МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ
РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ
НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ
ТОМСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
Механико-математический факультет

Молодежная научная конференция «Все грани математики и механики»

(24–30 апреля 2015 г.)

Сборник статей

Под редакцией
д-ра физ.-мат. наук, профессора А.В. Старченко

Томск
Издательский Дом Томского государственного университета
2015

Оценивание параметров непрерывной авторегрессии с использованием последовательной процедуры

Ю.В. Иванюк, Т.В. Емельянова

Томский государственный университет
E-mail: yuliya.ivanyuk.90@mail.ru

Рассматривается последовательная процедура, которая позволяет оценить неизвестные параметры устойчивого процесса авторегрессии с непрерывным временем. Одним из ее преимуществ является способность контролировать среднеквадратическую точность (СКТ) оценок. Для проверки согласия выборочных свойств полученных оценок с теоретическими результатами проводилось моделирование по методу Монте-Карло.

Ключевые слова: *авторегрессионный процесс, среднеквадратическая точность, последовательное оценивание, момент остановки, метод наименьших квадратов (МНК).*

Актуальность задач прогнозирования в современных условиях достаточно высока. Качество их решения может в значительной степени повлиять на принятие того или иного решения в различных сферах деятельности. Регрессионные модели используются в решении прикладных физических и экономических задач при моделировании спроса, доходности акций, прецессии земной оси [1] и т.д.

Рассмотрим задачу оценивания параметров модели, описываемой системой линейных дифференциальных стохастических уравнений

$$dX_t = AX_t dt + BdW_t \tag{1}$$

с начальным условием $X_0 = \left(X_1(0),...,X_p(0)\right)$. Здесь A и B – матрицы постоянных коэффициентов размера p × p, W_t –стандартный p-мерный винеровский процесс. К этой задаче сводится задача оценивания параметров стационарного гауссовского процесса авторегрессии p-го порядка (АР(p))

$$dx_t^p = \left(\theta_1 x_t^{p-1} + ... + \theta_p x_t\right)dt + \sigma dW_t \tag{2}$$

с рациональной спектральной плотностью, имеющей вид $f(\lambda) = \sigma^2 \big/ | Q(i\lambda) |^2$.

Известно, что таким процессом можно аппроксимировать любой стационарный гауссовский процесс. Процесс (2) можно представить в виде (1), если положить

$$X_t = \begin{pmatrix} x_t^1 \\ \dots \\ x_t^{p-1} \end{pmatrix};\ A = \begin{pmatrix} 0 & \dots & I_p \\ \dots & \dots & \dots \\ \theta_p & \dots & \theta_1 \end{pmatrix};\ B = \begin{pmatrix} 0 & \dots & 0 \\ 0 & \dots & 0 \\ 0 & \dots & \sigma \end{pmatrix};\ I_p = \begin{pmatrix} 1 & \dots & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & \dots & 1 \end{pmatrix}.$$

Одним из основных методов оценивания вектора неизвестных параметров $\theta = (\theta_1, ..., \theta_p)'$ является метод наименьших квадратов (МНК), согласно которому оценка $\hat{\theta}_T$ имеет вид [7]

$$\hat{\theta}_T = M_T^{-1} \int_0^T X_s d \left\langle X_t \right\rangle_p,\ M_T = \int_0^T X_s X_s' ds, \tag{3}$$

где $\left\langle a \right\rangle_i$ обозначает i-ю координату вектора столбца $a = (a_1, ..., a_p)'$; M_T – выборочная информационная матрица Фишера, M_T^{-1} – обратная к ней, если она не вырождена, и $M_T^{-1} = 0$ – в противном случае. Асимптотические свойства вектора оценок $\hat{\theta}_T$ по методам максимального правдоподобия и наименьших квадратов изучались в ряде работ [1–2]; однако, эти свойства могут нарушаться при малых и умеренных объемах данных. Поэтому представляет интерес задача неасимптотического анализа свойств оценок [3–7].

В данной работе предложена одноэтапная процедура оценивания, использующая усеченное правило остановки наблюдений и позволяющая контролировать СКТ оценок. Эта процедура, как и предложенная в [6, 7], является последовательной модификацией оценок МНК и может использоваться при наличии некоторой априорной информации о параметрах. Однако, в отличие от процедуры, предложенной в [6, 7], она применима и в случае объема выборки, недостаточного для достижения даже минимального порогового значения H.

При построении последовательного плана будет использоваться следующая лемма, доказанная в [7], дающая оценку нормы уклонения оценки (3) от ее истинного значения.

Лемма 1. Пусть матрица M^T в (3) невырождена. Тогда квадрат нормы уклонения оценки (3) удовлетворяет неравенству

$$\left\| \hat{\theta}_T - \theta \right\|^2 \le \left\| M_T^{-2} \right\| \cdot \left\| m_T \right\|^2,\ m_T = \int_0^T X_s dW_s \tag{4}$$

Как было показано в [7] (см. лемму 3), с вероятностью 1 существует предел

$$\lim_{T \to \infty} M_T / T = F, \tag{5}$$

где F – положительно определенная матрица. Отсюда следует, что множитель $\left\| M_T^{-2} \right\|$ в правой части (4) монотонно убывает с ростом T, причем $\lim\limits_{T\to\infty} \left\| M_T^{-2} \right\| = 0$. Это позволило использовать в работе [7] следующий план оценивания $\delta = \delta\left(\tau, \tilde{\theta}\right)$, где

$$\tau = \tau(H) = \inf\left\{ t > 0 : \left\| M_T^{-2} \right\|^{1/2} \le \frac{1}{H} \right\}, \quad t \in [0, T], H > 0 \qquad (6)$$

$$\tilde{\theta}\left(H\right) = M_{\tau(H)}^{-1} \cdot \int\limits_0^{\tau(H)} X_s d\left\langle X_t \right\rangle_p. \qquad (7)$$

Момент остановки наблюдений в последовательном плане (6)–(7) является случайной величиной, зависящей от выбора порога H, которая может принимать достаточно большие значения. В прикладных задачах длительность реализации процесса, используемая для идентификации неизвестных параметров, часто ограничена некоторой величиной T. В этом случае вместо последовательной оценки (6)–(7) будем использовать усеченный последовательный план, определенный следующими формулами:

$$N\left(H\right) = \min\left(\tau(H), T\right), \qquad (8)$$

$$\theta^*\left(H\right) = M_{N(H)}^{-1} \cdot \int\limits_0^{N(H)} X_s d\left\langle X_t \right\rangle_p \chi_{\left(N(T) \le T\right)}. \qquad (9)$$

Предложенная процедура (8)–(9), обладает следующими свойствами, описанными в теоремах, приведенных ниже.

Асимптотическое поведение средней длительности процедуры дает следующая теорема.

Теорема 1. Пусть $N(H)$ определяется формулой (8), начальное условие в уравнении (1) таково, что $\sup\limits_{\theta\in\Lambda_\gamma} E_\theta \left\| X_0 \right\|^8 < +\infty$. Тогда для любого компакта $K \subset \Lambda_\gamma$ $\lim\limits_{H\to\infty} \sup\limits_{\theta\in K} \left| E_0 \dfrac{N(H)}{H} - \left\| F^{-2} \right\|^{\frac{1}{2}} \right| = 0$.

Найдем верхнюю границу для СКТ оценки вектора неизвестных параметров $\theta = \left(\theta_1, ..., \theta_p\right)'$ в уравнении (2) с помощью последовательного плана (8)–(9).

Теорема 2. В условиях теоремы 1 для любого компактного множества $K \subset \Lambda_\gamma$

$$\sup_{\theta\in K} E_\theta\left(\left\|\theta^*(H)-\theta\right\|^2\right)\le\frac{a_K}{H}\left(1+o(1)\right),\qquad(10)$$

где $a_K=\sup\limits_{\theta\in K}\varphi(\theta)$, $\varphi(\theta)=trF\left\|F^{-2}\right\|^{1/2}$, $o(1)\to 0$ при $H\to\infty$.

Для проверки согласия выборочных свойств оценок (8) – (9) с теоретическими результатами теорем 1, 2 проводилось моделирование по методу Монте-Карло, включавшее 50 повторений процедуры при различных значениях порога H, определяющего момент остановки $\tau=\tau(H)$.

Численное моделирование проводим для случая p=2, т.е. для стохастического процесса

$$d\dot{x}_t=\left(\theta_1\dot{x}_t+\theta_2 x_t\right)dt+dW_t.\qquad(11)$$

В матричной форме процесс имеет вид $dX_t=AX_t+BW_t$, где $X_t=\begin{pmatrix}\dot{x}_t\\ x_t\end{pmatrix}$; $A=\begin{pmatrix}0 & 1\\ \theta_2 & \theta_1\end{pmatrix}$; $B=\begin{pmatrix}0 & 0\\ 0 & \sigma\end{pmatrix}$;

W_t – стандартный двумерный винеровский процесс, причем $\left\langle W_t\right\rangle_2=w_t$. Множество устойчивости Λ_γ процесса (11) задается равенством $\Lambda_\gamma=\left\{\left(\theta_1,\theta_2\right):\theta_2<\frac{\gamma}{2}\theta_1+\gamma^2,\theta_1<0\right\},\gamma>0.$ $F=diag\left(\frac{\sigma^2}{2\theta_1\theta_2},\frac{\sigma^2}{-2\theta_1}\right)$,

$\left\|F^{-2}\right\|^{\frac{1}{2}}=\frac{2\left|\theta_1\right|\sqrt[4]{1+\theta_2^4}}{\sigma^2}$, поэтому при больших H средняя длительность процедуры оценивания удовлетворяет соотношению $E_\theta\tau(H)\sim H\frac{2\left|\theta_1\right|\sqrt[4]{1+\theta_2^4}}{\sigma^2}$ для всех $\theta=\left(\theta_1,\theta_2\right)'\in K$, $\gamma>0$. При этом СКТ оценивания равномерно по компакту K определяется неравенством (10), причем $\varphi(\theta)=trF\left\|F^{-2}\right\|^{1/2}=(1-\theta_2)\sqrt[4]{1+\theta_2^4}\Big/\left|\theta_2\right|$. Априорную область для параметров модели θ_1 и θ_2 зададим следующим компактом $K\left\{\left(\theta_1,\theta_2\right):-0,6\le\theta_1\le-0,2;\ -0,6\le\theta_2\le-0,2\ \right\}$. Максимизация функции $\varphi(\theta)$ по этой области дает следующую постоянную $a_k=\max\limits_{\theta\in K}\varphi(\theta)=6,002399$, используемую в теореме 2.

В табл. 1 приводятся результаты численного моделирования значений оцениваемых параметров θ_1 и θ_2. Здесь H – величина порога, $N^*\left(H\right)$ –

выборочная средняя длительность процедуры, $N^*(H)/H$ – удельная средняя длительность и $\|F^{-2}\|^{1/2}$ ее асимптотическое теоретическое значение.

При сравнении последних двух строк табл. 1 видно, что с увеличением величины порога H выборочная характеристика $N^*(H)/H$ стремится к теоретическому значению, что свидетельствует о согласии результатов моделирования с утверждением теоремы 1. Выборочные характеристики, касающиеся точности последовательных оценок, полученных по 50 реализациям процедуры с порогом $H = 300$, представлены в табл. 2.

Таблица 1

Результаты численного моделирования

θ_1	–0,3	–0,3	–0,3	–0,3	–0,3
θ_2	–0,2	–0,2	–0,2	–0,2	–0,2
H	50	100	300	500	1000
$N^*(H)$	100,1	131,2	232	315,6	605,6
$\frac{N^*(H)}{H}$	2,002	1,312	0,773	0,631	0,606
$\|F^{-2}\|^{1/2}$	0,60024	0,60024	0,60024	0,60024	0,60024

Таблица 2

Результаты численного моделирования

θ_1	-0,3	-0,4	-0,5	-0,2	-0,2	-0,2
θ_2	-0,2	-0,2	-0,2	-0,3	-0,4	-0,5
$SD(\theta_1^*)$	0,0010	0,0045	$3\cdot10^{-5}$	0,0001	0,0047	0,0002
$SD(\theta_2^*)$	$2\cdot10^{-5}$	0,0008	$7\cdot10^{-6}$	0,0001	0,0011	0,0001
$SD(\theta_1^{**})$	0,0006	0,0001	0,0070	0,0009	0,0020	0,0048
$SD(\theta_2^{**})$	0,0010	0,0005	$2\cdot10^{-5}$	0,0032	0,0003	0,0019
$\varphi(\theta)/H$	0,0200	0,0200	0,0200	0,0200	0,0200	0,0200

Здесь наряду со значениями параметров модели θ_1 и θ_2, в следующих за ними строках, приводятся СКТ полученных последовательных оценок. В строках $SD\left(\theta_1^{**}\right)$ и $SD\left(\theta_2^{**}\right)$ даются среднеквадратические уклонения обычных оценок МНК (3), вычисленных по реализации длины T. При этом значение T находилось из условия $T = N^*(50) = \frac{1}{50}\sum_{i=1}^{50} N_i(50)$, где $N_i(50)$ определяет длительность последовательной процедуры в i-м эксперименте, $\varphi(\theta)/H$ – верхняя граница доверительной области для среднеквадратической точности последовательной оценки. Результаты численного моделирования показывают хорошую согласованность с теоретическими результатами. Сравнение последовательных и обычных МНК оценок показывает, что они близки по точности. При этом, однако, следует учитывать, что последовательные оценки позволяют контролировать СКТ путем выбора порога H. Заметим, что при моделировании оценок МНК с фиксированной длительностью наблюдений T, эта длительность выбиралась с помощью последовательной процедуры.

Литература

1. Арато М. Линейные стохастические системы с постоянными коэффициентами. Статистический подход / пер. с англ. М. : Наука, 1989. 304 с.
2. Ибрагимов И.А., Хасьминский Р.З. Асимптотическая теория оценивания. М. : Наука, 1979. 528 с.
3. Липцер Р.Ш., Ширяев А.Н. Статистика случайных процессов. М. : Наука, 1974. 696 с.
4. Новиков А.А. Последовательное оценивание параметров процессов диффузионного типа // Математические заметки. 1972. Т. 12, вып. 5. С. 627–638.
5. Konev V.V., Pergamenshchikov S.M. Sequential estimation of the parameters in a trigonometric regression model with the Gaussian coloured noise // Statistical Inference for Stochastic Processes. 2003. № 6. P. 215–235.
6. Kabanov Yu., Pergamenshchikov S. Two scale stochastic systems: asymptotic analysis and control. Berlin ; New York : Springer, 2003. 266 p.
7. Емельянова Т.В., Конев В.В. О последовательном оценивании параметров непрерывной авторегрессии // Вестник Томского государственного университетата. 2013. № 5(25). С. 12–25.