Филиал Кемеровского государственного университета
в г. Анжеро-Судженске

Национальный исследовательский
Томский государственный университет

Кемеровский государственный университет

Институт проблем управления им. В. А. Трапезникова РАН

Институт вычислительных технологий СО РАН

ИНФОРМАЦИОННЫЕ ТЕХНОЛОГИИ И МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ (ИТММ–2015)

Материалы XIV Международной конференции имени А. Ф. Терпугова

18–22 ноября 2015 г.

Часть 1

Издательство Томского университета

2015

УДК 519

ББК 22.17

И74

Редколлегия:

Р. Т. Якупов, д-р физ.-мат. наук, профессор;

А. А. Назаров, д-р техн. наук, профессор;

Т. В. Любина, канд. физ.-мат. наук

Информационные технологии и математическое моделирование

И74 (ИТММ–2015): Материалы XIV Международной конференции имени А. Ф. Терпугова (18–22 ноября 2015 г.). – Томск : Изд-во Том. ун-та, 2015. – Ч. 1. – 218 с.

ISBN 978-5-7511-2382-6

В часть 1 вошли материалы докладов, представленные на XIV Международной конференции имени А. Ф. Терпугова «Информационные технологии и математическое моделирование» на секциях «Вероятностные методы и модели», «Модели и методы массового обслуживания», «Оптимизационные модели и исследование операций».

Для специалистов в области информационных технологий и математического моделирования.

УДК 519

ББК 22.17

Конференция проводится при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проект № 15-01-20933-г)

ISBN 978-5-7511-2382-6

Это система линейных неоднородных дифференциальных уравнений с разрывными правыми частями. Решать ее нужно путем разбиения фазового пространства на ряд областей и нахождения решения в каждой из них. Систему (5) можно решить, например, используя средства системы компьютерной математики Maple или Mathematica [5].

Литература

1. Gelenbe E. Product form queueing networks with negative and positive customers// Journal of Applied Probability. 1991. Vol. 28. P. 656–663.
2. Маталыцкий М. А. О некоторых результатах анализа и оптимизации марковских сетей с доходами и их применении. Автоматика и телемеханика. 2009. № 10. С. 97–113.
3. Науменко В. В., Маталыцкий М. А. Анализ марковских сетей с доходами, положительными и отрицательными заявками // Информатика. 2014. № 1. С. 5–14.
4. Pervasive Technology Labs at Indiana University Types of DDoS Attacks. Distributed Denial of Service Attacks (DDoS) – Resources, Pervasive Technology Labs at Indiana University. Advanced Networking Management Lab (ANML), December 3, 2009, Archived from the original on 2010-09-14, retrieved December 11, 2013.
5. Матросов А. В. Maple 6. Решение задач высшей математики и механики. СПб.: БХВ-Петербург, 2001. 526 с.

ИССЛЕДОВАНИЕ СИСТЕМЫ МАССОВОГО ОБСЛУЖИВАНИЯ $GI|GI|\infty$ С ДВУМЯ ТИПАМИ ЗАЯВОК

Е. В. Панкратова

Национальный исследовательский Томский государственный университет, Томск, Россия

Рассмотрим систему массового обслуживания (СМО) с неограниченным числом обслуживающих приборов. На вход системы поступает рекуррентный поток заявок двух типов, который определяется функцией распределения $A(x)$ – длин интервалов между моментами наступления событий потока. Пришедшая заявка с вероятностью p_1 определяется как заявка первого типа, а с вероятностью p_2 – второго. Обслуживание заявок в зависимости от их типа осуществляется на приборах с функциями распределения времени обслуживания произвольного вида $B_1(x)$ и $B_2(x)$.

Поставим задачу исследования двумерного случайного процесса $\{l_1(t), l_2(t)\}$, характеризующего число занятых приборов в системе в момент времени t. Так как входящий поток не является пуассоновским, то исследуемый процесс немарковский. Определим нестационарный трехмерный марковский процесс $\{z(t), r_1(t), r_2(t)\}$. Здесь $z(t)$ – случайная величина, равная длине интервала от момента t до момента наступления следующего события в рекуррентном потоке; $\{r_1(t), r_2(t)\}$ – число событий двумерного просеянного потока, наступивших до момента времени t.

$S_i(t) = P\left\{\tau_k^{(i)} > T - t\right\} = 1 - B_i(T-t)$ – вероятность того, что заявка i-го типа $(i = 1,2)$ к моменту времени T не закончила обслуживание и сформировалась заявка просеянного потока [1].

Для распределения вероятностей

$$P(z, r_1, r_2, t) = P\{z(t) < z, r_1(t) = r_1, r_2(t) = r_2\}$$

запишем систему дифференциальных уравнений Колмогорова:

$$\frac{\partial P(z,r_1,r_2,t)}{\partial t} = \frac{\partial P(z,r_1,r_2,t)}{\partial z} + \frac{\partial P(0,r_1,r_2,t)}{\partial z}(A(z)-1) +$$
$$+\frac{\partial P(0,r_1-1,r_2,t)}{\partial z} p_1 S_1(t) A(z) + \frac{\partial P(0,r_1,r_2-1,t)}{\partial z} p_2 S_2(t) A(z) -$$
$$-\frac{\partial P(0,r_1,r_2,t)}{\partial z} A(z)(p_1 S_1(t) + p_2 S_2(t)).$$

Начальные условия для решения этой системы в момент времени t_0 определим равенством

$$P(z,r_1,r_2,t_0) = \begin{cases} R(z), r_1 = r_2 = 0, \\ 0, r_1 > r_2 > 0, \end{cases}$$

$R(z)$ – стационарное распределение вероятностей процесса $z(t)$.

Обозначив

$$H(z,u_1,u_2,t) = \sum_{r_1=0}\sum_{r_2=0} e^{ju_1r_1} e^{ju_2r_2} P(z,r_1,r_2,t),$$

получим следующую задачу Коши:

$$\frac{\partial H(z,u_1,u_2,t)}{\partial t} = \frac{\partial H(z,u_1,u_2,t)}{\partial z} + \frac{\partial H(0,u_1,u_2,t)}{\partial z}(A(z)-1) +$$
$$+\frac{\partial H(0,u_1,u_2,t)}{\partial z} A(z)\left(p_1 S_1(t)\left(e^{ju_1}-1\right) + p_2 S_2(t)\left(e^{ju_2}-1\right)\right), \qquad (1)$$
$$H(z,u_1,u_2,t_0) = R(z).$$

Асимптотика первого порядка

Будем искать решение системы (1) в условии эквивалентного роста времени обслуживания на приборах [2], т.е. при $b_1 \to \infty$, $b_2 \to \infty$, где $b_i = \int_0^\infty (1 - B_i(x))dx, i = 1,2.$

Обозначим $b_1 = \frac{1}{\varepsilon}$, $b_2 = \frac{1}{q\varepsilon}$ и в уравнении (1) выполним замены

$$t\varepsilon = \tau, t_0\varepsilon = \tau_0, S_1(t) = \tilde{S}_1(\tau), S_2(t) = \tilde{S}_2(\tau),$$
$$u_1 = \varepsilon x_1, u_2 = \varepsilon x_2, H(z,u_1,u_2,t) = F_1(z,x_1,x_2,\tau,\varepsilon). \qquad (2)$$

Для $F_1(z,x_1,x_2,\tau,\varepsilon)$ получим уравнение

$$\frac{\partial F_1(z,x_1,x_2,\tau,\varepsilon)}{\partial \tau}=\frac{\partial F_1(z,x_1,x_2,\tau,\varepsilon)}{\partial z}+\frac{\partial F_1(0,x_1,x_2,\tau,\varepsilon)}{\partial z}(A(z)-1)+$$
$$+\frac{\partial F_1(0,x_1,x_2,\tau,\varepsilon)}{\partial z}A(z)\Big(p_1\tilde{S}_1(\tau)\Big(e^{j\varepsilon x_1}-1\Big)+p_2\tilde{S}_2(\tau)\Big(e^{j\varepsilon x_2}-1\Big)\Big). \qquad (3)$$

Теорема 1. *Предельное* (*при* $\varepsilon\to 0$) *значение* $F_1(z,x_1,x_2,\tau)$ *решения* $F_1(z,x_1,x_2,\tau,\varepsilon)$ *уравнения* (3) *имеет вид*

$$F_1(z,x_1,x_2,\tau)=R(z)\exp\left\{j\lambda\left[p_1x_1\int_{\tau_0}^{\tau}\tilde{S}_1(w)dw+p_2x_2\int_{\tau_0}^{\tau}\tilde{S}_2(w)dw\right]\right\}, \qquad (4)$$

где параметр λ *определяется выражением*

$$\lambda=\frac{\partial R(0)}{\partial z}. \qquad (5)$$

Доказательство.

В уравнении (3) выполним предельный переход при $\varepsilon\to 0$

$$\frac{\partial F_1(z,x_1,x_2,\tau)}{\partial z}-\frac{\partial F_1(0,x_1,x_2,\tau)}{\partial z}(A(z)-1)=0.$$

Следовательно, $F_1(z,x_1,x_2,\tau)$ можно определить в виде

$$F_1(z,x_1,x_2,\tau)=R(z)\Phi_1(x_1,x_2,\tau). \qquad (6)$$

Разложим (3) в ряд по ε, разделим на ε и устремим $\varepsilon\to 0$. Тогда с учетом (6) при $z\to\infty$ получаем дифференциальное уравнение для нахождения функции $\Phi_1(x_1,x_2,\tau)$:

$$\frac{\partial \Phi_1(x_1,x_2,\tau)}{\partial \tau}=j\lambda\Phi_1(x_1,x_2,\tau)[p_1x_1\tilde{S}_1(\tau)+p_2x_2\tilde{S}_2(\tau)].$$

С учетом (6) и начальных условий $\Phi_1(x_1,x_2,\tau)=1$ получим вид $\Phi_1(x_1,x_2,\tau)$:

$$\Phi_1(x_1,x_2,\tau)=\exp\left\{j\lambda\left[p_1x_1\int_{\tau_0}^{\tau}\tilde{S}_1(w)dw+p_2x_2\int_{\tau_0}^{\tau}\tilde{S}_2(w)dw\right]\right\},$$

подставив которое в (6), получим равенство (4).

В силу замен (2) и равенства (4) можно записать асимптотическое приближённое равенство

$$H(z,u_1,u_2,t)=F_1(z,x_1,x_2,\tau,\varepsilon)\approx F_1(z,x_1,x_2,\tau)=$$
$$=R(z)\exp\left\{j\lambda\left[p_1u_1\int_{t_0}^{t}S_1(w)dw+p_2u_2\int_{t_0}^{t}S_2(w)dw\right]\right\}.$$

При $t=T=0$, $t_0\to-\infty$ определим функцию

$$h_1(u_1,u_2)=H(\infty,u_1,u_2,0)=$$
$$=\exp\left\{j\lambda\left[p_1u_1\int_{-\infty}^{0}(1-B_1(w))dw+p_2u_2\int_{-\infty}^{0}(1-B_2(w))dw\right]\right\}=$$
$$=\exp\{j\lambda[p_1u_1b_1+p_2u_2b_2]\},$$
которую будем называть асимптотикой первого порядка для характеристической функции процесса $\{l_1(t),l_2(t)\}$.

Асимптотика второго порядка

Решение $H(z,u_1,u_2,t)$ уравнения (1) запишем в виде произведения
$$H(z,u_1,u_2,t)=H_2(z,u_1,u_2,t)\exp\left\{j\lambda\left[p_1u_1\int_{t_0}^{t}S_1(w)dw+p_2u_2\int_{t_0}^{t}S_2(w)dw\right]\right\},\qquad(7)$$
подставляя которое в (1), получим уравнение для $H_2(z,u_1,u_2,t)$ в виде
$$\frac{\partial H_2(z,u_1,u_2,t)}{\partial t}+H_2(z,u_1,u_2,t)j\lambda(p_1S_1(t)+p_2S_2(t))=$$
$$=\frac{\partial H_2(z,u_1,u_2,t)}{\partial z}+\frac{\partial H_2(0,u_1,u_2,t)}{\partial z}(A(z)-1)+\qquad(8)$$
$$+\frac{\partial H_2(0,u_1,u_2,t)}{\partial z}A(z)[p_1S_1(t)(e^{ju_1}-1)+p_2S_2(t)(e^{ju_2}-1)],$$
$$H_2(z,u_1,u_2,t_0)=R(z).$$
Введем следующие замены: $b_1=\dfrac{1}{\varepsilon^2},\ b_2=\dfrac{1}{q\varepsilon^2},\ t\varepsilon^2=\tau,\ t_0\varepsilon^2=\tau_0,\qquad(9)$
$$S_1(t)=\tilde S_1(\tau),\ S_2(t)=\tilde S_2(\tau),\ u_1=\varepsilon x_1,$$
$$u_2=\varepsilon x_2,\ H_2(z,u_1,u_2,t)=F_2(z,x_1,x_2,\tau,\varepsilon).$$

Теорема 2. *Предельное* (*при* $\varepsilon\to 0$) *значение* $F_2(z,x_1,x_2,\tau)$ *функции* $F_2(z,x_1,x_2,\tau,\varepsilon)$ *имеет вид*
$$F_2(z,x_1,x_2,\tau)=R(z)\exp\left\{j^2\lambda\left(p_1\int_{\tau_0}^{\tau}\frac{x_1^2}{2}\tilde S_1(w)dw+p_2\int_{\tau_0}^{\tau}\frac{x_2^2}{2}\tilde S_2(w)dw\right)+\right.$$
$$+p_1p_2x_1x_2\int_{\tau_0}^{\tau}\tilde S_1(w)\tilde S_2(w)dw\left(\frac{\partial f_1(0)}{\partial z}+\frac{\partial f_2(0)}{\partial z}\right)+\qquad(10)$$
$$\left.+p_1^2x_1^2\frac{\partial f_1(0)}{\partial z}\int_{\tau_0}^{\tau}\tilde S_1^2(w)dw+p_2^2x_2^2\frac{\partial f_2(0)}{\partial z}\int_{\tau_0}^{\tau}\tilde S_2^2(w)dw\right\},$$
где величина λ *определяется равенством* $\lambda=\dfrac{\partial R(0)}{\partial z}$, *а функция* $f_i(z)$ *удовлетворяет условию* $f_i(\infty)=0$ *и является решением уравнения*

$$\lambda R(z)=\frac{\partial f_i(z)}{\partial z}+\frac{\partial f_i(0)}{\partial z}(A(z)-1)+\frac{\partial R(0)}{\partial z}A(z), i=1,2. \tag{11}$$

Доказательство.

Представим функцию $F_2(z,x_1,x_2,\tau,\varepsilon)$ в виде разложения

$$F_2(z,x_1,x_2,\tau,\varepsilon)=\Phi_2(z,x_1,x_2,\tau)\{R(z)+ \\ +j\varepsilon(p_1x_1\tilde{S}_1(\tau)f_1(z)+p_2x_2\tilde{S}_2(\tau)f_2(z))\}+O(\varepsilon^2). \tag{12}$$

Можно показать, что полученные ниже результаты не зависят от выбора значения величин $f_1(\infty)$ и $f_2(\infty)$, поэтому будем полагать их равными нулю.

Подставив (12) в (8) и учитывая, что $\frac{\partial R(z)}{\partial z}+\frac{\partial R(0)}{\partial z}(A(z)-1)=0$, устремим $\varepsilon\to 0$ и получим дифференциальное уравнение

$$\lambda R(z)=\frac{\partial f_i(z)}{\partial z}+\frac{\partial f_i(0)}{\partial z}(A(z)-1)+\frac{\partial R(0)}{\partial z}A(z),$$

совпадающее с уравнением (11).

Для нахождения функции $\Phi_2(x_1,x_2,\tau)$ сделаем в уравнении (8) замены (9), разложим экспоненты в ряд Тейлора до $O(\varepsilon^2)$, разделим обе части полученного выражения на ε^2 и выполним предельный переход при $\varepsilon\to 0$ и $z\to\infty$. Тогда получим следующее равенство:

$$\frac{\partial\Phi_2(x_1,x_2,\tau)}{\partial\tau}=\Phi_2(x_1,x_2,\tau)\left\{j^2\lambda\left(p_1\frac{x_1^2}{2}\tilde{S}_1(\tau)+p_2\frac{x_2^2}{2}\tilde{S}_2(\tau)\right)+\right.$$

$$\left.+p_1p_2x_1x_2\tilde{S}_1(\tau)\tilde{S}_2(\tau)\left(\frac{\partial f_1(0)}{\partial z}+\frac{\partial f_2(0)}{\partial z}\right)++p_1^2x_1^2\frac{\partial f_1(0)}{\partial z}\tilde{S}_1^2(\tau)+p_2^2x_2^2\frac{\partial f_2(0)}{\partial z}\tilde{S}_2^2(\tau)\right\}.$$

Учитывая, что $\Phi_2(x_1,x_2,\tau_0)=1$, получим выражение

$$\Phi_2(z,x_1,x_2,\tau)=\exp\left\{j^2\lambda\left(p_1\int_{\tau_0}^{\tau}\frac{x_1^2}{2}\tilde{S}_1(w)dw+p_2\int_{\tau_0}^{\tau}\frac{x_2^2}{2}\tilde{S}_2(w)dw\right)+\right.$$

$$+p_1p_2x_1x_2\int_{\tau_0}^{\tau}\tilde{S}_1(w)\tilde{S}_2(w)dw\left(\frac{\partial f_1(0)}{\partial z}+\frac{\partial f_2(0)}{\partial z}\right)+$$

$$\left.+p_1^2x_1^2\frac{\partial f_1(0)}{\partial z}\int_{\tau_0}^{\tau}\tilde{S}_1^2(w)dw+p_2^2x_2^2\frac{\partial f_2(0)}{\partial z}\int_{\tau_0}^{\tau}\tilde{S}_2^2(w)dw\right\},$$

подставляя которое в (12), получим выражение (10).

В силу замены (9), а также равенства (10) для функции $H_2(z,u_1,u_2,t)$ можно записать приближённое (асимптотическое) равенство

$$H_2(z,u_1,u_2,t)=F_2(z,x_1,x_2,\tau,\varepsilon)\approx F_2(z,x_1,x_2,\tau)=$$

$$= R(z)\exp\left\{ j^2\lambda\left(p_1\frac{u_1^2}{2}\int_{\tau_0}^{\tau} S_1(w)dw + p_2\frac{u_2^2}{2}\int_{\tau_0}^{\tau} S_2(w)dw \right) + \right.$$

$$+ p_1 p_2 u_1 u_2 \int_{\tau_0}^{\tau} S_1(w)S_2(w)dw\left(\frac{\partial f_1(0)}{\partial z} + \frac{\partial f_2(0)}{\partial z} \right) +$$

$$\left. + p_1^2 u_1^2 \frac{\partial f_1(0)}{\partial z}\int_{\tau_0}^{\tau} S_1^2(w)dw + p_2^2 u_2^2 \frac{\partial f_2(0)}{\partial z}\int_{\tau_0}^{\tau} S_2^2(w)dw \right\}.$$

Обозначим

$$\int_{-\infty}^{0} S_1^2(w)dw = \int_{0}^{\infty} (1 - B_i(z))^2 dz = \beta_i,$$

$$\int_{-\infty}^{0} S_1(w)S_2(w)dw = \int_{0}^{\infty} (1 - B_1(z))(1 - B_2(z))dz = \beta_{12}.$$

Тогда при $t = T = 0$ и $t_0 \to -\infty$ для характеристической функции процесса $\{r_1(T), r_2(T)\}$ можно записать равенство

$$Me^{j(u_1 r_1(T) + u_2 r_2(T))} = H(\infty, u_1, u_2, T) = h_2(u_1, u_2) =$$

$$= \exp\left\{ j^2\lambda\left(p_1\frac{u_1^2}{2}b_1 + p_2\frac{u_2^2}{2}b_2 \right) + p_1 p_2 u_1 u_2\left(\frac{\partial f_1(0)}{\partial z} + \frac{\partial f_2(0)}{\partial z} \right)\beta_{12} + \right.$$

$$\left. + p_1^2 u_1^2 \frac{\partial f_1(0)}{\partial z}\beta_1 + p_2^2 u_2^2 \frac{\partial f_2(0)}{\partial z}\beta_2 \right\},$$

которое будем называть асимптотикой второго порядка характеристических функций числа занятых приборов первого и второго типа.

Литература

1. Pankratova E., Moiseeva S. Queueing System with Renewal Arrival Process and Ttwo Types of Customers // Ultra Modern Telecommunications and Control Systems and Workshops (ICUMT). IEEE. 2014. P. 514–517.

2. Pankratova E., Moiseeva S. Queueing System *MAP*|*M*|∞ with *n* Types of Customers // Proc. of the 13th Intern.Scien.Conf. ITMM 2014 named after A. F. Terpugov. Anzhero-Sudzhensk, 2014. P. 356–366.

ВЫХОДЯЩИЙ ПОТОК ЗАЯВОК В СИСТЕМЕ С ПРОГУЛКАМИ

С. В. Пауль

Национальный исследовательский
Томский государственный университет, Томск, Россия

Телекоммуникационные системы, математическими моделями которых могут являться однолинейные системы массового обслуживания с