гг.; 2-ая Международная школа молодых ученых «Новые информационные технологии в исследовании сложных структур», г. Анапа, 8-12 июня 2015 г.; 18-я международная конференция «Распределенные компьютерные и телекоммуникационные сети: управление, вычисление, связь», г. Москва, 2015 г.

Публикации. По материалам диссертации опубликовано 17 работ, в том числе 5 статей в журналах, включенных в Перечень ведущих рецензируемых научных журналов и изданий, в которых должны быть опубликованы основные научные результаты диссертаций на соискание учёной степени доктора и кандидата наук.

Структура работы. Работа состоит из введения, четырех глав, заключения и списка использованной литературы (139 наименований). Общий объем работы – 150 страниц.

ОСНОВНОЕ СОДЕРДЖАНИЕ РАБОТЫ

Во **введении** описаны актуальность, теоретическая и практическая значимость работы, цель и основные задачи исследования, а также приведено краткое изложение диссертации.

В **первой главе** исследуются математические модели суммарного потока и потока повторных обращений в марковских системах массового обслуживания с неограниченным числом обслуживающих приборов и повторным обслуживанием требований.

В **параграфе 1.1** исследуется математическая модель двумерного суммарного потока обращений к обслуживающим блокам в бесконечнолинейных СМО с повторным обслуживанием кратных заявок пуассоновского с параметром λ потока, то есть в момент наступления события в рассматриваемом потоке в систему одновременно поступают две заявки. Одна из заявок поступает в первый, а другая во второй обслуживающие блоки. Время обслуживания является случайной величиной, распределенной согласно экспоненциального закона с параметрами μ_1 и μ_2 соответственно. После обслуживания, заявка k-го блока, $k = 1, 2$ с вероятностью $1 - r_k$ покидает систему или с вероятностью r_k возвращается в нее для повторного обслуживания. Состояние системы определяется вектором $\{i_1(t), i_2(t), m_1(t), m_2(t)\}$, где $i_k(t)$ – число занятых приборов в k-ом блоке обслуживания в момент времени t, $m_k(t)$ – число заявок суммарного потока, обратившихся k - му блоку за время t.

Для распределения вероятностей четырехмерного процесса $P(i_1, i_2, m_1, m_2, t)=P\{i_1(t)=i_1, i_2(t)=i_2, m_1(t)=m_1, m_2(t)=m_2\}$ записана система дифференциальных уравнений Колмогорова, решение которой находится с помощью производящей функции вида

$$F\left(x_1,x_2,y_1,y_2,t\right)=\sum_{i_1=0}^{\infty}\sum_{i_2=0}^{\infty}\sum_{m_1=0}^{\infty}\sum_{m_2=0}^{\infty}x_1^{i_1}x_2^{i_2}y_1^{m_1}y_2^{m_2}P\left(i_1,i_2,m_1,m_2,t\right).$$

Доказана теорема о том, что четырехмерная производящая функция $F\left(x_1,x_2,y_1,y_2,t\right)$ числа занятых приборов и суммарного числа заявок в блоках имеет вид

$$F(x_1,x_2,y_1,y_2,t)=\exp\left\{\lambda\left(\frac{r_1r_2(y_1-1)(y_2-1)}{(1-r_1y_1)(1-r_2y_2)}+\frac{r_1(y_1-1)}{1-r_1y_1}+\frac{r_2(y_2-1)}{1-r_2y_2}\right)y_1y_2t+\right.$$
$$+\lambda\left(\frac{1-r_1}{1-r_1y_1}-x_1\right)\left(\frac{1-r_2}{1-r_2y_2}-x_2\right)\frac{(1-\mathrm{e}^{-[\mu_1(1-r_1y_1)+\mu_2(1-r_2y_2)]t})}{\mu_1(1-r_1y_1)+\mu_2(1-r_2y_2)}-$$
$$-\lambda\left(\frac{1-r_1}{1-r_1y_1}-x_1\right)\left(\frac{r_2(y_2-1)}{1-r_2y_2}+y_1y_2\right)\frac{(1-e^{-\mu_1(1-r_1y_1)t})}{\mu_1(1-r_1y_1)}+$$

$$+\frac{\lambda\left(\frac{r_1(1-y_1)}{1-r_1y_1}-\left(\frac{1-r_1}{1-r_1y_1}-x_1\right)e^{-\mu_1(1-r_1y_1)t}\right)\left(\frac{r_2(1-y_2)}{1-r_2y_2}-\left(\frac{1-r_2}{1-r_2y_2}-x_2\right)e^{-\mu_2(1-r_2y_2)t}\right)}{\mu_1(1-r_1)+\mu_2(1-r_2)}-$$

$$-\frac{\lambda\left(\frac{r_1(1-y_1)}{1-r_1y_1}-\left(\frac{1-r_1}{1-r_1y_1}-x_1\right)e^{-\mu_1(1-r_1y_1)t}\right)}{\mu_1(1-r_1)}-\frac{\lambda\left(\frac{r_2(1-y_2)}{1-r_2y_2}-\left(\frac{1-r_2}{1-r_2y_2}-x_2\right)e^{-\mu_2(1-r_2y_2)t}\right)}{\mu_2(1-r_2)}-$$

$$\left.-\lambda\left(\frac{1-r_2}{1-r_2y_2}-x_2\right)\left(\frac{r_1(y_1-1)}{1-r_1y_1}+y_1y_2\right)\frac{(1-e^{-\mu_2(1-r_2y_2)t})}{\mu_2(1-r_2y_2)}+\lambda(y_1y_2-1)t\right\}.$$

Найдены основные вероятностные характеристики рассматриваемой системы:

- математическое ожидание числа суммарных обращений к блокам

$$m_k(t)=\frac{\lambda}{1-r_k}t.$$

- дисперсия числа суммарных обращений к блокам определяется выражениями

$$D_k(t)=\frac{\lambda(1+r_k)}{(1-r_k)^2}t-2\frac{\lambda r_k}{\mu_k(1-r_k)^3}\left(1-e^{-\mu_k(1-r_k)t}\right).$$

Кроме того, проведено исследование математической модели дохода многопродуктовой торговой компании при наличии маркетинговой политики. В качестве математической модели случайного процесса – изменения числа клиентов компании используется вышеприведенная СМО. На основании численных примеров определены условия, при которых доход торговых компаний достигает максимума.

В **параграфе 1.2** предложена модификация метода асимптотического анализа для исследования потока повторных обращений в системе вида $M|M|\infty$ с повторным обслуживанием требований при условии растущего времени обслуживания.

Для распределений вероятностей $P(i,n,t)=P\{i(t)=i,n(t)=n\}$ двумерного марковского потока $\{i(t), n(t)\}$, где $i(t)$ – число занятых приборов в момент времени t, $n(t)$ – число заявок, потока повторных обращений, обратившихся в систему за время t, записана система дифференциальных уравнений Колмогорова, осуществлен переход к характеристическим функциям вида $H(u,w,t)=\sum_i\sum_n e^{jui}e^{jwn}P(i,n,t)$.

Доказано, что асимптотическое приближение характеристической функции числа заявок потока повторных обращений в рассматриваемую систему за время t, при условии растущего времени обслуживания, имеет вид

$$h(w,t)=M\{e^{jwn(t)}\}=\exp\left\{\frac{\lambda rt(e^{jw}-1)}{1-r}\right\}.$$

Аналогичные исследования проведены для суммарного потока обращений в систему. Показано, что асимптотическое приближение характеристической функции числа заявок суммарного потока $m(t)$ в рассматриваемую систему за время t, при условии растущего времени обслуживания, имеет вид

$$h(v,t)=M\{e^{jvm(t)}\}=\exp\left\{\frac{\lambda t(e^{jv}-1)}{1-r}\right\}.$$

Вторая глава посвящена исследованию потока повторных обращений в бесконечнолинейных СМО с марковским модулированным пуассоновским (*MMPP*), рекуррентным (*GI*) входящими потоками и повторным обслуживанием требований. А именно, разработке модификации метода асимптотического анализа при асимптотическом условии растущего времени обслуживания.

Время обслуживания в указанных системах является случайной величиной, имеющей экспоненциальный закон распределения вероятностей с параметром μ. Завершив обслуживание заявка, с вероятностью $1-r$ покидает систему или с вероятностью r возвращается для повторного обслуживания.

В **параграфе 2.1** исследуется число занятых приборов в системе с входящим *MMPP*-потоком, заданным управляющей цепью Маркова $k(t)=\overline{1,K}$ с матрицей инфинитезимальных характеристик $\mathbf{Q}=[q_{\nu k}],\ \nu,k=\overline{1,K}$, матрицей условных интенсивностей $\mathbf{\Lambda}=diag[\lambda_k],\ k=\overline{1,K}$.

Доказана теорема о моментах 1–3 порядка процесса $i(t)$ – числа занятых приборов в рассматриваемой системе ($i(t)=0,1,2,...$) в стационарном режиме.

Теорема 2.1. Пусть $\mathbf{R}=[R(1),R(2),...,R(K)]$ – вектор стационарного распределения вероятностей состояний цепи Маркова $k(t)$, определяемый решением системы уравнений $\begin{cases}\mathbf{RE}=1\\ \mathbf{RQ}=0\end{cases}$, $\mathbf{\Lambda}=diag[\lambda_k],\ k=\overline{1,K}$, $\mathbf{Q}=[q_{\nu k}],\ \nu,k=\overline{1,K}$, $\mathbf{I}$ – единичная матрица размерности $K\times K$, $\mathbf{E}$ – единичный вектор-столбец размерности $K\times 1$.

Тогда начальные моменты числа занятых приборов при стационарном функционировании системы $MMPP|M|\infty$ определяются выражениями

$$M\{i\} = \frac{1}{\mu(1-r)}\mathbf{R\Lambda E},$$

$$M\{i^2\} = \mathbf{R\Lambda}\left\{\left[\mathbf{Q} - \mu(1-r)\mathbf{I}\right]^{-1}\left[2\mathbf{\Lambda} + \mu(1-r)\mathbf{I}\right] - \mathbf{I}\right\}\left\{\mathbf{Q} - 2\mu(1-r)\mathbf{I}\right\}^{-1}\mathbf{E},$$

$$M\{i^3\} = \left[\mathbf{Q} - 3\mu(1-r)\mathbf{I}\right]^{-1}\left[\mathbf{m}_1(-3\mathbf{\Lambda} + \mu(1-r)\mathbf{I}) - \mathbf{m}_2(3\mathbf{\Lambda} + 3\mu(1-r)\mathbf{I}) - \mathbf{R\Lambda}\right]\mathbf{E},$$

$$\mathbf{m_1} = \mathbf{R\Lambda}[\mu(1-r)\mathbf{I} - \mathbf{Q}]^{-1},\ \mathbf{m_2} = \mathbf{R\Lambda}\left\{\left[\mathbf{Q} - \mu(1-r)\mathbf{I}\right]^{-1}\left[2\mathbf{\Lambda} + \mu(1-r)\mathbf{I}\right] - \mathbf{I}\right\}\left\{\mathbf{Q} - 2\mu(1-r)\mathbf{I}\right\}^{-1}.$$

С помощью метода асимптотического анализа при условии растущего времени обслуживания, то есть $\frac{1}{\mu} \to \infty$, или $\mu \to 0$, доказано, что стационарное распределение вероятностей числа занятых приборов в системе *MMPP*|*M*|∞, можно аппроксимировать гауссовским распределением со следующими параметрами

$$a = M\{i\} = \frac{\kappa_1}{\mu(1-r)},\ \sigma^2 = M\left\{(i-a)^2\right\} = \frac{\kappa_1 + \kappa_2}{\mu(1-r)},$$

где $\kappa_1 = \mathbf{R\Lambda E}$, $\kappa_2 = \mathbf{f}_2\mathbf{\Lambda E}$, вектор $\mathbf{f}_2$ удовлетворяет условию $\mathbf{f}_2\mathbf{E} = 0$ и является решением неоднородной системы линейных алгебраических уравнений $\mathbf{R}(\mathbf{\Lambda} - \kappa_1\mathbf{I}) + \mathbf{f}_2\mathbf{Q} = 0$.

Кроме того, построено асимптотическое приближение характеристической функции третьего порядка, имеющее вид

$$h(u) = \mathbf{H}(u)\mathbf{E} = \exp\left\{\frac{ju}{(1-r)}\frac{\kappa_1}{\mu} + \frac{(ju)^2}{2(1-r)}\frac{(\kappa_1 + \kappa_2)}{\mu} + \frac{(ju)^3}{6(1-r)}\frac{\kappa_3}{\mu}\right\},$$

где $\kappa_3 = \kappa_1 + 2\kappa_2 + \mathbf{f}_3\mathbf{\Lambda E}$, а вектор $\mathbf{f}_3$ удовлетворяет условию $\mathbf{f}_3\mathbf{E} = 0$ и является решением неоднородной системы линейных алгебраических уравнений $\mathbf{R}(\mathbf{\Lambda} - \kappa_1\mathbf{I} - 2\kappa_2\mathbf{I}) + 2\mathbf{f}_2(\mathbf{\Lambda} - \kappa_1\mathbf{I}) + \mathbf{f}_3\mathbf{Q} = 0$.

С помощью численных примеров, доказано, что применение асимптотики третьего порядка расширяет область применимости данного метода в два раза.

В **параграфе 2.2** проводится аналогичное исследование системы *GI*|*M*|∞. Рекуррентный поток заявок задан функцией распределения длин интервалов между моментами поступления заявок $A(x)$. Рассматривается двумерный марковский случайный процесс $\{z(t), i(t)\}$, где $z(t)$ – случайный процесс, принимающий значения равные длине интервала от момента t до момента поступления следующей заявки входящего потока, случайный процесс $i(t)$ – число занятых приборов в системе.

Для распределения вероятностей значений полученного марковского процесса $P(z,i,t)=P\{z(t)<z,i(t)=i\}$, записана система дифференциальных уравнений Колмогорова

$$\frac{\partial P(z,i,n,t)}{\partial t}=\frac{\partial P(z,i,t)}{\partial z}-\frac{\partial P(0,i,t)}{\partial z}+i\mu rP(z,i,t)+\mu(1+i)(1-r)P(z,i+1,t)+$$
$$+A(z)\frac{\partial P(0,i-1,t)}{\partial z}-i\mu P(z,i,t)\text{, где } i=\overline{0,\infty}.$$

Доказана теорема о начальных моментах случайного процесса $i(t)$.

Теорема 2.4. Пусть $A(x)$ – функция распределения вероятностей длин интервалов между моментами поступления заявок в систему, $R(z)=\lambda\int\limits_0^z(1-A(x))\,dx$ – стационарное распределение величины перескока, где $\lambda=\frac{1}{\int\limits_0^z(1-A(x))\,dx}$ имеет смысл интенсивности входящего потока.

Тогда начальные моменты числа занятых приборов при стационарном функционировании системы $GI|M|\infty$ определяются выражениями

$$M\{i\}=\frac{\lambda}{\mu(1-r)},\tag{2.33}$$

$$M\{i^2\}=\frac{\lambda}{\mu(1-r)}\left\{1+\frac{A^*(\mu(1-r))}{\left(1-A^*(\mu(1-r))\right)}\right\},\qquad A^*(\alpha)=\int\limits_0^\infty e^{-\alpha z}dA(z).\tag{2.34}$$

Методом асимптотического анализа проведено исследование числа занятых приборов в рассматриваемой системе.

Для характеристической функции числа занятых приборов построена гауссовская аппроксимация вида

$$h(u)=M\{e^{jui(t)}\}=H(\infty,u)=\exp\left\{\frac{ju\lambda}{(1-r)\mu}+\frac{(ju)^2}{2(1-r)}\frac{\kappa_2}{\mu}\right\},$$

где $\lambda=\frac{1}{\int\limits_0^z(1-A(x))\,dx}$, $\kappa_2=\lambda+f_2'(0)$, $f_2'(0)=\lambda^2\int\limits_0^\infty(A(z)-R(z))dz$.

Результаты параграфов 2.1, 2.2 согласуются с известными результатами, что при высокой загрузке системы число занятых приборов имеет гауссовское распределение вероятностей.

На численных примерах, показано, что при уменьшении значения параметра μ, точность гауссовской аппроксимации распределения вероятностей числа занятых приборов в системе увеличивается. Кроме того, отмечено влияние вероятности возвращения заявки в систему на точность аппроксимации, а именно, при увеличении вероятности возврата, область применимости также увеличивается.

Одному из главных результатов диссертационной работы посвящены параграфы 2.3-2.4, где проводится исследование потоков повторных обращений в описанных системах.

Параграф 2.3 посвящен исследованию потока повторных обращений в системе *MMPP*|*M*|∞. Для распределения вероятностей $P(k,i,n,t)=P\{k(t)=k,i(t)=i,n(t)=n\}$ трехмерной цепи Маркова $\{k(t),\ i(t),\ n(t)\}$, где $n(t)$ – число заявок, потока повторных обращений, обратившихся в систему за время t, записана система дифференциальных уравнений Колмогорова и осуществлен переход к частичным характеристическим функциям вида $H(k,u,w,t)=\sum_{i}\sum_{n}e^{jui}e^{jwn}P(k,i,n,t)$, для которых записано дифференциальное матричное уравнение вида

$$\frac{\partial\mathbf{H}(u,w,t)}{\partial t}+j\mu(re^{jw}-1+(1-r)e^{-ju})\frac{\partial\mathbf{H}(u,w,t)}{\partial u}=\mathbf{H}(u,w,t)[(e^{ju}-1)\mathbf{\Lambda}+\mathbf{Q}],$$

где $\mathbf{H}(u,t)=[H(1,u,t),H(2,u,t),...,H(K,u,t)]$ – вектор-строка.

С помощью метода начальных моментов получены выражения, характеризующие моменты первого и второго порядка числа заявок потока повторных обращений в систему за время t при её стационарном функционировании.

Доказана теорема о виде характеристической функции числа заявок потока повторных обращений в рассматриваемую систему за время t, при условии растущего времени обслуживания.

Теорема 2.9. Пусть $\mathbf{R}=[R(1),R(2),...,R(K)]$ – вектор стационарного распределения вероятностей состояний цепи Маркова $k(t)$, определяемый решением системы уравнений $\begin{cases}\mathbf{RE}=1\\ \mathbf{RQ}=0\end{cases}$, вектор-функция $\mathbf{H}(u,w,t)=[H(1,u,w,t),H(2,u,w,t),...,H(K,u,w,t)]$, удовлетворяет матричному дифференциальному уравнению (2.51).

Тогда асимптотическая характеристическая функция числа заявок потока повторных обращений $h(w,t)=M\left\{e^{jwn(t)}\right\}$, при условии растущего времени обслуживания, то есть при $\mu\to 0$, имеет вид

$$h(w,t)=\exp\left\{\frac{r\kappa t(e^{jw}-1)}{1-r}\right\},\ \kappa=\mathbf{R}\cdot\mathbf{\Lambda}\cdot\mathbf{E}.$$

Аналогичная теорема доказана в **параграфе 2.4.** для системы $GI|M|\infty$ с повторным обслуживанием требований.

Результаты исследования позволяют сделать вывод о том, что поток повторных обращений в системах вида $MMPPM|\infty$, $GI|M|\infty$ при условии растущего времени обслуживания, имеет распределение Пуассона, с параметром $\frac{r\lambda t}{1-r}$, где λ – имеет смысл интенсивности входящего потока.

В **третьей главе** посвящена разработке асимптотических методов исследования суммарного потока в бесконечнолинейных системах с входящими марковским модулированным пуассоновским и рекуррентным потоками заявок и повторным обслуживанием требований.

Совокупность заявок, обратившихся в систему для повторного и первичного обслуживания, будем называть суммарным потоком обращений, далее – суммарный поток. Такие потоки могут быть использованы при проведении анализа потоков различных социально-экономических систем, где наблюдается эффект повторного обращения, например, потоков клиентов в различных торговых сетях, страховых компаний, справочных службах и т.д.

В **параграфах 3.1, 3.3** проводится исследование суммарного потока обращений в системах вида $MMPPM|\infty$, $GI|M|\infty$, при асимптотическом условии растущего времени обслуживания, то есть $\frac{1}{\mu}\to\infty$, или $\mu\to 0$.

Доказаны теоремы о том, что асимптотическое приближение характеристической функции числа заявок суммарного потока обращений, поступивших в систему за время t для повторного и первичного обслуживания, при условии растущего времени обслуживания, имеет вид характеристической функции для распределения Пуассона с параметром $\frac{\lambda t}{1-r}$, где λ – имеет смысл интенсивности входящего потока.

В **параграфе 3.2** для исследования суммарного потока в системе вида $MMPPM|\infty$ предлагается оригинальная модификация метода асимптотического анализа при условии растущего времени обслуживания и предельно частых изменений состояний входящего потока.

В **четвертой главе** приводится описание комплекса проблемно-ориентированных программ для проведения численного анализа и имитационного моделирования потоков в бесконечнолинейных СМО вида $MMPP|M|\infty$ и $GI|M|\infty$ с повторным обслуживанием требований.

Были разработаны численные алгоритмы для реализации методов нахождения начальных моментов и асимптотического анализа бесконечнолинейных СМО с повторным обслуживанием требований.

Для определения области применимости метода асимптотического анализа, разработан программный модуль имитационного моделирования рассматриваемых систем и потоков, результат работы которого изображен на Рисунках 4.2, 4.3.

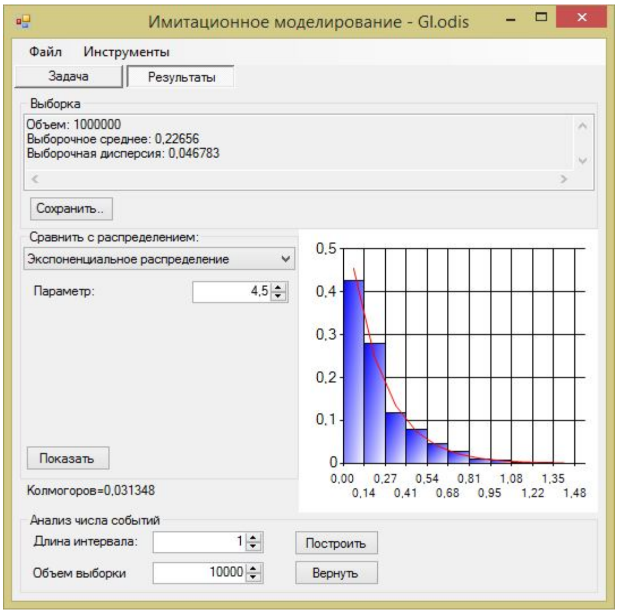

Рисунок 4.2. – Анализ результатов имитационного моделирования для потока повторных обращений

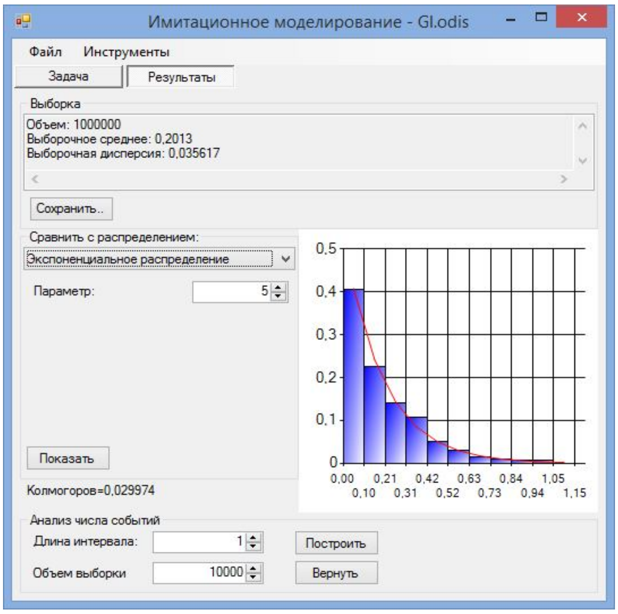

Рисунок 4.3. – Анализ результатов имитационного моделирования для суммарного потока обращений

Приведем примеры анализа численных и статистических результатов проведенного имитационного моделирования.

Пример. Рассмотрим СМО вида $MMPP|M|\infty$. Пусть $MMPP$-поток, задан следующими параметрами

$$\mathbf{Q}_1 = \begin{bmatrix} -0,5 & 0,3 & 0,2 \\ 0,2 & -0,6 & 0,4 \\ 0,5 & 0,3 & -0,8 \end{bmatrix}, \ \Lambda = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 10 \end{bmatrix},$$

вероятность возвращения заявок в систему r=0,5.

Проведем исследование применимости метода асимптотического анализа при условии растущего времени обслуживания и предельно частых изменений состояний входящего потока, тогда, полагая $\mathbf{Q}=N\cdot\mathbf{Q}_1$, получаем следующий результаты (Таблица 4.7).

Таблица 4.7 – Область применимости асимптотических результатов для потока суммарного потока обращений в условии растущего времени обслуживания и предельно частых изменений состояний входящего потока при $\mathbf{Q}=100\cdot\mathbf{Q}_1$

μ	0,5	0,1	0,01
Δ	**0,0130**	**0,0097**	**0,0082**

Пример. Рассмотрим СМО вида $GI|M|\infty$. Пусть на вход поступает рекуррентный поток, в котором длины интервалов между моментами поступления заявок имеют Гамма-распределение с параметром формы α=0,5 и параметром масштаба β=2,5, вероятность возвращения заявки в систему r=0,1.

Рассмотрим систему при условии растущего времени обслуживания, тогда, используя заданные параметры, имеем результат, приведенный в таблице 4.8.

Таблица 4.8 – Область применимости асимптотических результатов для потока повторных обращений в условии растущего времени обслуживания при r=0,1

μ	0,5	0,1	0,01
Δ	**0,0252**	**0,0090**	**0,0082**

В **Заключении** сформулированы основные результаты и выводы, полученные на основе настоящей диссертационной работы.

ПУБЛИКАЦИИ ПО ТЕМЕ ДИССЕРТАЦИИ

Публикации в журналах, включенных в Перечень российских рецензируемых научных изданий, в которых должны быть опубликованы основные научные результаты диссертаций на соискание ученых степеней доктора и кандидата наук:

1. Жидкова (Задиранова) Л. А. Исследование системы параллельного обслуживания кратных заявок простейшего потока / Л. А. Жидкова (Задиранова), С. П. Моисеева // Вестник Томского государственного университета. Управление, вычислительная техника и информатика. – 2011. – № 4 (17) . – С. 49–54. – 0,54 / 0,27 п.л.

2. Жидкова (Задиранова) Л. А. Математическая модель потоков покупателей двухпродуктовой торговой компании в виде системы массового обслуживания с повторными обращениями к блокам / Л. А. Жидкова (Задиранова), С. П. Моисеева // Известия Томского политехнического университета. – 2013. – Т. 322, № 6. – С. 5–9. – 0,42 / 0,21 п.л.

3. Жидкова (Задиранова) Л. А. Исследование числа занятых приборов в системе MMPP|M|∞ с повторными обращениями / Л. А. Жидкова (Задиранова), С. П. Моисеева // Вестник Томского государственного университета. Управление, вычислительная техника и информатика. – 2014. – № 1 (26). – С. 53–62. – 0,82 / 0,41 п.л.

4. Задиранова, Л. А. Асимптотический анализ потока повторных обращений в системе MMPP|M|∞ с повторным обслуживанием / Л. А. Задиранова, С. П. Моисеева // Вестник Томского государственного университета. Управление, вычислительная техника и информатика. – 2015. – № 2 (31). – С. 26–34. – 0,92 / 0,46 п.л.

5. Задиранова, Л. А. Сравнение асимптотик второго и третьего порядка числа занятых приборов в системе MMPP|M|∞ с повторным обслуживанием / Л. А. Задиранова, С. П. Моисеева – // Известия высших учебных заведений. Физика. – 2015. – Т. 58, № 11/2. – С. 172-177. – 0,34 / 0,17 п.л.

Публикации в других научных изданиях:

6. Жидкова (Задиранова) Л. А. Исследование потока повторных обращений в системе MMPP|M|∞ / Л. А. Жидкова (Задиранова) // Научное творчество молодежи : материалы XVIII Всероссийской научно-практической конференции. Томск, 24-25 апреля 2014 г. – Томск, 2014. – Ч. 1. – С. 7–11. – 0,22 п.л.

7. Жидкова (Задиранова) Л. А. Исследование потоков в системе с повторным обслуживание и непуассоновским входящим потоком / Л. А. Жидкова (Задиранова) // 52-я международная научная студенческая конференция МНСК-2014. Математика : материалы. Новосибирск, 11-18 апреля 2014 г. – Новосибирск, 2014. – С. 236. – 0,06 п.л.

8. Жидкова (Задиранова) Л. А. Исследование системы GI|M|∞ с повторными обращениями / Л. А. Жидкова (Задиранова), С. П. Моисеева // Труды / Томский государственный университет. Серия физико-математическая. – Томск, 2014. – Т. 295: Математическое и программное обеспечение информационных, технических и экономических систем: материалы II Всероссийской молодежной научной конференции. – С. 94–100. – 0,5 / 0,25 п.л.

9. Жидкова (Задиранова) Л. А. Исследование системы массового обслуживания MMPP|M|∞ с повторным обслуживанием / Л. А. Жидкова (Задиранова), С. П. Моисеева // Информационные технологии и математическое моделирование (ИТММ–2013) : материалы XII Всероссийской научно-практической конференции с международным участием имени А.Ф. Терпугова. Анжеро-Судженск, 29–30 ноября 2013 г. – Томск, 2013. – Ч. 2. – С. 12–15. – 0,16 / 0,08 п.л.

10. Жидкова (Задиранова) Л. А. Исследование числа занятых приборов в системе GI|M| с повторным обслуживанием / Л. А. Жидкова (Задиранова) // Теория вероятностей, математическая статистика и их приложения : сборник научных статей. – Минск, 2014. – С. 55–58. – 0,23 п.л.

11. Жидкова (Задиранова) Л. А. Исследование числа занятых приборов в системе MAP|M|∞ с повторными обращениями / Л. А. Жидкова (Задиранова) // Новые информационные технологии в исследовании сложных структур : материалы 10 Российской конференции с международным участием. пос. Катунь Алтайского края, 11 июня 2014 г. – Томск, 2014. – С. 100–101. – 0,12 п.л.

12. Жидкова (Задиранова) Л. А. Математическая модель изменения численности клиентов торговой компании / Л. А. Жидкова (Задиранова), С. П. Моисеева // Информационные технологии и математическое моделирование (ИТММ–2011) : материалы X Всероссийской научно-практической конференции с международным участием. Томск, 25-26 ноября 2011 г. – Томск, 2011. – Ч. 1. – С. 115–121. – 0,28 / 0,14 п.л.

13. Задиранова Л. А. Асимптотический анализ потока повторных обращений в СМО с повторным обслуживанием заявок / Л. А. Задиранова, С. П. Моисеева // Распределенные компьютерные и телекоммуникационные сети: управление, вычисление, связь: материалы восемнадцатой международной научной конференции. Москва, 19-22 октября 2015 г. – М., 2015. – С. 271–278. – 0,64 / 0,32 п.л.

14. Задиранова Л. А. Исследование потока повторных обращений в системе GI|M|∞ с повторным обслуживанием / Л. А. Задиранова // Теория вероятностей, математическая статистика и их приложения : сборник научных статей. – Минск, 2015. – С. 43–46. – 0,29 п.л.

15. Задиранова Л. А. Исследование потока суммарных обращений в системе MMPP|M|∞ с повторным обслуживанием требований / Л. А. Задиранова, С. П. Моисеева // Информационные технологии и математическое моделирование (ИТММ-2015) : материалы XIV Международной конференции им. А.Ф. Терпугова. Анжеро-Судженск, 18-22 ноября 2015 г. – Томск, 2015. – Ч. 1. – С. 110–113. – 0,22 / 0,11 п.л.

16. Задиранова Л. А. Исследование потока суммарных обращений в СМО с повторным обслуживанием с помощью метода асимптотического анализа / Л. А. Задиранова, С. П. Моисеева // Труды / Томский государственный университет. Серия физико-математическая. – Томск, 2015. – Т. 297: Математическое и программное обеспечение информационных, технических и экономических систем: материалы III Всероссийской молодежной научной конференции. – С. 99–105. – 0,38 / 0,19 п.л.

17. Лисовская Е. Ю. Исследование суммарного потока обращений в систему с повторным обслуживанием / Е. Ю. Лисовская, Л. А. Задиранова // Информационные технологии и математическое моделирование (ИТММ-2014) : материалы XIII Международной научно-практической конференции им. А.Ф. Терпугова. Анжеро-Судженск, 20-22 ноября 2014 г. – Томск, 2014. – Ч. 3. – С. 42–46. – 0,44 / 0,22 п.л.

Издание подготовлено в авторской редакции.
Отпечатано на участке цифровой печати Издательского Дома Томского государственного университета.
Заказ № 1802 от «18» февраля 2016 г.
Тираж 120 экз. Печ. л. 1,1
г. Томск Московский тр.8 тел. 53-15-28