О *k*-АДАПТИВНЫХ КОМБИНИРОВАННЫХ ОЦЕНКАХ ВЕРОЯТНОСТИ

Ю. Г. Дмитриев, П. Ф. Тарасенко

Национальный исследовательский
Томский государственный университет

1. Введение. При исследовании математических моделей разнообразных систем массового обслуживания (СМО) [1] возникает необходимость расчета тех или иных вероятностных характеристик систем. Обычно это распределения вероятностей состояния системы, распределения времени обслуживания заявки, вероятности некоторых событий, моменты различных порядков, производящие и характеристические функции и т.д. Вычисление таких характеристик проводится в рамках исследуемой математической модели СМО, отражающей реальную систему, с помощью численных методов и (или) имитационного моделирования. Для практики представляют интерес статистические оценки вероятностных характеристик, построенные по данным, полученных в результате наблюдений за реальной системой. При этом результаты теоретических расчетов математической модели СМО могут использоваться как дополнительная информация при построении статистических оценок характеристик реальных систем с целью повышения их точности или сокращения числа реальных наблюдений при сохранении заданной точности. Кроме того, исследователь может, исходя из своего опыта и знаний, сделать свои предположения о значениях вероятностных характеристик (априорные догадки), которые также можно использовать при статистическом оценивании характеристик.

В работах [2], [3] предложены комбинированные оценки вероятностных характеристик в виде линейных функционалов, учитывающих одновременно эмпирическую оценку и априорную догадку, и исследованы их асимптотические (при увеличении объема наблюдений) свойства. Методы статистического оценивания вероятности с использованием дополнительной априорной информации рассмотрены в [4]. В данной работе предлагаются *k*-адаптивные комбинированные оценки вероятности и анализируются их свойства при конечном объеме наблюдений.

2. Постановка задачи и структура оценки. Пусть $X_1,\ldots,X_n$ - независимые результаты эксперимента объема n, а $P = P(B)$ - вероятность некоторого события B, которое может наступить в данном эксперименте. Пусть p_a - априорная догадка, которая выступает в качестве возможного значения вероятности P. Задача состоит в построении оценки для неизвестной

вероятности, учитывающей совместно эмпирическую оценку $\hat{P} = \hat{P}(B) = n^{-1}\sum_{i=1}^{n} I_B(X_i)$ и p_a, здесь $I_B(.)$ - индикаторная функция.

Следуя работам [2,3], рассмотрим комбинированную оценку

$$\hat{P}_\lambda = (1-\lambda)\hat{P} + \lambda p_a, \tag{1}$$

где оптимальный весовой коэффициент λ выбран из условия минимума среднеквадратической ошибки (СКО) $S^2(\lambda) = M[\hat{P}_\lambda - P]^2$ и определяется выражением

$$\lambda = \left(1 + n\Delta^2/\sigma^2\right)^{-1}. \tag{2}$$

Здесь $\sigma^2 = P(1-P)$, $\Delta = P - p_a$ величина отклонения априорной догадки от истинного значения искомой вероятности. Весовой коэффициент λ изменятся в пределах $0 < \lambda \le 1$ и показывает, какое влияние оказывает каждое из слагаемых в комбинированной оценке (1).

Формулу (1) можно записать как

$$\hat{P}_\lambda = \hat{P} - \lambda\left(\hat{P} - p_a\right), \tag{3}$$

$$\hat{P}_\lambda = p_a + (1-\lambda)\left(\hat{P} - p_a\right), \tag{4}$$

Формулу (3) можно трактовать следующим образом: исходной является оценка $\hat{P}$, а априорная догадка p_a выступает в качестве дополнительной информации, которой располагает исследователь до проведения эксперимента. В формуле (4) исходной оценкой является априорная догадка p_a, а $\hat{P}$ выступает как дополнительная информация, содержащаяся в экспериментальных данных. В соответствии с (3) и (4) минимум СКО представим в двух формах записи.

$$S^2(\lambda) = M[\hat{P} - P]^2 - \frac{[M(\hat{P} - P)^2]^2}{D\hat{P} + (P - p_a)^2} = D\hat{P} - \frac{(D\hat{P})^2}{D\hat{P} + \Delta^2} = (1-\lambda)\sigma^2 / n, \tag{5}$$

где дисперсия $D\hat{P} = P(1-P)/n$ характеризует точность оценки $\hat{P}$, а коэффициент $(1-\lambda)$ показывает, во сколько раз уменьшается СКО комбинированной оценки (1) по сравнению с $\hat{P}$.

$$S^2(\lambda) = M[p_a - P]^2 - \frac{[M(p_a - P)^2]^2}{D\hat{P} + (P - p_a)^2} = \Delta^2 - \frac{\Delta^4}{D\hat{P} + \Delta^2} = \lambda\Delta^2, \tag{6}$$

Здесь Δ^2 характеризует точность оценивания (в смысле СКО), когда оценкой выступает p_a, коэффициент λ показывает, во сколько раз уменьшается СКО комбинированной оценки за счет привлечения $\hat{P}$ по сравнению с p_a.

Величина $(D\hat{P})^2 / \left(D\hat{P} + \Delta^2\right)$ в (5) задает выигрыш в точности оценивания за счет привлечения априорной догадки p_a, если исходной оценкой является $\hat{P}$. Величина $(\Delta)^4 / \left(D\hat{P} + \Delta^2\right)$ в (6) характеризует выигрыш в точности оценивания от использования $\hat{P}$, если исходной оценкой является априорная догадка p_a.

3. Адаптивные оценки. Оптимальный коэффициент λ, как правило, неизвестен. Это обстоятельство затрудняет практическое использование комбинированной оценки (1). Выходом из этого положения является построение адаптивных комбинированных оценок вероятности путем замены неизвестного значения λ на его статистическую оценку. Однако при этом нарушаются оптимальные свойства оценок, и возникает вопрос, при каких условиях адаптивные комбинированные оценки являются предпочтительнее обычной оценки $\hat{P}$ по величине СКО.

Заменяя неизвестное P на $\hat{P}$, в качестве первой оценки λ возьмем $\hat{\lambda}_1 = \left(1 + n\hat{\Delta}^2/\hat{\sigma}^2\right)^{-1}$, где $\hat{\Delta} = \hat{P} - p_a$ - оценка отклонения (смещения), $\hat{\sigma}^2 = \hat{P}(1-\hat{P})$ - оценка дисперсии. Подставляя $\hat{\lambda}_1$ в (1) получим первую адаптивную оценку $\hat{P}_1 = \hat{P} - \hat{\lambda}_1(\hat{P} - p_a)$. Используя $\hat{P}_1$ в оценивании смещения Δ, получим $\hat{\Delta}_1 = \hat{P}_1 - p_a$, затем вторую оценку $\hat{\lambda}_2 = \left(1 + n\hat{\Delta}_1^2/\hat{\sigma}^2\right)^{-1}$ и $\hat{P}_2 = \hat{P} - \hat{\lambda}_2(\hat{P} - p_a)$. Повторяя такую процедуру последовательно k раз, приходим к следующим выражениям для оценок

$$\hat{P}_{k,1} = \hat{P} - \hat{\lambda}_{k,1}(\hat{P} - p_a) = p_a + (1 - \hat{\lambda}_{k,1})(\hat{P} - p_a), \qquad (7)$$

$$\hat{\lambda}_{k,1} = \left(1 + n\hat{\Delta}_{k-1}^2/\hat{\sigma}^2\right)^{-1} = \left(1 + q_{k-1}^2(\sqrt{n}\hat{\Delta}/\hat{\sigma})\right)^{-1},$$

где $\hat{\Delta}_{k-1,1} = \hat{P}_{k-1,1} - p_a$, $\hat{\Delta}_0 = \hat{\Delta}$, $q_k(x) = xq(q_{k-1}(x))$, $k \in \{1,2,3,...\}$, $q(x) = x^2/(1+x^2)$, $q_0(x) = x$, $x \in R^1$ и, как показано в [3],

$$\lim_{k\to\infty} q_k(x) = \begin{cases} (x - \sqrt{x^2-4})/2, x \le 2, \\ 0, |x| < 2, \\ (x + \sqrt{x^2-4})/2, x \ge 2. \end{cases}$$

Оценку $\hat{P}_{k,1}$ назовем k – адаптивной. Подчеркнем, что здесь на каждом шаге при оценивании Δ использовалась априорная догадка p_a. Данная оценка является смещенной в отличие от $\hat{P}$. Поскольку величина $\nu = n\hat{P}$ имеет биномиальное распределение с параметрами (n,P), то СКО оценки $\hat{P}_{k,1}$ можно вычислить по формуле

$$S_{k,1}^2 = M[\hat{P}_{k,1} - P]^2 = \sum_{m=0}^{n} [\Psi_{k,1}(m,n,p_a) - P]^2 \frac{n!}{m!(n-m)!} P^m (1-P)^{n-m}, \qquad (8)$$

где $\Psi_{k,1}(m,n,p_a) = \dfrac{m}{n} - \dfrac{m - np_a}{n(1 + q_{k-1}^2[\sqrt{n}(m - np_a)/\sqrt{m(n-m)}])}$.

В качестве второй оценки λ возьмем $\hat{\lambda}_{k,2} = \left(1 + q_{k-1}^2(\sqrt{n}\hat{\Delta}/\sqrt{p_a(1-p_a)})\right)^{-1}$, здесь неизвестная дисперсия $\sigma^2 = P(1-P)$ заменена на $\sigma_a^2 = p_a(1-p_a)$. Подставляя в (1) вместо λ оценку $\hat{\lambda}_{k,2}$, мы получим вторую адаптивную комбинированную оценку $\hat{P}_{k,2} = \hat{P} - \hat{\lambda}_{k,2}(\hat{P} - p_a)$. Эта оценка также является смещенной и ее СКО вычисляется по формуле

$$S_{k,2}^2 = M[\hat{P}_{k,2} - P]^2 = \sum_{m=0}^{n} [\Psi_{k,2}(m,n,p_a) - P]^2 \frac{n!}{m!(n-m)!} P^m (1-P)^{n-m}, \qquad (9)$$

где $\Psi_{k,2}(m,n,p_a) = \dfrac{m}{n} - \dfrac{m - np_a}{n(1 + q_{k-1}^2[\sqrt{n}(m - np_a)/\sqrt{p_a(1-p_a)}])}$.

В качестве третьей оценки λ возьмем $\hat{\lambda}_{k,3} = \left(1 + q_{k-1}^2(\sqrt{n}\hat{\Delta}/0.5)\right)^{-1}$, где неизвестная дисперсия $\sigma^2 = P(1-P)$ заменена на максимальное значение, равное 0,25. Подставляя $\hat{\lambda}_{k,3}$ в (1), получаем третью адаптивную комбинированную оценку $\hat{P}_{k,3} = \hat{P} - \hat{\lambda}_{k,3}(\hat{P} - p_a)$. Эта оценка является смещенной и ее СКО вычисляется по формуле

$$S_{k,3}^2 = M[\hat{P}_{k,3} - P]^2 = \sum_{m=0}^{n}[\Psi_{k,3}(m,n,p_a) - P]^2 \frac{n!}{m!(n-m)!} P^m (1-P)^{n-m}, \qquad (10)$$

где $\Psi_{k,3}(m,n,p_a) = \dfrac{m}{n} - \dfrac{m - np_a}{n(1 + q_{k-1}^2[\sqrt{n}(m - np_a)/\sqrt{0.25}])}$.

4. Сравнение СКО оценок. Для сравнения СКО оценок введем отношения

$$e_0 = \frac{D\hat{P}}{D\hat{P}} = 1, e = \frac{S^2(\lambda)}{D\hat{P}}, e_{k,1} = \frac{S^2{}_{k,1}}{D\hat{P}}, e_{k,2} = \frac{S^2{}_{k,2}}{D\hat{P}}, e_{k,3} = \frac{S^2{}_{k,3}}{D\hat{P}}.$$

Формулы (8) - (10) позволяют вычислить значения этих отношений в зависимости от величин *P, k, n* и p_a. Отношения $e_{k,1}$, $e_{k,2}$ и $e_{k,3}$ выделяют интервалы значений *P*, в которых эти отношения меньше, чем $e_0 = 1$. Наличие таких интервалов для *P* совместно с объемом наблюдений *n* и значениями p_a задают условия, при которых адаптивные комбинированные оценки предпочтительнее обычной оценки $\hat{P}$ по величине СКО .

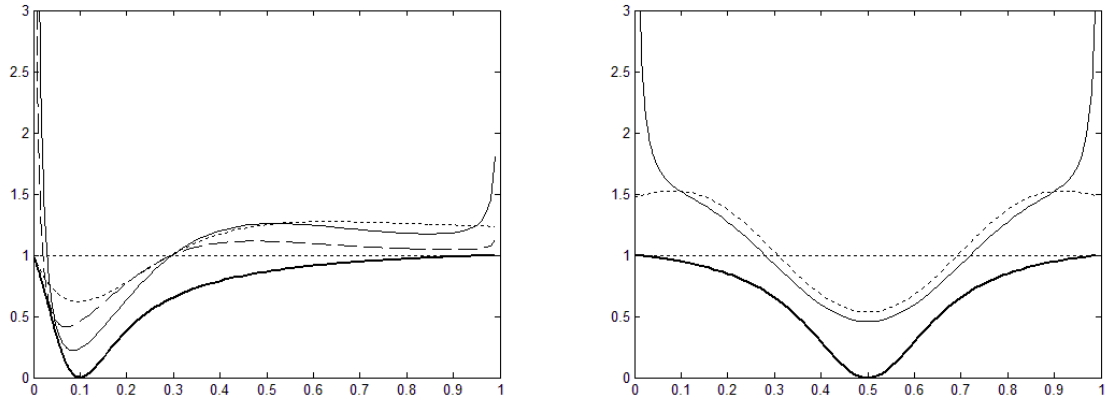

Рис. 1. Зависимость отношений $e_{1,1}$ (точечная линия), $e_{1,2}$ (пунктирная линия) и $e_{1,3}$ (сплошная линия) от оцениваемой вероятности P. Жирная линия соответствует оптимальной оценке (т.е. отношению e). Объем выборки равен 10, априорная догадка $p_a = 0.1$ на левом графике, $p_a = 0.5$ на правом графике. Если $p_a = 0.5$, то $e_{1,2} = e_{1,3}$ и пунктирная линия совпадает со сплошной линией на правом графике.

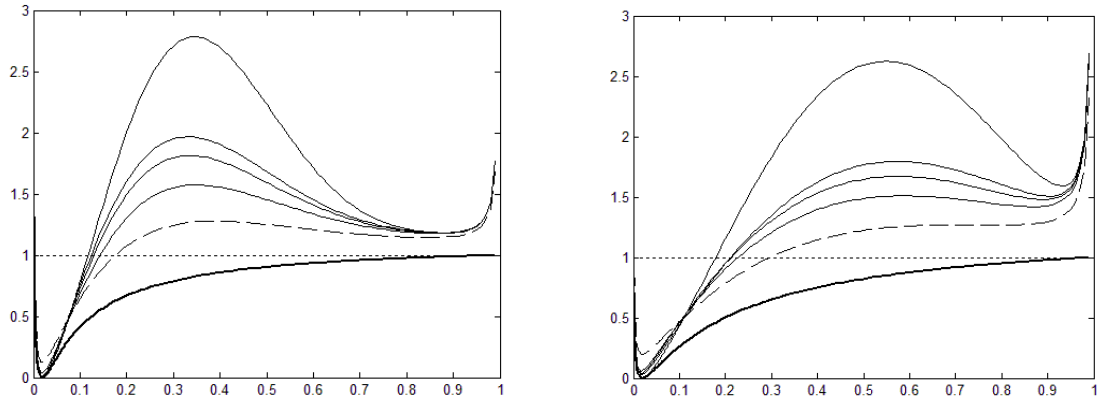

Рис. 2. Зависимость отношения $e_{k,3}$ от оцениваемой вероятности P при различных k. Графики иллюстрируют точность оценивания малой вероятности с априорной догадкой $p_a = 0.02$. Жирная линия соответствует оптимальной оценке (т.е. отношению e), пунктирная линия соответствует случаю k=1, тонкие сплошные линии отвечают случаям k=2, k=3, k=4, k=∝. Объем выборки n=5 для левого графика, n=10 для правого графика.

Статья написана в рамках научного проекта (№ 8.1.98.2015), выполненного при поддержке Программы «Научный фонд Томского государственного университета им. Д.И. Менделеева» в 2015г.

Литература

1. Гарайшина И.Р., Моисеева С.П., Назаров А.А. Методы исследования коррелированных потоков и специальных систем массового обслуживания. – Томск: Изд-во НТЛ, 2010. – 204 с.

2. Дмитриев Ю.Г., Тарасенко П.Ф. Использование априорной информации в статистической обработке экспериментальных данных. // Известия вузов. Физика. – 1992. -.№ 9. С. 136-142.

3. Dmitriev Yu., Tarassenko P., and Ustinov Yu. // A. Dudin et al. (Eds.): ITMM 2014, CCIS 487. – 2014. – P. 82–90.

4. Дмитриев Ю.Г., Устинов Ю.К. Статистическое оценивание распределений вероятности с использованием дополнительной информации. – Томск: Изд-во Том. ун-та, 1988. – 194 с.