XI Всероссийский съезд по фундаментальным проблемам теоретической и прикладной механики

СБОРНИК ДОКЛАДОВ

Казань

20 — 24 августа 2015 г.

Российский национальный комитет по теоретической и прикладной механике
Российская академия наук
Министерство образования и науки Российской Федерации
Федеральное агентство научных организаций
Казанский (Приволжский) федеральный университет
Институт механики и машиностроения КазНЦ РАН
Казанский национальный исследовательский технический
университет им. А.Н. Туполева
Академия наук Республики Татарстан

XI ВСЕРОССИЙСКИЙ СЪЕЗД ПО ФУНДАМЕНТАЛЬНЫМ ПРОБЛЕМАМ ТЕОРЕТИЧЕСКОЙ И ПРИКЛАДНОЙ МЕХАНИКИ

СБОРНИК ДОКЛАДОВ

(Казань, 20–24 августа 2015 г.)

Казань
2015

УДК 531 (063)
ББК 22.2я431
О–42

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ, проект № 15-01-20573.

Ответственные редакторы:
Д.А. Губайдуллин, А.М. Елизаров, Е.К. Липачёв

Составители*: Д.Ю. Ахметов, А.Н. Герасимов, Ш.М. Хайдаров*

О–42 **XI Всероссийский съезд по фундаментальным проблемам теоретической и прикладной механики: сборник докладов** (Казань, 20–24 августа 2015 г.). / Сост. Д.Ю. Ахметов, А.Н. Герасимов, Ш.М. Хайдаров, под ред. Д.А. Губайдуллина, А.М. Елизарова, Е.К. Липачёва. Казань: Изд-во Казан. ун-та, 2015. – 4480 с.

ISBN 978-5-00019-492-8

Сборник содержит доклады XI Всероссийского съезда по фундаментальным проблемам теоретической и прикладной механики.

УДК 531 (063)
ББК 22.2я431

ISBN 978-5-00019-492-8

XI Всероссийский съезд по фундаментальным проблемам теоретической и прикладной механики, Казань, 20–24 августа 2015 года. С. 569–571.

ВЗАИМОДЕЙСТВИЕ ФАЗ В ДИСПЕРСНЫХ СРЕДАХ ПОВЫШЕННОЙ КОНЦЕНТРАЦИИ И КОЭФФИЦИЕНТЫ ПЕРЕНОСА

Б.В. Бошенятов

Институт прикладной механики РАН, г. Москва

Томский государственный (национальный исследовательский) университет

bosbosh@mail.ru

Аннотация. Дано сравнение с экспериментом различных теоретических методов расчета коэффициентов переноса дисперсных сред. Показано, что при повышенной объемной концентрации частиц $c > 0.3$ основное влияние на коэффициенты переноса (93% при $c = 0.55$) оказывает чисто геометрический фактор внутренней структуры среды, а учет парных взаимодействий частиц дает вклад в расчетную точность еще 4.5%. Таким образом, учет обеих факторов позволяет вычислять эффективные коэффициенты переноса дисперсной среды с точностью ± 2.5% при $0 < c < 0.55$. Формулы в виде вириального разложении до $O(c^3)$, с учетом взаимодействия, при $c > 0.3$ дают точность хуже, чем формула Максвелла (Клаузиуса–Моссоти), которая не учитывает взаимодействия частиц.

ВВЕДЕНИЕ

Гетерогенные дисперсные среды (туманы, пузырьковые среды, суспензии, эмульсии, композиты и др.) широко распространены в природных явлениях и технологических процессах многих отраслей промышленности. Развитие теоретических моделей, методов описания движения таких сред [1–4] и методов расчета их осредненных, макроскопических характеристик, таких как вязкость [5], присоединенная масса [6, 7], коэффициенты переноса и др. является одним из важнейших условий повышения эффективности технологических процессов и создания новых прорывных промышленных технологий [8].

Рассмотрим гетерогенную двухфазную дисперсную смесь сферических твердых частиц, капель или пузырей с несущей фазой в газообразном, жидком или твердом состоянии. Пространственное распределение дисперсных частиц статистически однородно и изотропно. Нижний индекс $i = 1$ будем относить к параметрам несущей фазы, а $i = 2$ – к параметрам дисперсной фазы. Пусть радиус дисперсных частиц a и расстояния между ними L (структурные неоднородности смеси) во много раз больше молекулярно-кинетических размеров. В этом случае эффектами броуновского движения частиц можно пренебречь, а для описания физических свойств фаз (плотности, электро- и теплопроводности, электростатической и магнитной проницаемости и др.) использовать соответствующие макроскопические параметры, которые можно получить из опытов с веществами в однофазном состоянии. С другой стороны, если размеры указанных структурных неоднородностей L во много раз меньше расстояний $\Omega^{1/3}$, на которых макроскопические параметры смеси меняются существенно, то такую смесь можно рассматривать как гомогенную, характеризуя её эффективными физическими параметрами, осредненными по объему Ω. Для задач электро- и магнитостатики, теплопроводности, диффузии или течений идеальной несжимаемой жидкости, которые описываются уравнением Лапласа $\Delta\varphi = 0$, проблема взаимодействия фаз дисперсной среды сводится к нахождению соотношения между векторным полем $\langle\nabla\varphi_2\rangle$ и локальным полем Лоренца $\langle\nabla\varphi_1\rangle$ при заданном внешнем поле $\langle\nabla\varphi\rangle$. Скобки обозначают усреднение по объему Ω [9], т. е.

$$\langle\nabla\varphi\rangle = \frac{1}{\Omega}\int \nabla\varphi_i d\Omega. \tag{1}$$

Если объемная концентрация дисперсной фазы равна c, то из (1) получаем известное соотношение

$$\langle\nabla\varphi\rangle = \langle\nabla\varphi_1\rangle(1-c) + \langle\nabla\varphi_2\rangle c. \tag{2}$$

Отметим, что использование соотношения (2) для сред с повышенной концентрацией является принципиально важным [10], т. к. оно оказывает на эффективные параметры среды более существенное влияние, чем учет, например, парных взаимодействий дисперсных частиц, которое, после сложных математических вычислений, позволяет получить значение присоединенной массы дисперсной частицы [11] с точностью не выше $O(c^2)$, а значения коэффициентов переноса, электро- и теплопроводности и др. – с точностью $O(c^3)$.

РАСЧЕТНЫЕ ФОРМУЛЫ БЕЗ УЧЕТА ВЗАИМОДЕЙСТВИЯ ДИСПЕРСНЫХ ЧАСТИЦ

В проекции на направление однородного внешнего электрического поля $\boldsymbol{E} = \langle\boldsymbol{\nabla}\varphi\rangle$ формулы для расчета коэффициентов переноса, например, электропроводности будут иметь вид [10]

$$\frac{\sigma}{\sigma_1} = 1 + \frac{E_2}{E}(\alpha - 1)c, \tag{3}$$

где σ – эффективный коэффициент электропроводности дисперсной среды, определяемый законом Ома $\boldsymbol{j} = -\sigma\boldsymbol{\nabla}\varphi$, $\boldsymbol{E_2} = \langle\boldsymbol{\nabla}\varphi_2\rangle$ – среднее поле в дисперсной частице, $\alpha = {}^{\sigma_2}/_{\sigma_1}$.

Найдем σ при условии, что влиянием электрических полей дисперсных частиц друг на друга, при любых концентрациях, можно пренебречь. Тогда, используя точное решение $E_2 = \frac{3}{\alpha+2}E_1$ для одиночной сферы, находящейся в однородном электрическом поле E_1 [9] и формулы (2) и (3), получим знаменитую формулу Максвелла, которую в контексте диэлектрической проницаемости, часто называют формулой Клаузиуса–Моссоти:

$$\frac{\sigma}{\sigma_1} = 1 + \frac{3\beta c}{1-\beta c} \approx 1 + 3\beta c + 3\beta^2 c^2 + O(c^3), \qquad \beta = \frac{\alpha-1}{\alpha+2}. \tag{4}$$

Таким образом, формула (4) математически обоснована и применима для любых концентраций дисперсных частиц, но является приближенной, т. к. учитывает лишь геометрический фактор дисперсной среды, который описывается уравнением (2).

УЧЕТ ПАРНЫХ ВЗАИМОДЕЙСТВИЙ СФЕРИЧЕСКИХ ДИСПЕРСНЫХ ЧАСТИЦ

Учет парных взаимодействий сферических дисперсных частиц при расчете коэффициентов тепло- и электропроводности дисперсной среды был сделан в классической работе [12], в которой была получена формула в виде вириального разложения с точностью до $O(c^3)$ и дана таблица коэффициентов при c^2, рассчитанных для различных α:

$$\frac{\sigma}{\sigma_1} = 1 + 3\beta c + k_2 c^2 + O(c^3). \tag{5}$$

В следующем разделе будет показано, что такое вириальное разложение по существу не учитывает геометрический фактор стесненности векторного поля $\langle\nabla\varphi_1\rangle$ дисперсными частицами, поэтому при повышенных концентрациях дает результат хуже, чем формула Максвелла (4).

В работе [13] впервые была получена аналитическая зависимость для расчета коэффициентов переноса в гетерогенной среде с учетом, как геометрического фактора, так и парных взаимодействий дисперсных сферических частиц:

$$\frac{\sigma}{\sigma_1} = 1 + 3\beta c(1 + kc)\left[1 - \left(1 - \frac{3kc}{\alpha-1}\right)\beta c\right]^{-1} \approx 1 + 3\beta c + 3\beta(\beta + k)c^2 + O(c^3),$$

$$k = 0.0486\beta + 0.0628\beta^2 + 0.0003\beta^3. \tag{6}$$

При $kc \ll 1$, как и следовало ожидать, формула (6) совпадает с формулой Максвелла (4). Видно, что в формулах (4)–(6) коэффициент при первой степени концентрации одинаковый, значения k_2, как и следовало ожидать, отличаются. На рис. 1 дано сравнение коэффициентов k_2 для этих формул в зависимости от параметра α. Расчеты коэффициентов k_2, выполненные Петерсоном и Хермансом, приведены в работе [12]. Пунктирной кривой показана зависимость, которая не учитывает взаимного влияния физических полей от дисперсных частиц – формула Максвелла (4).

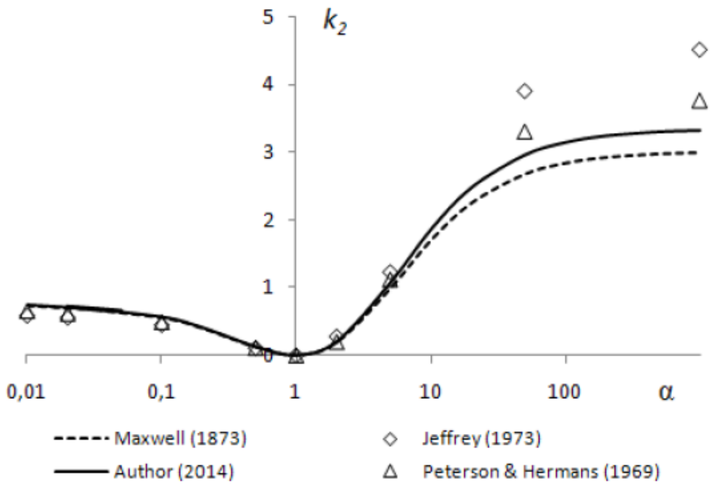

Рис. 1

Видно, что наибольшие отличия различных теоретических моделей наблюдаются при $\alpha \to \infty$ ($\beta = 1$), т. е. в случаях, когда проводимость дисперсных частиц намного больше, чем проводимость несущей (дисперсионной) жидкости. Поэтому сравнение с экспериментом проведем при значениях $\alpha \to \infty$.

СРАВНЕНИЕ С ЭКСПЕРИМЕНТОМ. ВЫВОДЫ

В работе [14] приведены данные экспериментов МкКензи (D.R. McKenzie) и др., а также результаты численного моделирования Уайта (Whites K.W.), которые практически совпадают с численными расчетами и измерениями МкКензи эффективных коэффициентов диэлектрической проницаемости $\varepsilon_{exp} = \sigma_{exp}$ [13] в диапазоне объемных концентраций сферических частиц от 0 до 0.72. На рис. 2 дано сравнение с этими экспериментами результатов различных теоретических методов расчета коэффициентов переноса дисперсных сред с учетом и без учета взаимодействия частиц.

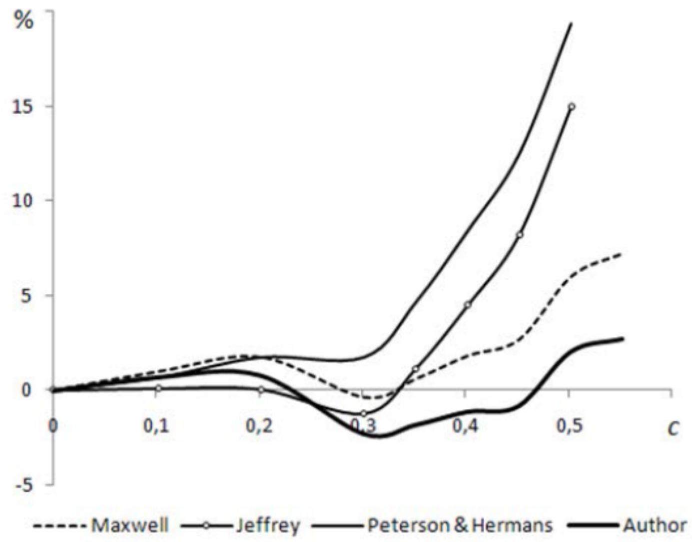

Рис. 2

По оси ординат отложена относительная погрешность теоретических расчетов равная $\frac{\sigma-\sigma_{exp}}{\sigma_{exp}}100\%$, по оси абсцисс – объемная концентрация дисперсных частиц. Видно, что формулы (5) в виде вириального разложении до $O(c^3)$, с учетом взаимодействия, при $c > 0.3$ дают точность хуже, чем формула (4) Максвелла (Клаузиуса–Моссоти), которая не учитывает взаимодействия частиц. Аналитическая зависимость (6), предложенная автором, дает погрешность менее 2.5% во всем диапазоне объемных концентраций частиц от 0 до 0.55. Формула Максвелла обеспечивает ту же точность расчетов (± 2.5%) в диапазоне концентраций от 0 до 0.45.

Таким образом, при повышенной объемной концентрации частиц $c > 0.3$ основное влияние на коэффициенты переноса (93% при $c = 0.55$) оказывает чисто геометрический фактор внутренней структуры среды и ограничение вириального разложения до $O(c^3)$ приводит к резкому увеличению погрешности (до 15-20% при $c = 0.55$). Уточнение величины коэффициента при c^2 в формуле Максвелла (4), путем учета парных взаимодействий частиц (6), позволяет на 4.5% снизить погрешность расчетов в диапазоне концентраций $0.45 < c < 0.55$, по сравнению с формулой (4).

Работа выполнена при частичной поддержке в рамках Программы повышения конкурентоспособности ТГУ.

Литература

1. Гуськов О.Б. // Прикладная математика и механика. 2013. Т. 77 (4). С. 557-572.
2. Бошенятов Б.В. // Изв. Томского политехнического университета. 2005. Т. 308 (6). С. 156-160.
3. Бошенятов Б.В. // Докл. Академии наук. 2010. Т. 430 (6). С. 767-769.
4. Архипов В.А., Васенин И.М., Усанина А.С. // Инженерно-физический журнал. 2013. Т. 86 (5). С. 1097-1106.
5. Гуськов О.Б. // Докл. Академии наук. 2014. Т. 456 (4). С. 420-423.
6. Гуськов О.Б., Бошенятов Б.В. // Вестник Нижегородского университета им. Н.И. Лобачевского. 2011. № 4-3. С. 740-741.
7. Бошенятов Б.В. // Изв. вузов. Физика. 2014. Т. 57 (8/2). С. 50-60.
8. Бошенятов Б.В. // Изв. вузов. Физика. 2005. Т. 48 (11-Приложение). С. 49-54.
9. Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М. Электродинамика сплошных сред. Теоретическая физика. Т. 8. М.: Наука. Главная редакция физ.-мат. литературы, 1982. 620 с.
10. Бошенятов Б.В. // Письма ЖТФ. 2015. Т. 41 (3). С. 67-73.
11. Гуськов О.Б., Бошенятов Б.В. // Докл. Академии наук. 2011. Т. 438 (5). С. 626-628.
12. Jeffrey D.J.// Proc. R. Soc. Lond. A. 1973. V. 335. P. 355-367.
13. Бошенятов Б.В. // Докл. Академии наук. 2014. Т. 459 (6). С. 693-695.
14. Whites K.W. // J. Applied Phys. 2000. V. 88 (4). P. 1962-1970.