Филиал Кемеровского государственного университета
в г. Анжеро-Судженске

Национальный исследовательский
Томский государственный университет

Кемеровский государственный университет

Институт проблем управления им. В. А. Трапезникова РАН

Институт вычислительных технологий СО РАН

ИНФОРМАЦИОННЫЕ ТЕХНОЛОГИИ И МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ (ИТММ–2015)

Материалы XIV Международной конференции имени А. Ф. Терпугова

18–22 ноября 2015 г.

Часть 1

Издательство Томского университета

2015

УДК 519
ББК 22.17
И74

Информационные технологии и математическое моделирование
И74 (ИТММ–2015): Материалы XIV Международной конференции имени А. Ф. Терпугова (18–22 ноября 2015 г.). – Томск : Изд-во Том. ун-та, 2015. – Ч. 1. – 218 с.

ISBN 978-5-7511-2382-6

В часть 1 вошли материалы докладов, представленные на XIV Международной конференции имени А. Ф. Терпугова «Информационные технологии и математическое моделирование» на секциях «Вероятностные методы и модели», «Модели и методы массового обслуживания», «Оптимизационные модели и исследование операций».

Для специалистов в области информационных технологий и математического моделирования.

УДК 519
ББК 22.17

Конференция проводится при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проект № 15-01-20933-г)

ISBN 978-5-7511-2382-6

мощью обычной техники локального баланса. Рассмотренная модель сети обобщает классическую модель Геленбе [5].

Литература

1. Курош А. Г. Курс высшей алгебры. М.: Наука, 1971. 432 с.
2. Бочаров П. П., Печинкин А. В. Теория массового обслуживания. М.: РУДН, 1995. 529 с.
3. Гихман И. И., Скороход А. В. Введение в теорию случайных процессов. М.: Наука, 1977. 568 с.
4. Klimenok V. On the Modification of Rouche's Theorem for the Queueing Theory Problems // Queueing Systems. 2001. Vol. 38. P. 431–434.
5. Gelenbe E. Product-form Queueing Networks with Negative and Positive Customers // J. Appl. Prob. 1991. Vol. 28. P. 656–663.

АНАЛИЗ МНОГОФАЗНОЙ СИСТЕМЫ ОБСЛУЖИВАНИЯ SM/(GI/∞)^K В УСЛОВИИ ВЫСОКОЙ ИНТЕНСИВНОСТИ ВХОДЯЩЕГО ПОТОКА

А. Н. Моисеев, А. А. Назаров

Национальный исследовательский

Томский государственный университет, Томск, Россия

Постановка задачи. Рассматривается многофазная система массового обслуживания с неограниченным числом приборов на каждой фазе и полумарковским входящим потоком. Система состоит из K фаз обслуживания. Время обслуживания на k-й фазе является случайной величиной с функцией распределения $B_k(x)$, $k=\overline{1,K}$. Заявка входящего потока поступает на первую фазу. Затем, по окончании обслуживания на первой фазе, она переходит на вторую фазу и т.д. до K-й фазы, по окончании обслуживания на которой заявка покидает систему.

Входящий поток является высокоинтенсивным полумарковским, который задается полумарковской матрицей $\mathbf{A}(x)$ порядка M. Элементы A_{lm} этой матрицы определяются следующим образом [1]:

$$A_{lm}(x) = \mathrm{P}\left\{ \xi_{n+1} = m, \tau_{n+1} < \frac{x}{N} \,\middle|\, \xi_n = l \right\}. \tag{1}$$

Здесь $\{\xi_n, \tau_n\}$ – стационарный двумерный марковский процесс с дискретным временем [2]; N – большой по величине скалярный параметр, определяющий высокую интенсивность потока (в теоретических исследованиях будем полагать $N \to \infty$). Величины τ_n определяют длину интервалов между моментами t_{n-1} и t_n наступления последовательных событий в потоке.

Рассмотрим полумарковский процесс $l(t)$, определяемый следующим образом [3]:

$$l(t) = \xi_{n+1},\ t_n \le t < t_{n+1}.$$

Обозначим $z(t)$ – длину интервала времени от момента t до момента наступления следующего события в полумарковском потоке, тогда процесс $\{l(t), z(t)\}$ является марковским. Для его совместного стационарного распределения вероятностей $r_l(z) = \mathrm{P}\{l(t) = l, z(t) < z / N\}$, $l = \overline{1, M}$, записанного в векторном виде $\mathbf{r}(z) = \{r_1(z), ..., r_M(z)\}$, имеет место [1] дифференциальное уравнение

$$\mathbf{r}'(z) = \mathbf{r}'(0)[\mathbf{I} - \mathbf{A}(z)].$$

Здесь $\mathbf{I}$ – единичная матрица.

В работе [1] показано, что $\mathbf{r}'(0) = \lambda\mathbf{r}$, где вектор-строка $\mathbf{r}$ есть стационарное распределение состояний вложенной цепи Маркова ξ_n, который является решением уравнения Колмогорова $\mathbf{r} = \mathbf{r} \cdot \mathbf{P}$. Здесь $\mathbf{P} = \lim\limits_{z \to \infty} \mathbf{A}(z)$ есть стохастическая матрица, определяющая вероятности переходов вложенной цепи Маркова ξ_n. Величина λ определяется выражением

$$\lambda = \frac{1}{\mathbf{rAe}},$$

где $\mathbf{A} = \int\limits_0^\infty [\mathbf{P} - \mathbf{A}(x)]dx$; $\mathbf{e}$ – единичный вектор-столбец.

Интенсивность полумарковского потока, заданного элементами (1), составляет $N\lambda$ [1]. Таким образом, при $N \to \infty$ она неограниченно возрастает. Обозначим $i_k(t)$ – число заявок, находящихся на обслуживании на k-й фазе описанной системы $(k = \overline{1, K})$ в момент времени t. Для вектора $\mathbf{i}(t) = \{i_1(t), ..., i_K(t)\}$ ставится задача нахождения многомерного стационарного распределения вероятностей числа заявок на фазах системы.

Многофазное динамическое просеивание. Прямое исследование случайного процесса $\mathbf{i}(t)$ достаточно затруднено. Поэтому воспользуемся методом многофазного динамического просеивания, подробно описанного в [4]. Кратко опишем его.

Зафиксируем некоторый момент времени T. Обозначим через $S_k(t)$ вероятность того, что заявка входящего потока, поступившая в момент времени $t < T$, в момент T будет обслуживаться на k-й фазе системы ($k = \overline{1, K}$). Через $S_0(t) = 1 - \sum\limits_{k=1}^{K} S_k(t)$ обозначим вероятность того, что указанная заявка покинет систему до момента времени T.

Определим K так называемых просеянных потоков событий. Будем считать, что заявка входящего потока, поступающая в систему в момент времени t, с вероятностью $S_k(t)$ генерирует событие в k-м ($k = \overline{1, K}$) просеянном потоке. С вероятностью $S_0(t)$ указанная заявка не генерирует события ни в одном из потоков.

Пусть в начальный момент времени $t_0 < \mathrm{T}$ система пуста. Обозначим $n_k(t)$ – число событий, наступивших в k-м просеянном потоке до момента времени t. Тогда для вектора $\mathbf{n}(t)=\{n_1(t),...,n_K(t)\}$ в момент времени $t = T$ имеем равенства

$$\mathrm{P}\{\mathbf{i}(T)=\mathbf{i}\}=\mathrm{P}\{\mathbf{n}(T)=\mathbf{i}\}$$

для любых значений $\mathbf{i}$, т.е. распределения вероятностей значений случайных процессов $\mathbf{i}(t)$ и $\mathbf{n}(t)$ в этот момент времени совпадают. Таким образом, получив выражение для распределения вероятностей многомерного процесса $\mathbf{n}(t)$ и подставив $t = T$, получим распределение вероятностей значений исследуемого процесса $\mathbf{i}(t)$ в момент времени T, который, вообще говоря, выбран произвольно.

В работе [4] получены следующие выражения для вероятностей $S_k(t)$:

$$S_k(t)=B_{k-1}^*(T-t)-B_k^*(T-t),$$

где $B_k^*(x)=(B_1 * ... * B_k)(x)$ есть свертка функций $B_1(x)$, …, $B_k(x)$, если считать, что $B_0^*(x)=1$ и $B_1^*(x)=B_1(x)$.

Уравнения Колмогорова. Очевидно, что процесс $\{\mathbf{n}(t),l(t),z(t)\}$ является марковским, и для его распределения вероятностей $P(\mathbf{n},l,z,t)=\mathrm{P}\{\mathbf{n}(t)=\mathbf{n},l(t)=l,z(t)<z/N\}$ можно записать систему дифференциальных уравнений Колмогорова:

$$\frac{1}{N}\frac{\partial P(\mathbf{n},l,z,t)}{\partial t}=\frac{\partial P(\mathbf{n},l,z,t)}{\partial z}-\frac{\partial P(\mathbf{n},l,0,t)}{\partial z}+$$
$$+\sum_{k=1}^{K}\sum_{m=1}^{M}\frac{\partial P(\mathbf{n}-\mathbf{e}_k,m,0,t)}{\partial z}A_{ml}(z)S_k(t)+\sum_{m=1}^{M}\frac{\partial P(\mathbf{n},m,0,t)}{\partial z}A_{ml}(z)S_0(t),$$

для всех значений $\mathbf{n}$, $l=\overline{1,M}$ и $z > 0$. Здесь $\mathbf{e}_k$ – вектор, все компоненты которого равны нулю за исключением k-й, которая равна единице.

Для частичных характеристических функций

$$H(\mathbf{u},l,z,t)=\sum_{n_1=0}^{\infty}...\sum_{n_K=0}^{\infty}e^{ju_1n_1+...+ju_Kn_K}P(\mathbf{n},l,z,t),\ l=\overline{1,M},$$

в векторном виде это уравнение можно записать следующим образом:

$$\frac{1}{N}\frac{\partial \mathbf{H}(\mathbf{u},z,t)}{\partial t}=\frac{\partial \mathbf{H}(\mathbf{u},z,t)}{\partial z}+\frac{\partial \mathbf{H}(\mathbf{u},0,t)}{\partial z}\left\{\mathbf{A}(z)\left[1+\sum_{k=1}^{K}\left(e^{ju_k}-1\right)S_k(t)\right]-\mathbf{I}\right\} \quad (2)$$

при начальном условии

$$\mathbf{H}(\mathbf{u},z,t_0)=\mathbf{r}(z). \quad (3)$$

Здесь $j=\sqrt{-1}$, $\mathbf{H}(\mathbf{u},z,t)=\{H(\mathbf{u},1,z,t),...,H(\mathbf{u},M,z,t)\}$.

Задачу (2)–(3) будем решать асимптотически при $N\to\infty$, т.е. в условии высокой интенсивности входящего потока.

Асимптотика первого порядка. В (2)–(3) выполним следующие замены:

$$\frac{1}{N}=\varepsilon, \qquad \mathbf{u}=\varepsilon\mathbf{w}, \qquad \mathbf{H}(\mathbf{u},z,t)=\mathbf{F}_1(\mathbf{w},z,t,\varepsilon),$$

получим задачу

$$\begin{cases}\varepsilon\dfrac{\partial\mathbf{F}_1(\mathbf{w},z,t,\varepsilon)}{\partial t}=\dfrac{\partial\mathbf{F}_1(\mathbf{w},z,t,\varepsilon)}{\partial z}+\dfrac{\partial\mathbf{F}_1(\mathbf{w},0,t,\varepsilon)}{\partial z}\left\{\mathbf{A}(z)\left[1+\sum\limits_{k=1}^{K}\left(e^{j\varepsilon w_k}-1\right)S_k(t)\right]-\mathbf{I}\right\},\\ \mathbf{F}_1(\mathbf{w},z,t_0,\varepsilon)=\mathbf{r}(z).\end{cases} \tag{4}$$

Относительно асимптотического решения $\mathbf{F}_1(\mathbf{w},z,t)=\lim\limits_{\varepsilon\to 0}\mathbf{F}_1(\mathbf{w},z,t,\varepsilon)$ этой задачи имеет место следующее утверждение, которое здесь приводим без доказательства.

Теорема 1. *Асимптотическое решение* $\mathbf{F}_1(\mathbf{w},z,t)$ *задачи (4) имеет вид*

$$\mathbf{F}_1(\mathbf{w},z,t)=\mathbf{r}(z)\exp\left\{\lambda\sum_{k=1}^{K}jw_k\int_{t_0}^{t}S_k(x)\,dx\right\}.$$

Асимптотический анализ второго порядка. Введем функцию $\mathbf{H}_2(\mathbf{u}, z, t)$, определяемую выражением

$$\mathbf{H}(\mathbf{u},z,t)=\mathbf{H}_2(\mathbf{u},z,t)\exp\left\{N\lambda\sum_{k=1}^{K}ju_k\int_{t_0}^{t}S_k(x)\,dx\right\}. \tag{5}$$

Подставим это выражение в (2)–(3), получим

$$\begin{cases}\dfrac{1}{N}\dfrac{\partial\mathbf{H}_2(\mathbf{u},z,t)}{\partial t}+\mathbf{H}_2(\mathbf{u},z,t)\lambda\sum\limits_{k=1}^{K}ju_kS_k(t)=\dfrac{\partial\mathbf{H}_2(\mathbf{u},z,t)}{\partial z}+\\ \qquad+\dfrac{\partial\mathbf{H}_2(\mathbf{u},0,t)}{\partial z}\left\{\mathbf{A}(z)\left[1+\sum\limits_{k=1}^{K}\left(e^{ju_k}-1\right)S_k(t)\right]-\mathbf{I}\right\},\\ \mathbf{H}_2(\mathbf{u},z,t_0)=\mathbf{r}(z).\end{cases}$$

Выполнив здесь замены

$$\frac{1}{N}=\varepsilon^2, \qquad \mathbf{u}=\varepsilon\mathbf{w}, \qquad \mathbf{H}_2(\mathbf{u},z,t)=\mathbf{F}_2(\mathbf{w},z,t,\varepsilon), \tag{6}$$

получим задачу

$$\begin{cases}\varepsilon^2\dfrac{\partial\mathbf{F}_2(\mathbf{w},z,t,\varepsilon)}{\partial t}+\mathbf{F}_2(\mathbf{w},z,t,\varepsilon)\lambda\sum\limits_{k=1}^{K}j\varepsilon w_kS_k(t)=\dfrac{\partial\mathbf{F}_2(\mathbf{w},z,t,\varepsilon)}{\partial z}+\\ \qquad+\dfrac{\partial\mathbf{F}_2(\mathbf{w},0,t,\varepsilon)}{\partial z}\left\{\mathbf{A}(z)\left[1+\sum\limits_{k=1}^{K}\left(e^{j\varepsilon w_k}-1\right)S_k(t)\right]-\mathbf{I}\right\},\\ \mathbf{F}_2(\mathbf{w},z,t_0,\varepsilon)=\mathbf{r}(z).\end{cases} \tag{7}$$

Относительно асимптотического решения $\mathbf{F}_2(\mathbf{w},z,t)=\lim\limits_{\varepsilon\to 0}\mathbf{F}_2(\mathbf{w},z,t,\varepsilon)$ этой задачи имеет место следующее утверждение, доказательство которого в силу ограниченности объема опустим.

Теорема 2. *Асимптотическое решение* $\mathbf{F}_2(\mathbf{w},z,t)$ *задачи (7) имеет вид*

$$\mathbf{F}_2(\mathbf{w},z,t)=\mathbf{r}(z)\exp\left\{\lambda\sum_{k=1}^{K}\frac{(jw_k)^2}{2}\int_{t_0}^{t}S_k(x)\,dx+\kappa\sum_{k=1}^{K}\sum_{\nu=1}^{K}\frac{jw_k jw_\nu}{2}\int_{t_0}^{t}S_k(x)S_\nu(x)\,dx\right\}, \tag{8}$$

где

$$\kappa=2\mathbf{f}_0'\mathbf{e},$$

вектор-строка $\mathbf{f}_0'$ *удовлетворяет системе линейных алгебраических уравнений*

$$\begin{cases}\mathbf{f}_0'[\mathbf{I}-\mathbf{P}]=\lambda[\mathbf{rP}-\mathbf{r}(\infty)],\\ \mathbf{f}_0'\mathbf{Ae}=\dfrac{\lambda^2a_2}{2}-1,\end{cases}$$

$a_2=\mathbf{rA}_2\mathbf{e}$, $\mathbf{A}_2=\int\limits_0^\infty x^2\,d\mathbf{A}(x)$.

Стационарное распределение вероятностей числа заявок в системе SM/(GI/∞)$^{\mathbf{K}}$. Выполняя в (8) замены, обратные к (6), и подставляя полученное выражение в (5), получаем следующее выражение для частичной характеристической функции $\mathbf{H}(\mathbf{u}, z, t)$:

$$\mathbf{H}(\mathbf{u},z,t)=\mathbf{r}(z)\exp\left\{N\lambda\sum_{k=1}^{K}ju_k\int_{t_0}^{t}S_k(x)\,dx+\right.$$

$$\left.+N\lambda\sum_{k=1}^{K}\frac{(ju_k)^2}{2}\int_{t_0}^{t}S_k(x)\,dx+N\kappa\sum_{k=1}^{K}\sum_{\nu=1}^{K}\frac{ju_k ju_\nu}{2}\int_{t_0}^{t}S_k(x)S_\nu(x)\,dx\right\}.$$

Полагая здесь $z\to\infty$ и выполняя переход к характеристической функции $h(\mathbf{u})$ стационарного распределения вероятностей значений исследуемого многомерного процесса $\mathbf{i}(t)$ числа заявок на фазах системы, при $t=T$ и полагая $t_0\to-\infty$, а $T=0$, получаем следующее выражение:

$$h(\mathbf{u})=\exp\left\{N\lambda j\mathbf{uSe}+\frac{1}{2}j\mathbf{u}[N\lambda\mathbf{S}+N\kappa\mathbf{V}]j\mathbf{u}^{\mathrm{T}}\right\}, \tag{9}$$

где $\mathbf{S}$ – диагональная матрица с элементами $S_k=\int\limits_{-\infty}^{0}S_k(t)\,dt$ на главной диагонали, $\mathbf{V}$ – матрица, состоящая из элементов $V_{k\nu}=\int\limits_{-\infty}^{0}S_k(t)S_\nu(t)\,dt$, $k,\nu=\overline{1,K}$.

Заключение. Итак, в работе получено выражение (9) для характеристической функции стационарного распределения числа заявок на фазах многофазной системы массового обслуживания с входящим полумарковским потоком в условии его высокой интенсивности. Полученное асимптотическое распределение является многомерным нормальным с вектором математических ожиданий $N\lambda\mathbf{Se}$ и матрицей ковариаций $N[\lambda\mathbf{S} + \kappa\mathbf{V}]$. На основе проведенных численных экспериментов была определена область применимости аппроксимации (9) – установлено, что данная гауссовская аппроксимация обеспечивает расстояние Колмогорова менее 0,05 при значениях $N \geq 10$.

Результаты получены в рамках выполнения госзадания Минобрнауки России № 1.511.2014/К.

Литература

1. Моисеев А. Н., Назаров А. А. Асимптотический анализ высокоинтенсивного полумарковского потока событий // Доклады ТУСУРа. 2013. № 3 (29). С. 109–115.
2. Королюк В. С. Стохастические модели систем. Киев: Наук. думка, 1989. 208 с.
3. Moiseev A., Nazarov A. Asymptotic Analysis of the Infinite-Server Queueing System with High-Rate Semi-Markov Arrivals // Proc. of the IEEE International Congress on Ultra Modern Telecommunications and Control Systems (ICUMT 2014), Oct. 6–8, 2014. St. Petersburg: IEEE, 2014. P. 507–513.
4. Моисеев А. Н., Назаров А. А. Асимптотический анализ многофазной системы массового обслуживания с высокоинтенсивным рекуррентным входящим потоком // Автометрия. 2014. Т. 50, № 2. С. 67–76.

ИССЛЕДОВАНИЕ G-СЕТЕЙ С МНОГОЛИНЕЙНЫМИ СИСТЕМАМИ И ДОХОДАМИ

В. В. Науменко, М. А. Маталыцкий

Гродненский государственный университет им. Я. Купалы, Гродно, Беларусь

1. Введение. При построении и исследования математических моделей информационно-телекоммуникационных сетей (ИТС) необходимо, чтобы такие модели учитывали возможное влияние различных дестабилизирующих факторов: внезапные сбои, попадание вирусов, потеря передаваемых или обрабатываемых данных. Для учета подобных факторов Э. Геленбе были предложены G-сети [1], в которых рассматриваются дополнительные пуассоновские потоки отрицательных заявок. При поступлении в систему сети отрицательная заявка уничтожает одну положительную заявку, если таковая имеется в наличии в данной системе. Заметим, что при попадании компьютерных вирусов в ИТС из-за потери или искажения информации она несет некоторые расходы (убытки). Их учет возможно осуществить, применив в качестве модели сеть массового обслуживания (МО) с доходами (НМ-сеть) [2] с положительными и отрицательными заявками. В работе [3] исследовалась такая сеть в переходном режиме. В ней при переходе положительной заявки из одной системы обслуживания (СМО) в другую последняя получает некоторый случайный доход, а доход первой СМО уменьшается соответственно на эту величину. Отрицательная заявка,