ТОМСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ

Механико-математический факультет
кафедра общей математики

Задачи олимпиады 2014 года

Составители:
доцент Галанова Н. Ю.,
ст. пр. Кошельский Ю. К.,
доцент Лазарева Е. Г.,
доцент Путятина Е. Н.,
доцент Тимошенко Е. А.,
доцент Шапошникова Е.В.

Томск
2015

ОДОБРЕНО кафедрой общей математики

Зав. кафедрой доцент Е.Н. Путятина

Рассмотрено и утверждено методической комиссией ММФ

Протокол № 12 от 26 ноября 2015 г.

Председатель методической комиссии О. П. Федорова.

В данной работе представлены задачи с решениями олимпиад по математике, которые прошли в Томском государственном университете в 2013 году. Ряд задач являются авторскими. Многие задачи взяты из сборника избранных задач из журнала “American mathematical monthly” под редакцией В. М. Алексеева, а также из сборника “Избранные олимпиадные задачи” Н. Б. Васильева, А. П Савина и А. А. Егорова.

Предложенные задания могут быть использованы для подготовки к олимпиаде по математике студентов дневной формы обучения ММФ, ФПМК,РФФ, ФТФ, ФФ, ФИнф, МФУ, ХФ, ГГФ, БИ.

ОЛИМПИАДА 2014

(естественно-научные факультеты)

1. Решить в натуральных числах уравнение $n!+5n+13=k^2$.

2. Среди обыкновенных дробей с положительным знаменателем, расположенных между числами $\frac{96}{35}$ и $\frac{97}{36}$ найти дробь с наименьшим знаменателем.

3. Даны две точки A и B на плоскости. Найти множество точек M, для которых треугольник AMB прямоугольный. Нарисовать это множество. Дать объяснение.

4. Каким образом можно измерить скорость течения реки?

5. Найти площадь, ограниченную линиями, заданными в полярных координатах: $\varphi=0$, $\varphi=\frac{\pi}{6}$, $r^2=\frac{a^2}{\cos^2\varphi-\sin^2\varphi}$.

6. Доказать неравенство: $\frac{1}{20\sqrt{2}}\le\int\limits_0^1\frac{x^{19}}{\sqrt{1+x^2}}dx\le\frac{1}{20}$.

7. Вычислить: $\begin{pmatrix}\cos x & -\sin x\\ \sin x & \cos x\end{pmatrix}^n$, где n – натуральное число.

ОЛИМПИАДА 2014

(физические факультеты, 1-й курс)

1. Известно, что след квадратной матрицы A порядка 2 равен 3 и определитель матрицы $A-A^{-1}$ равен 0. Найдите все возможные значения определителя матрицы A. (*Следом матрицы* называется сумма всех элементов, стоящих на его главной диагонали).

2. Многочлен $p(x)$ с целыми коэффициентами принимает значение 13 в четырех различных целых точках. Доказать, что он не имеет целых корней.

3. Решить уравнение

$$\left(1+x+x^2\right)\left(1+x+...+x^{10}\right)=\left(1+x+...+x^6\right)^2.$$

4. Произведение нескольких различных простых чисел делится на каждое из этих чисел, уменьшенное на единицу. Чему может быть равно это произведение?

5. Найти $\lim\limits_{n\to\infty} y_n$, где $y_n = \max\left(x^2 - x^{2n}\right)$, $x \in [0,1]$.

6. Даны две точки А и В на плоскости. Найти множество точек М, для которых треугольник АМВ остроугольный. Нарисовать это множество. Дать объяснение.

7. По данному натуральному числу a_0 строится последовательность $\{a_n\}$ следующим образом:

$a_{n+1} = a_n^2 - 4a_n + 7$, если a_n нечетно, и $\dfrac{a_n}{2}$, если a_n четно.

Докажите, что при $a_0 = 2014$ выполнено: $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \infty$.

ОЛИМПИАДА 2014

(физические факультеты, старшие курсы)

1. Известно, что в наборе вещественных чисел $a_1, a_2, \ldots, a_9$ есть хотя бы четыре попарно различных. Докажите, что из этих девяти чисел можно составить ненулевой определитель третьего порядка.

2. Приведите пример непрерывной функции $f(x)$ такой, что выполнены следующие условия:

а) $f(x) > 0$ при всех $x \geq 1$;

б) $f(1) > f(2) > f(3) > \ldots > f(n) > f(n+1) > \ldots$;

в) ряд $f(1) + f(2) + f(3) + \ldots + f(n) + f(n+1) + \ldots$ сходится;

г) интеграл $\int\limits_1^{+\infty} f(x)dx$ расходится.

3. Вычислите интеграл $\int_0^1 \dfrac{dx}{[1/x]}$, где $[a]$ – целая часть числа a.

4. Найти определенный интеграл: $\int\limits_0^{\pi^2} \frac{\sin\sqrt{x}}{\sqrt{1+\cos^2\sqrt{x}}}\,dx$.

5. Исследовать на сходимость ряд $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}'} \frac{1}{n}$, где n - натуральные числа, в десятичной записи которых отсутствует цифра 7.

6. Решить уравнение $\left|\frac{2-\sqrt{x-1}-x}{x}\right| + \left|\frac{2-\sqrt{x-1}+x}{x}\right| = 2-\sqrt{x-1}$.

7. Решить систему ДУ: $\begin{cases} x' = \dfrac{1+y\sqrt{z}}{y}, \\ y' = -xy^2 - y^2\sqrt{z}, \\ z' = \dfrac{2xy\sqrt{z}+2\sqrt{z}}{y}. \end{cases}$

Решения (естественные факультеты)

1. Решить в натуральных числах уравнение $n!+5n+13=k^2$.

Решение. При $n\ge 5$ левая часть есть натуральное число, оканчивающееся на 3 либо 8 ($n!$ при $n\ge 5$ оканчивается на 0). Никакое натуральное число в квадрате не может оканчиваться на 3 или 8. Следовательно, для этих n решений нет. Значения $n\in\{1,2,3,4\}$ проверяются непосредственно:

$n=1 \;\Rightarrow\; 1+5+13=19\ne k^2$; $\quad n=2 \;\Rightarrow\; 2+10+13=25=5^2$;

$n=3 \;\Rightarrow\; 6+15+13=34\ne k^2$;

$n=4 \;\Rightarrow\; 24+20+13=57\ne k^2$.

Поэтому единственным решением является $n=2,\ k=5$.

2. Среди обыкновенных дробей с положительным знаменателем, расположенных между числами $\frac{96}{35}$ и $\frac{97}{36}$, найти дробь с наименьшим знаменателем.

Решение. $\frac{96}{35}=\frac{96\cdot 36}{35\cdot 36}=\frac{3456}{2^2\cdot 3^2\cdot 5\cdot 7}$, $\frac{97}{36}=\frac{97\cdot 35}{35\cdot 36}=\frac{3395}{2^2\cdot 3^2\cdot 5\cdot 7}$.

Среди 62 чисел между 3395 и 3456 нужно найти то, которое после сокращения дроби дает наименьший знаменатель.

$35\cdot 36=2\cdot 630$
$35\cdot 36=3\cdot 420$
$35\cdot 36=4\cdot 315$
$35\cdot 36=5\cdot 252$
$35\cdot 36=6\cdot 210$
$35\cdot 36=7\cdot 180$
$35\cdot 36=9\cdot 140$
$35\cdot 36=10\cdot 126$
$35\cdot 36=12\cdot 105$
$35\cdot 36=14\cdot 90$
$35\cdot 36=15\cdot 84$
$35\cdot 36=18\cdot 70$
$35\cdot 36=20\cdot 63$
$35\cdot 36=21\cdot 60$

Далее рассматривать не имеет смысла, так как среди последовательных 62 чисел 3395, 3396, …, 3456 обязательно будет кратное 60. Проверим теперь, будут ли во множество чисел от 3395 до 3456 попадать кратные сомножителям приведенного столбца:

$630 \Rightarrow 5\cdot 630=3150$ $\quad 6\cdot 630=3780$
$420 \Rightarrow 8\cdot 420=3360$ $\quad 9\cdot 420=3780$
$315 \Rightarrow 10\cdot 315=3150$ $\quad 11\cdot 315=3465$
$252 \Rightarrow 13\cdot 252=3276$ $\quad 14\cdot 252=3528$
$210 \Rightarrow 16\cdot 210=3360$ $\quad 17\cdot 210=3570$
$180 \Rightarrow 18\cdot 180=3240$ $\quad 19\cdot 180=3420<3456$

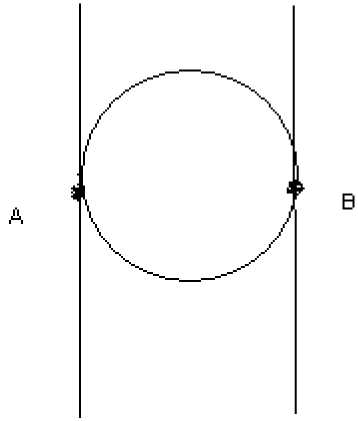
Следовательно, искомая дробь равна $\frac{3420}{35\cdot 36}=\frac{19}{7}$.

3. Даны две точки A и B на плоскости. Найти множество точек M, для которых треугольник AMB прямоугольный. Нарисовать это множество. Дать объяснение.

Решение.

Треугольник AMB – прямоугольный, если выполняется одно из трёх условий: 1) $\angle$ AMB$=90^\circ$, 2) $\angle$ BAM$=90^\circ$, 3) $\angle$ ABM$=90^\circ$.

Искомое множество поэтому является объединением трёх множеств: 1) окружность с диаметром AB, 2) прямая l_A, проходящая через точку A и перпендикулярная AB, 3) прямая l_B, проходящая через точку B и перпендикулярная AB. Нужно исключить точки A и B, приводящие к вырожденному треугольнику.



4. Каким образом можно измерить скорость течения реки, имея в своем распоряжении катер?

Решение. Выделим участок реки, имеющий известную длину S, и засечем время движения катера по этому участку в одном и в другом направлениях. Пусть это будут x и y, $x < y$. Тогда для величины скорости движения в одном и в другом направлениях получим выражения $\frac{S}{x}$ и $\frac{S}{y}$, причем $u + v = \frac{S}{x}$, $u - v = \frac{S}{y}$, где u, v – модули скорости движения катера и течения реки соответственно. Поэтому $2v = S\left(\frac{1}{x} - \frac{1}{y}\right)$, $v = \frac{1}{2}S\left(\frac{1}{x} - \frac{1}{y}\right)$.

5. Найти площадь, ограниченную линиями, заданными в полярных координатах: $\varphi = 0$, $\varphi = \frac{\pi}{6}$, $r^2 = \frac{a^2}{\cos^2\varphi - \sin^2\varphi}$.

Решение. Площадь ограничивают два луча и равнобочная гипербола $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{a^2}=1$. Поэтому

$$S=\frac{1}{2}\int\limits_0^{\pi/6}\frac{a^2}{\cos^2\varphi-\sin^2\varphi}d\varphi=\frac{a^2}{2}\int\limits_0^{\pi/6}\frac{d\varphi}{\cos^2\varphi\left(1-\operatorname{tg}^2\varphi\right)}=\frac{a^2}{2}\int\limits_0^{\pi/6}\frac{d\left(\operatorname{tg}\varphi\right)}{\left(1-\operatorname{tg}^2\varphi\right)}=$$

$$=\frac{a^2}{4}\ln\left(\frac{1+\operatorname{tg}\varphi}{1-\operatorname{tg}\varphi}\right)\Bigg|_0^{\pi/6}=\frac{a^2}{4}\ln\frac{3+\sqrt{3}}{3-\sqrt{3}}.$$

6. Доказать неравенство: $\frac{1}{20\sqrt{2}}\le\int\limits_0^1\frac{x^{19}}{\sqrt{1+x^2}}dx\le\frac{1}{20}$.

Решение. $\int\limits_0^1 x^{19}dx=\frac{1}{20}$, $\frac{1}{\sqrt{2}}\le\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}\le 1$ на отрезке $[0,1]$, поэтому $\frac{x^{19}}{\sqrt{2}}\le\frac{x^{19}}{\sqrt{1+x^2}}\le x^{19}$, откуда, интегрируя неравенство, получим данную оценку.

7. Вычислить: $\begin{pmatrix}\cos x & -\sin x\\ \sin x & \cos x\end{pmatrix}^n$, где n – натуральное число.

Решение.

$$\begin{pmatrix}\cos x & -\sin x\\ \sin x & \cos x\end{pmatrix}^2=\begin{pmatrix}\cos x & -\sin x\\ \sin x & \cos x\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\cos x & -\sin x\\ \sin x & \cos x\end{pmatrix}=$$

$$=\begin{pmatrix}\cos^2 x-\sin^2 x & -2\sin x\cos x\\ 2\sin x\cos x & \cos^2 x-\sin^2 x\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\cos 2x & -\sin 2x\\ \sin 2x & \cos 2x\end{pmatrix}.$$

Следуя методу математической индукции, предположим, что $\begin{pmatrix}\cos x & -\sin x\\ \sin x & \cos x\end{pmatrix}^n=\begin{pmatrix}\cos nx & -\sin nx\\ \sin nx & \cos nx\end{pmatrix}$. Тогда

$$\begin{pmatrix} \cos x & -\sin x \\ \sin x & \cos x \end{pmatrix}^{n+1} = \begin{pmatrix} \cos nx & -\sin nx \\ \sin nx & \cos nx \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos x & -\sin x \\ \sin x & \cos x \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} \cos nx \cos x - \sin nx \sin x & -\sin x \cos nx - \sin nx \cos x \\ \sin nx \cos x + \sin x \cos nx & \cos nx \cos x - \sin nx \sin x \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} \cos(n+1)x & -\sin(n+1)x \\ \sin(n+1)x & \cos(n+1)x \end{pmatrix}.$$

Решения (первый курс)

1. Известно, что след квадратной матрицы A порядка 2 равен 3 и определитель матрицы $A - A^{-1}$ равен 0. Найдите все возможные значения определителя матрицы A. (*Следом матрицы* называется сумма всех элементов, стоящих на его главной диагонали.)

Ответ: 2 или –4.

Решение. Пусть $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$; обозначим $x = |A|$. Тогда $bc = ad - (ad - bc) = ad - x$ и, значит,

$$0 = \left|A - A^{-1}\right| = \left| \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} - \frac{1}{x} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix} \right| =$$

$$= \left| \frac{1}{x} \begin{pmatrix} xa - d & (x+1)b \\ (x+1)c & xd - a \end{pmatrix} \right| = \frac{(xa-d)(xd-a) - (x+1)^2 bc}{x^2} =$$

$$= \frac{x^2 ad + ad - xa^2 - xd^2 - (x^2 + 2x + 1)(ad - x)}{x^2} =$$

$$= \frac{x^2 ad + ad - xa^2 - xd^2 - x^2 ad + x^3 - 2xad + 2x^2 - ad + x}{x^2} =$$

$$= \frac{-xa^2 - xd^2 + x^3 - 2xad + 2x^2 + x}{x^2} =$$

$$= \frac{x^2 + 2x + 1 - a^2 - d^2 - 2ad}{x} = \frac{(x+1)^2 - (a+d)^2}{x}.$$

По условию имеем $a + d = 3$, отсюда $x = 2$ или $x = -4$. Примером, показывающим, что оба варианта возможны, могут служить, например, матрицы $A = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$ и $A = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$; в обоих случаях матрица $A - A^{-1}$ будет вырожденной, как и требовалось.

2. Многочлен $p(x)$ с целыми коэффициентами принимает значение 13 в четырех различных целых точках. Доказать, что он не имеет целых корней.

Решение. Имеем $p(x)-13=(x-x_1)(x-x_2)(x-x_3)(x-x_4)q(x)$, где $x_1, x_2, x_3, x_4 \in \mathbb{Z}$, а $q(x)$ – многочлен с целыми коэффициентами. Допустим, что x_0– целый корень многочлена $p(x)$. Тогда $-13=(x_0-x_1)(x_0-x_2)(x_0-x_3)(x_0-x_4)q(x_0)$ так как $p(x_0)=0$. Поскольку $q(x_0)\in\mathbb{Z}$, мы получили противоречие с тем, что -13 имеет в качестве целых делителей только $1,\ -1,\ 13,\ -13$, а числа (x_0-x_1), (x_0-x_2), (x_0-x_3) и (x_0-x_4) различны.

3. Решить уравнение

$$\left(1+x+x^2\right)\left(1+x+\ldots+x^{10}\right)=\left(1+x+\ldots+x^6\right)^2.$$

Решение

Умножим обе стороны уравнения на $(1-x)^2$ (при этом могут возникнуть «лишние» корни):

$$\left(1-x^3\right)\left(1-x^{11}\right)=\left(1-x^7\right)^2.$$

Раскроем скобки: $1-x^3-x^{11}+x^{14}=1-2x^7+x^{14}$.

Перенося все слагаемые вправо и раскладывая на множители, получим $0=x^3\left(1-x^4\right)^2$,

откуда $x\in\{-1,0,1\}$. Прямой подстановкой в исходное уравнение выясняем, что -1 и 0 — корни уравнения, а 1 — не корень.

Ответ : $x\in\{-1,0\}$.

4. Произведение нескольких различных простых чисел делится на каждое из этих чисел, уменьшенное на единицу. Чему может быть равно это произведение?

Решение. Заметим, что справедлив следующий факт: если число $p_1 p_2 ... p_k$, где $p_1 < p_2 < ... < p_k$ и $k > 1$, обладает требуемым свойством, то:

а) число $p_1 p_2 ... p_{k-1}$ делится на $p_k - 1$;

б) число $p_1 p_2 ... p_{k-1}$ также обладает требуемым свойством.

Действительно, для любого $i \in \{1, 2, ... , k\}$ выполнено $1 \le p_i - 1 < p_i \le p_k$. Поскольку p_k — простое число, оно взаимно просто с $p_i - 1$; поэтому из того, что $p_1 p_2 ... p_k$ делится на $p_i - 1$, следует, что и $p_1 p_2 ... p_{k-1}$ должно делиться на $p_i - 1$. Отсюда следуют утверждения а) и б).

Если произведение состоит из единственного сомножителя p, то $p = (p-1) + 1$ должно делиться на $p - 1$, а значит, $p - 1 = 1$ и $p = 2$.

Если произведение состоит из двух сомножителей, то в силу доказанного нами факта оно должно иметь вид $2q$, где $q > 2$. Кроме того, мы знаем, что 2 должно делиться на чётное число $q - 1$. Следовательно, $q = 3$ и $2q = 6$.

Если произведение состоит из трёх сомножителей, то ввиду доказанного нами факта оно должно иметь вид $2 \cdot 3 \cdot r$, где $r > 3$. При этом $2 \cdot 3 = 6$ должно делиться на чётное число $r - 1 > 2$. Поскольку число 6 имеет лишь один такой чётный делитель (равный 6), имеем $r = 7$ и $2 \cdot 3 \cdot r = 42$.

Если произведение состоит из четырёх сомножителей, то оно должно иметь вид $2 \cdot 3 \cdot 7 \cdot s$, где $s > 7$. При этом $2 \cdot 3 \cdot 7 = 42$ должно делиться на чётное число $s - 1 > 6$. Поскольку число 42 имеет лишь два таких чётных делителя (14 и 42), имеем $s = 15$ или $s = 43$ (первый вариант невозможен, так как 15 не является простым числом). Поэтому $2 \cdot 3 \cdot 7 \cdot s = 1806$.

Если нужное нам произведение состоит из более чем четырёх сомножителей, то, используя доказанный нами факт, можно получить произведение, состоящее из пяти сомножителей и также

обладающее нужным свойством. Такое произведение должно иметь вид $2\cdot3\cdot7\cdot43\cdot t$, где $t>43$. При этом $2\cdot3\cdot7\cdot43=1806$ должно делиться на чётное число $t-1>42$. Поскольку число 1806 имеет лишь четыре таких чётных делителя (86, 258, 602 и 1806), имеем $t=87$, $t=259$, $t=603$ или $t=1807$. Все эти числа не являются простыми (делятся на 3, 7, 3 и 13 соответственно). Следовательно, искомое произведение не может состоять из пяти и более простых чисел.
Ответ: 2, 6, 42 или 1806 (нетрудно проверить, что все эти значения подходят под условие задачи).

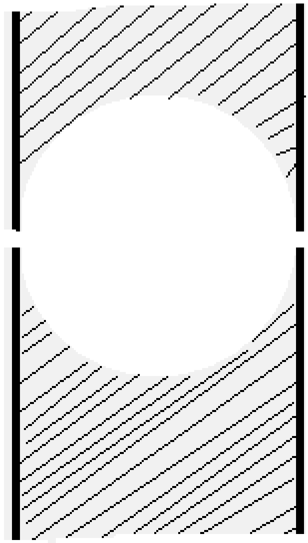
5. Найти $\lim\limits_{n\to\infty} y_n$, где $y_n=\max\left(x^2-x^{2n}\right)$, $x\in[0,1]$.

Решение. Исследуем функцию x^2-x^{2n} на экстремум: $\left(x^2-x^{2n}\right)'=2x-2nx^{2n-1}=2x\left(1-nx^{2n-2}\right)=0$, если $x=0$ и $x=\left(\frac{1}{n}\right)^{\frac{1}{2n-2}}$. Точка $x=0$ - краевой минимум, а точка $x=\left(\frac{1}{n}\right)^{\frac{1}{2n-2}}\in(0,1)$ является точкой максимума рассматриваемой функции. Поэтому $y_n=\left(\frac{1}{n}\right)^{\frac{1}{n-1}}-\left(\frac{1}{n}\right)^{\frac{2n}{2n-2}}$. Так как $\left(\frac{1}{n}\right)^{\frac{2n}{2n-2}}\to0$ при $n\to\infty$, то $\lim\limits_{n\to\infty} y_n=\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n}\right)^{\frac{1}{n-1}}=\lim\limits_{n\to\infty} e^{\frac{\ln n}{n-1}}=e^0=1$ согласно правилу Лопиталя.

6. Даны две точки А и В на плоскости. Найти множество точек М, для которых треугольник АМВ остроугольный. Нарисовать это множество. Дать объяснение.

Решение.
Треугольник АМВ – остроугольный, если выполняются одновременно три условия: 1) $\angle$АМВ$<90^\circ$, 2) $\angle$ВАМ$<90^\circ$, 3) $\angle$АВМ$<90^\circ$. Искомое множество поэтому является пересечением трёх множеств: 1) внешность круга диаметром АВ, 2) полуплоскость без граничной прямой l_A, содержащая точку В, 3)

полуплоскость без граничной прямой l_B, содержащая точку А. Их пересечение – это полоса между прямыми l_A и l_B, из которой исключён круг с диаметром АВ.



7. По данному натуральному числу a_0 строится последовательность $\{a_n\}$ следующим образом: $a_{n+1} = a_n^2 - 4a_n + 7$, если a_n нечетно, и $a_n/2$, если a_n четно. Докажите, что при $a_0 = 2014$ выполнено: $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \infty$.

Решение:

Докажем, что в рассматриваемой последовательности каждое нечетное число будет больше предыдущего нечетного числа. Пусть число a_m нечетно, т.е. $a_m = 2k+1$. Тогда $a_{m+1} = (2k+1)^2 - 4(2k+1) +7 = 4k^2 + 4k + 1 - 8k - 4 +7 = 4k^2 - 4k + 4$, откуда $a_{m+2} = 2k^2 - 2k + 2$ и $a_{m+3} = k^2 - k + 1$. При этом число a_{m+3} нечетно, так как $k^2 - k = k(k-1)$ есть четное число. Так как $a_0 = 2014$, то $a_1 = 2014/2 = 1007$ – нечетное, причем $k > 3$.Тогда имеем $k^2 - k + 1 > 2k+1$, то есть $a_{1+3} > a_1$ и по-прежнему для $a_4 = 2k+1$ имеем: $k > 3$. По индукции получаем: $a_{m+3} > a_m$ при всех натуральных m, при которых a_m нечетно.

Таким образом, мы доказали, что $a_1 < a_4 < a_7 < ... < a_{3n+1} < \dots$, поэтому при любом n имеем $a_{3n+1} \geq n$.
Рассмотрим числа, которые стоят между $a_{3n+1} = 2k+1$ и a_{3n+4}:
$a_{3n+2} = 4k^2 - 4k + 4 = 4k(k-1) + 4 > 2k+1 = a_{3n+1}$,
$a_{3n+3} = 2k^2 - 2k + 2 = 2k(k-1) + 2 > 2k+1 = a_{3n+1}$.
Отсюда следует, что $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \infty$.

Решения (старшие курсы, физические факультеты)

1. Известно, что в наборе вещественных чисел $a_1, a_2, ..., a_9$ есть хотя бы четыре попарно различных. Докажите, что из этих девяти чисел можно составить ненулевой определитель третьего порядка.

Решение. Пусть x_1, x_2, x_3, x_4 — четыре различных значения из нашего набора; можно считать, что $|x_1| \geq |x_2| \geq |x_3| \geq |x_4|$. Поскольку существует не более двух вещественных чисел, имеющих заданный модуль, имеем

$$|x_1| > |x_3| > 0 \quad \text{и} \quad |x_2| > |x_4| \geq 0, \qquad (*)$$

отсюда $|x_1| \cdot |x_2| > |x_3| \cdot |x_4|$ и, значит, $x_1 x_2 \neq x_3 x_4$. Выберем из нашего набора по одному числу со значениями x_1, x_2, x_3, x_4.

а) Допустим, что среди оставшихся пяти чисел нашлось два различных, y и z. Рассмотрим матрицу

$$A = \begin{pmatrix} ... & y & x_3 \\ z & ... & x_2 \\ x_1 & x_4 & ... \end{pmatrix}$$

(оставшиеся три числа из набора расставляем на главной диагонали произвольным образом) и матрицу

$$B = \begin{pmatrix} ... & z & x_3 \\ y & ... & x_2 \\ x_1 & x_4 & ... \end{pmatrix},$$

которая получается из A перестановкой элементов y и z. Тогда

$$|A|-|B| = yx_1x_2 + zx_3x_4 - zx_1x_2 - yx_3x_4 =$$
$$=(y-z)(x_1x_2 - x_3x_4) \neq 0,$$

т.е. хотя бы один из определителей $|A|$ и $|B|$ отличен от 0.

б) Допустим, что все оставшиеся пять чисел оказались равны одному и тому же числу y.

б1) Пусть $y \neq 0$. Существует число i такое, что $x_i \neq y$; пусть для определённости $i = 1$ (остальные случаи рассматриваются аналогично). Тогда $y \cdot y \neq y \cdot x_1$ и для матриц

$$A = \begin{pmatrix} \dots & x_2 & x_1 \\ x_3 & \dots & y \\ y & y & \dots \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} \dots & x_3 & x_1 \\ x_2 & \dots & y \\ y & y & \dots \end{pmatrix},$$

как и раньше, имеем $|A|-|B| = (x_2 - x_3)(y \cdot y - y \cdot x_1) \neq 0$, т.е. хотя бы один из определителей $|A|$ и $|B|$ отличен от 0.

б2) Пусть $y = 0$. Ввиду (*) имеем

$$\begin{vmatrix} x_1 & x_4 & 0 \\ 0 & x_2 & 0 \\ 0 & 0 & x_3 \end{vmatrix} = x_1x_2x_3 \neq 0,$$

что и требовалось.

2. Приведите пример непрерывной функции $f(x)$ такой, что выполнены следующие условия:

а) $f(x) > 0$ при всех $x \geq 1$;

б) $f(1) > f(2) > f(3) > \dots > f(n) > f(n+1) > \dots$;

в) ряд $f(1) + f(2) + f(3) + \dots + f(n) + f(n+1) + \dots$ сходится;

г) интеграл $\int\limits_1^{+\infty} f(x)dx$ расходится.

Решение. Всем условиям удовлетворяет, например, функция $f(x) = e^{-x} + 1 - \cos 2\pi x$:

а) При любом x имеем $f(x) \geq e^{-x} + 1 - 1 = e^{-x} > 0$.
б) Для всякого натурального n выполнено
$f(n) = e^{-n} + 1 - 1 = e^{-n}$, поэтому последовательность $\{f(n)\}$ убывает.
в) Ряд $f(1) + f(2) + f(3) + \ldots = e^{-1} + e^{-2} + e^{-3} + \ldots$ сходится (сумма членов геометрической прогрессии со знаменателем $e^{-1} < 1$).
г) Для $M \geq 1$ имеем

$$\int_1^M f(x)dx = \left(x - e^{-x} - \frac{\sin 2\pi x}{2\pi} \right)\Bigg|_1^M = M - 1 + \left(\frac{1}{e} - e^{-M} \right) - \frac{\sin 2\pi M}{2\pi} + 0 \geq$$

$$\geq M - 1 - \frac{\sin 2\pi M}{2\pi} > M - 2,$$

поэтому $\int\limits_1^{+\infty} f(x)dx = \lim\limits_{M \to +\infty} \int\limits_1^M f(x)dx \geq \lim\limits_{M \to +\infty} (M - 2) = +\infty$, т.е.

интеграл $\int\limits_1^{+\infty} f(x)dx$ расходится.

3. Вычислите интеграл $\int_0^1 \frac{dx}{[1/x]}$, где $[a]$ – целая часть числа a.

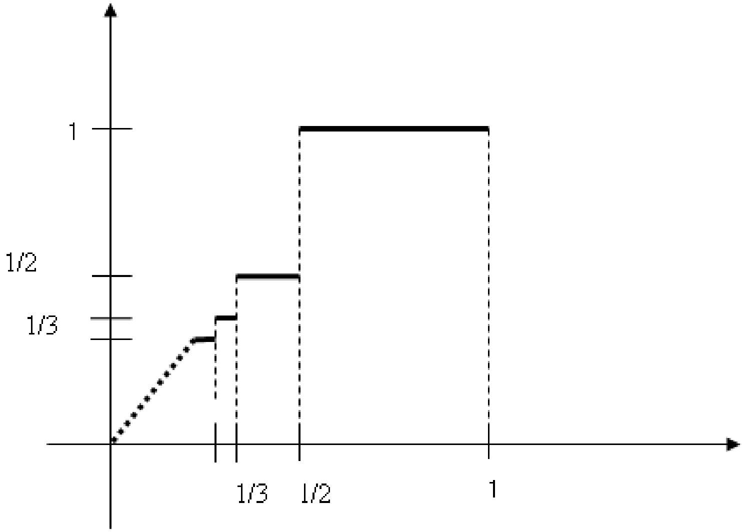
Решение.

Значение функции $f(x)$ на интервале $\left(\frac{1}{n+1}; \frac{1}{n} \right)$ равно $\frac{1}{n}$, так как

$\frac{1}{n+1} < x < \frac{1}{n} \Rightarrow n < \frac{1}{x} < n + 1 \Rightarrow \left[\frac{1}{x} \right] = n$. Таким образом,

график $f(x)$ имеет следующий вид:

Функция $f(x) = \frac{1}{[1/x]}$ интегрируема на отрезке $[0;1]$, так как она монотонна.



В силу непрерывности интеграла с переменным нижним пределом имеем

$$\int_0^1 \frac{dx}{[1/x]} = \lim_{b\to 0}\int_b^1 \frac{dx}{[1/x]} = \lim_{n\to+\infty}\int_{1/n}^1 \frac{dx}{[1/x]} =$$

$$= \lim_{n\to+\infty}\left(\int_{1/n}^{1/(n-1)} \frac{dx}{[1/x]} + \int_{1/(n-1)}^{1/(n-2)} \frac{dx}{[1/x]} + \ldots + \int_{1/3}^{1/2} \frac{dx}{[1/x]} + \int_{1/2}^{1} \frac{dx}{[1/x]}\right) =$$

$$= 1\cdot\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right) + \ldots + \frac{1}{n-2}\left(\frac{1}{n-2}-\frac{1}{n-1}\right) + \frac{1}{n-1}\left(\frac{1}{n-1}-\frac{1}{n}\right) + \ldots =$$

$$= \sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n^2} + \frac{1}{2} - \frac{1}{2\cdot 3} - \frac{1}{3\cdot 4} - \ldots = \frac{\pi^2}{6} - 1 + \frac{1}{2} - \left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right) - \left(\frac{1}{3}-\frac{1}{4}\right) - \ldots = \frac{\pi^2}{6} - 1.$$

Ответ: $\frac{\pi^2}{6} - 1$

4. Найти определенный интеграл: $\int\limits_0^{\pi^2} \frac{\sin\sqrt{x}}{\sqrt{1+\cos^2\sqrt{x}}}dx$.

Решение. Сделаем замену $z=\sqrt{x}$, $x=z^2$, $dx=2zdz$. Тогда

$\int\limits_0^{\pi^2} \frac{\sin\sqrt{x}}{\sqrt{1+\cos^2\sqrt{x}}}dx = \int\limits_0^{\pi} \frac{2z\sin z}{\sqrt{1+\cos^2 z}}dz = I$. Далее, положим $z=\pi-t$,

$dz=-dt$, $\sin z=\sin(\pi-t)=\sin t$, $\cos z=\cos(\pi-t)=-\cos t$. Тогда

$$I=\int\limits_0^{\pi} \frac{2z\sin z}{\sqrt{1+\cos^2 z}}dz=\int\limits_0^{\pi} \frac{2(\pi-t)\sin t}{\sqrt{1+\cos^2 t}}dt=-2\pi\int\limits_0^{\pi} \frac{d(\cos t)}{\sqrt{1+\cos^2 t}}-\int\limits_0^{\pi} \frac{2t\,\mathrm{sint}}{\sqrt{1+\cos^2 t}}dt=$$

$$=-2\pi\ln\left(\cos t+\sqrt{1+\cos^2 t}\right)\Big|_0^{\pi}-I=2\pi\ln\left(\frac{\sqrt{2}+1}{\sqrt{2}-1}\right)-I,$$ откуда

$$I=\pi\ln\left(\frac{\sqrt{2}+1}{\sqrt{2}-1}\right).$$

5. Исследовать на сходимость ряд $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}'}\frac{1}{n}$, где n - натуральные числа, в десятичной записи которых отсутствует цифра 7.

Решение. В десятичной записи k-значного числа $n_1n_2...n_k$ без семерок будет $8\cdot 9^{k-1}$ чисел, так как $n_1\neq 0$. Сумму ряда можно представить в виде $S=\sum\limits_{n\in\mathbb{N}'}\frac{1}{n}=\sum\limits_{k=1}^{\infty}\sum\limits_{m=10^{k-1}}^{10^k-1}\frac{1}{m}$.

Справедлива оценка $\sum\limits_{m=10^{k-1}}^{10^k-1}\frac{1}{m}<8\cdot 9^{k-1}\cdot\frac{1}{10^{k-1}}=8\cdot(0,9)^{k-1}$. Тогда

$S<\sum\limits_{k=1}^{\infty}8\cdot(0,9)^{k-1}=\frac{8}{1-0,9}=80$. Следовательно, ряд сходится.

6. Решить уравнение $\left|\frac{2-\sqrt{x-1}-x}{x}\right|+\left|\frac{2-\sqrt{x-1}+x}{x}\right|=2-\sqrt{x-1}$.

Решение.

Обозначим $g(x)=\dfrac{2-\sqrt{x-1}}{x}$, тогда уравнение может быть записано в виде: $\dfrac{|g(x)-1|+|g(x)+1|}{g(x)}=x$, то есть имеем уравнение $f(g(x))=x$, где $f(y)=\dfrac{|y-1|+|y+1|}{y}$. Введение переменной $y=g(x)$ приводит нас к системе, равносильной исходному уравнению: $\begin{cases} g(x)=y, \\ f(y)=x. \end{cases}$

Тогда $xg(x)=yf(y)$.

Но $yf(y)=|y-1|+|y+1|=\begin{cases} -2y, & y<-1, \\ 2, & -1\le y\le 1, \\ 2y, & y>1. \end{cases}$ а $xg(x)=2-\sqrt{x-1}$.

Очевидно, что $yf(y)\ge 2$, причем $yf(y)=2$ на отрезке $[-1,1]$, а $xg(x)\le 2$ и равенство $xg(x)=yf(y)$ возможно лишь для $x=1$, $-1\le y\le 1$. Но $x=1$ не является решением данного уравнения. Следовательно, уравнение решений
не имеет.

7. Решить систему ДУ: $$\begin{cases} x'=\dfrac{1+y\sqrt{z}}{y}, \\ y'=-xy^2-y^2\sqrt{z}, \\ z'=\dfrac{2xy\sqrt{z}+2\sqrt{z}}{y}. \end{cases}$$

Решение. Продифференцируем первое уравнение: $x''=-\dfrac{y'}{y^2}+\dfrac{z'}{2\sqrt{z}}$.

Подставим в это уравнение y' и z' из второго и третьего уравнений: $x''=2x+\dfrac{1}{y}+\sqrt{z}$, и, учитывая, что $\dfrac{1}{y}+\sqrt{z}=x'$, получим ЛОДУ 2-го порядка с постоянными коэффициентами относительно функции $x(t)$: $x'' - x' - 2x = 0$. Его решением является $x = C_1 e^{-t} + C_2 e^{2t}$.

Выразим далее $\sqrt{z}$ из первого и второго уравнений: $\sqrt{z} = x' - \frac{1}{y} = -x - \frac{y'}{y^2}$, откуда для функции $y(t)$ получим ДУ 1-го порядка: $-\frac{y'}{y^2} + \frac{1}{y} = x' + x = 3C_2 e^{2t}$. Данное ДУ является уравнением Бернулли. Замена $u = \frac{1}{y}$ приводит его к линейному ДУ:

$u' + u = 3C_2 e^{2t}$. Общее решение этого уравнения имеет вид: $u = C_2 e^{2t} + C_3 e^{-t}$, а для функции $y(t)$ получим $y = \frac{1}{C_2 e^{2t} + C_3 e^{-t}}$.

Так как $\sqrt{z} = x' - u$, то $\sqrt{z} = C_2 e^{2t} - (C_1 + C_3) e^{-t}$.

Таким образом, общее решение системы имеет вид:

$$\begin{cases} x = C_1 e^{-t} + C_2 e^{2t}, \\ y = \dfrac{1}{C_2 e^{2t} + C_3 e^{-t}}, \\ z = \left(C_2 e^{2t} - (C_1 + C_3) e^{-t}\right)^2. \end{cases}$$

Литература

1. Избранные задачи из журнала “American mathematical monthly” под ред. Алексеева В. М. ─ М.: Мир, 1977, 596 с.
2. Васильев Н. Б., Савин А. П., Егоров А. А. Избранные олимпиадные задачи.─ М.: Бюро Квантум, 2007 г., 158 с.

СОДЕРЖАНИЕ

Издание подготовлено в авторской редакции

Отпечатано на участке цифровой печати
Издательского Дома Томского государственного университета

Заказ № 1516 от «19» декабря 2015 г. Тираж 50 экз.