

В. А. Пчелинцев

Томский политехнический университет,

Томский государственный университет,

vpchelintsev@vtomske.ru

ПРИМЕНЕНИЕ ВАРИАЦИОННОГО МЕТОДА К ЗАДАЧЕ О НЕНАЛЕГАЮЩИХ ОБЛАСТЯХ

Пусть \mathfrak{M} – класс пар функций $(f(z), F(\zeta))$, где $f(z)$, $f(0) = 0$, голоморфна и однолистка в круге $E : |z| < 1$, $F(\zeta)$, $F(\infty) = \infty$, мероморфна и однолистка в области $E^* : |\zeta| > 1$, отображающих E и E^* соответственно на неналегающие области D и D^* плоскости $\overline{\mathbb{C}_w}$.

Решается задача о нахождении множества значений функционала

$$I = J \left(f(z_0), \overline{f(z_0)}, F(\zeta_0), \overline{F(\zeta_0)} \right) \quad (1)$$

при фиксированных z_0 и ζ_0 , $0 < |z_0| < 1$ и $1 < |\zeta_0| < \infty$ на классе \mathfrak{M} . Предполагается, что функция J аналитическая функция четырех комплексных переменных.

Исследование проводится методом внутренних вариаций Г.М. Голузина с использованием вариационных формул из [1]. В ходе решения поставленной задачи доказана следующая теорема.

Теорема. Пусть $(f(z), F(\zeta)) \in \mathfrak{M}$ и $r \in (0; 1)$, $\rho \in (1; +\infty)$ – фиксированные точки. Тогда искомое множество значений функционала (1) на классе \mathfrak{M} ограничено кривой определенной

уравнением

$$-\frac{qh^* \Pi(n^*, k')}{ph \Pi(n, k)} = \frac{1}{2} \frac{\mathbf{K}(\sqrt{1-r^2})}{\mathbf{K}(r)} - \frac{1}{2} \frac{l\Pi(\phi, m, k) - h_0\mathbf{F}(\phi, k)}{ph\Pi(n, k)} \frac{\mathbf{K}\left(\sqrt{1-\frac{1}{\rho^2}}\right)}{\mathbf{K}\left(\frac{1}{\rho}\right)} + \frac{\alpha}{\pi} i, \quad (2)$$

где

$$r = |z_0|, \quad \rho = |\zeta_0|, \quad 0 \leq \alpha \leq 2\pi.$$

В уравнении (2) через $\mathbf{K}(\cdot)$, $\mathbf{F}(\cdot, \cdot)$, $\Pi(\cdot, \cdot)$, $\Pi(\cdot, \cdot, \cdot)$ обозначаются полные и неполные эллиптические интегралы первого и третьего родов соответственно. Величины h , h_0 , h^* , k , k' , l , m , n , n^* , p , q зависят от параметров функционала (1).

Полученный результат обобщает исследования, опубликованные в работах [1, 2].

Л И Т Е Р А Т У Р А

1. Лебедев Н. А. *Об области значений одного функционала в задаче о неналегающих областях* // Докл. АН СССР, – 1957. – Т. 115. – № 6. – С. 1070–1073.
2. Пчелинцев В. А. *К задаче о неналегающих областях* // Сиб. матем. журн. – 2012. – Т. 53. – № 6. – С. 1391–1400.