Филиал Кемеровского государственного университета
в г. Анжеро-Судженске

Национальный исследовательский
Томский государственный университет

Кемеровский государственный университет

Институт проблем управления им. В. А. Трапезникова РАН

Институт вычислительных технологий СО РАН

ИНФОРМАЦИОННЫЕ ТЕХНОЛОГИИ И МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ (ИТММ–2015)

Материалы XIV Международной конференции имени А. Ф. Терпугова

18–22 ноября 2015 г.

Часть 1

Издательство Томского университета

2015

УДК 519

ББК 22.17

И74

Редколлегия:

Р. Т. Якупов, д-р физ.-мат. наук, профессор;

А. А. Назаров, д-р техн. наук, профессор;

Т. В. Любина, канд. физ.-мат. наук

Информационные технологии и математическое моделирование

И74 (ИТММ–2015): Материалы XIV Международной конференции имени А. Ф. Терпугова (18–22 ноября 2015 г.). – Томск : Изд-во Том. ун-та, 2015. – Ч. 1. – 218 с.

ISBN 978-5-7511-2382-6

В часть 1 вошли материалы докладов, представленные на XIV Международной конференции имени А. Ф. Терпугова «Информационные технологии и математическое моделирование» на секциях «Вероятностные методы и модели», «Модели и методы массового обслуживания», «Оптимизационные модели и исследование операций».

Для специалистов в области информационных технологий и математического моделирования.

УДК 519

ББК 22.17

Конференция проводится при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проект № 15-01-20933-г)

ISBN 978-5-7511-2382-6

ИССЛЕДОВАНИЕ ВРЕМЕНИ ОЖИДАНИЯ ОБСЛУЖИВАНИЯ КЛИЕНТОВ CALL-ЦЕНТРА

Е. Ю. Лисовская, С. П. Моисеева

Национальный исследовательский

Томский государственный университет, Томск, Россия

Известно достаточно большое количество работ по моделированию работы центров обработки вызовов (call-центров) – это услуга сети, в которой агенты предоставляют телефонные услуги. Как правило, число операторов, работающих в таких компаниях, может быть достаточно велико. Обслуживание каждого клиента начинается незамедлительно (т.е. системы без отказов) [5]. В таких центрах соединение происходит с автоответчиком, после чего при необходимости происходит соединение с оператором. В настоящей работе предлагается математическая модель работы call-центра в виде двухфазной системы массового обслуживания. Первая фаза представляет собой систему массового обслуживания с неограниченным числом приборов, на вход которой поступает простейший поток заявок с параметром $\bar{\lambda}$, время обслуживания имеет произвольный закон распределения. Известно [6], что выходящий поток также будет пуассоновским с тем же параметром. После обслуживания на первой фазе с вероятностью r происходит соединение с операторами, число которых ограничено, или с вероятностью $1-r$ покидает систему. Возможно возникновение очереди, поэтому вторая фаза представляет СМО вида M/GI/N/∞. Ставится задача определения оптимального числа операторов, обеспечивающих работу центра, при которой время ожидания не превышает заданных значений.

Математическая модель

На вход системы поступает простейший поток с параметром λ и после обслуживания на первой фазе с вероятностью r переходит на вторую фазу. Таким образом, на вход второй фазы поступает простейший поток с параметром $\lambda = \bar{\lambda} r$. Поступающая заявка занимает любой из свободных приборов или становится в очередь в случае, когда все приборы заняты. Система имеет N обслуживающих приборов, время обслуживания каждой заявки является случайной величиной с произвольной функцией распределения $A(x)$, одинаковой для всех приборов.

Известно, что для системы M|M|N|K получены формулы Эрланга [6]. Вместе с тем для произвольного времени обслуживания и бесконечной очереди полученная задача теоретически не решена, и представить аналитическое решение невозможно, поэтому ставится задача построения аппроксимации стационарного распределения вероятностей $P(i)$, $0 \le i < \infty$, числа заявок в рассматриваемой системе M|GI|N|∞.

Аппроксимация распределения вероятностей числа заявок в системе M|GI|N|∞

Обозначим π_i – аппроксимация распределения вероятностей $P(i)$, которые будем определять в виде составного распределения[7]:

$$\pi_i = \begin{cases} C_1 P_1(i), & 0 \le i \le N, \\ C_2 P_2(i - N + 1), & i \ge N, \end{cases} \tag{1}$$

Здесь $P_1(i)$, $0 \le i \le N$ определяются как вероятности числа занятых приборов в N-линейной СМО (M|GI|N|0) с потерями заявок и задаются формулами Эрланга [6]:

$$P_1(i) = \left. \frac{(\lambda a)^i}{i!} \middle/ \left(\sum_{i=0}^{N} \frac{(\lambda a)^i}{i!} \right) \right., \tag{2}$$

где $a = \int_0^\infty (1 - A(x)) dx$ – среднее время обслуживания.

Вероятности $P_2(i)$ определяются как вероятности числа заявок в однолинейной системе M|GI|1|∞ с ожиданием для случая, когда все приборы заняты. В этом случае блок занятых приборов можно считать как один прибор, который обслуживает случайное время с функцией распределения $B(x)$. Поэтому вероятности $P_2(i)$, $i = 0,1,...$ находим по формуле Поллачека–Хинчина [6] для производящей функции:

$$G(x) = \sum_{n=0}^{\infty} x^n P_2(n) = (1 - \lambda b) \frac{(1 - x) B^*(\lambda - \lambda x)}{B^*(\lambda - \lambda x) - x}. \tag{3}$$

В работе [7] показано, что функция распределения $B(x)$ имеет вид

$$B(x) = 1 - (1 - A(x)) \left(1 - \frac{1}{a} \int_0^x (1 - A(z)) dz \right)^{N-1}, \tag{4}$$

а значения констант C_1 и C_2 определяются выражениями

$$C_1 = \frac{P_2(1)}{P_2(1) + P_1(N)(1 - (P_2(0) + P_2(N)))},$$

$$C_2 = \frac{P_1(N)}{P_2(1) + P_1(N)(1 - (P_2(0) + P_2(N)))}.$$

Вероятность немедленного обслуживания

Важной характеристикой для исследования является время ожидания заявки в очереди. Если заявка поступает в систему в тот момент времени, когда в системе есть хотя бы один свободный прибор, то она немедленно встает на обслуживание. Нетрудно показать, что вероятность немедленного обслуживания, учитывая (1), можно записать в виде

$$P_0=\frac{(1-\lambda b)\dfrac{1-B^*(\lambda)}{B^*(\lambda)}\left(1-\dfrac{(\lambda a)^N}{N!}\Big/\sum_{i=0}^{N}\dfrac{(\lambda a)^i}{i!}\right)}{(1-\lambda b)\dfrac{1-B^*(\lambda)}{B^*(\lambda)}+\dfrac{(\lambda a)^N}{N!}\Big/\sum_{i=0}^{N}\dfrac{(\lambda a)^i}{i!}\left[1-(1-\lambda b)\left(1+\dfrac{1-B^*(\lambda)}{B^*(\lambda)}\right)\right]}. \quad (5)$$

Распределение вероятностей положительного времени ожидания

Если заявка поступает в систему в тот момент времени, когда все приборы заняты, тогда ее время ожидания $\tau>0$, и эту величину будем называть положительным временем ожидания τ^+.

Найдем условное распределение вероятностей $P_{ож}(m)$, $m\geq 0$, того, что в очереди m заявок, при условии, что все приборы системы заняты.

Применяя равенство (1), запишем

$$P_{ож}(m)=\pi(N+m)\Big/\sum_{i=0}^{\infty}\pi(N+i)=C_2P_2(1+m)\Big/C_2\sum_{i=0}^{\infty}P_2(1+m)=$$
$$=P_2(1+m)\Big/(1-P_2(0))=\frac{1}{\lambda b}P_2(1+m). \quad (6)$$

То есть условное распределение вероятностей $P_{ож}(m)$ того, что в очереди m заявок, при условии, что все приборы системы заняты, имеет вид

$$P_{ож}(m)=\frac{1}{\lambda b}P_2(m+1). \quad (7)$$

Найдем производящую функцию $G_{ож}(x)$ этого распределения:

$$G_{ож}(x)=\sum_{m=0}^{\infty}x^mP_{ож}(m)=\sum_{m=0}^{\infty}x^m\frac{1}{\lambda b}P_2(m+1)=\frac{1}{\lambda bx}\sum_{\nu=1}^{\infty}x^{\nu}P_{ож}(\nu)=\frac{1}{\lambda bx}\left[G(x)-P_0\right]=$$
$$=\frac{1}{\lambda bx}\left[G(x)-(1-\lambda b)\right]=\frac{1}{\lambda bx}\left[(1-\lambda b)\frac{(1-x)B^*(\lambda-\lambda x)}{B^*(\lambda-\lambda x)-x}-(1-\lambda b)\right]=$$
$$=\frac{1-\lambda b}{\lambda bx}\frac{(1-x)B^*(\lambda-\lambda x)-B^*(\lambda-\lambda x)+x}{B^*(\lambda-\lambda x)-x}=\frac{1-\lambda b}{\lambda b}\frac{1-B^*(\lambda-\lambda x)}{B^*(\lambda-\lambda x)-x},$$

т.е.

$$G_{ож}(x)=\frac{1-\lambda b}{\lambda b}\frac{1-B^*(\lambda-\lambda x)}{B^*(\lambda-\lambda x)-x}. \quad (8)$$

Эта производящая функция получена на периоде занятости рассматриваемой системы, то есть когда заняты все ее приборы. В этом условии N-линейный блок обслуживания, определенный функцией распределения

$A(x)$, допустимо заменить однолинейным с функцией распределения времени обслуживания $B(x)$ вида (4).

Заявка, поступившая в систему на периоде ее занятости, с вероятностью $P_{ож}(m)$ обнаруживает в очереди m заявок, поэтому ее время ожидания τ^+ складывается из суммарного времени обслуживания m заявок, каждое из которых имеет функцию распределения $B(x)$ из (9) и времени дообслуживания одной заявки, имеющего функцию распределения

$$B_0(x)=\frac{1}{b}\int_0^x\left(1-B(z)\right)dz.$$

Обозначив ξ_0 – остаточное время обслуживания, а ξ_1, $\xi_2,\ldots$, ξ_m – времена обслуживания первой, второй и m-й заявок в очереди, время ожидания можно определить как

$$\tau^+=\xi_0+\xi_1+\ldots+\xi_m.$$

Найдем характеристическую функцию $h(u)$ положительного времени ожидания заявок в системе M|GI|N|∞. Применяя формулу полной вероятности для математических ожиданий, можно записать

$$h(u)=M\left\{e^{ju\tau^+}\right\}=\sum_{m=0}^{\infty}M\left\{\exp\{ju(\xi_0+\xi_1+\ldots+\xi_m)\}\mid m(t)=m\right\}P_{ож}(m)=$$
$$=\sum_{m=0}^{\infty}M\left\{e^{ju\xi_0}\right\}\left(M\left\{e^{ju\xi_m}\right\}\right)^m P_{ож}(m)=\varphi_0(u)\sum_{m=0}^{\infty}\varphi(u)^m P_{ож}(m), \quad (9)$$

где $\varphi_0(u)$ и $\varphi(u)$ – характеристические функции остаточного и полного времени обслуживания одной заявки, здесь

$$\varphi(u)=\int_0^{\infty}e^{jux}dB(x). \quad (10)$$

Последнее равенство для $h(u)$ перепишем в виде

$$h(u)=\varphi_0(u)G_0(\varphi(u))=\varphi_0(u)\frac{1-\lambda b}{\lambda b}\frac{1-B^*(\lambda-\lambda\varphi(u))}{B^*(\lambda-\lambda\varphi(u))-\varphi(u)}. \quad (11)$$

Так как

$$B_0(x)=\frac{1}{b}\int_0^x\left(1-B(z)\right)dz,$$

то

$$\varphi_0(u)=\int_0^{\infty}e^{jux}dB_0(x)=\frac{1}{b}\int_0^{x}e^{jux}\left(1-B(x)\right)dx=\frac{1}{jub}\left(\varphi(u)-1\right),$$

поэтому характеристическую функцию $h(u)$ из (11) можно окончательно записать в виде

$$h(u) = \frac{1}{jub}\frac{(1-\lambda b)}{\lambda b}(\varphi(u)-1)\frac{1-B^*(\lambda-\lambda\varphi(u))}{B^*(\lambda-\lambda\varphi(u))-\varphi(u)}. \quad (12)$$

Здесь $\varphi(u)$ имеет вид (10).

Формулы (5) и (12) полностью характеризуют время ожидания заявки в очереди N-линейной системы M|GI|N|∞. Формула (5) для P_0 определяет вероятность того, что время ожидания будет нулевым, а $h(u)$ из (12) является характеристической функцией распределения вероятностей положительного времени ожидания τ^+ заявки в очереди.

Применяя характеристическую функцию $h(u)$ из (12), среднее значение $\bar{\tau}^+$ положительного времени ожидания заявки в очереди запишем в виде

$$\bar{\tau}^+ = \frac{1}{j}h'(u)\Big|_{u=0} = \frac{b_2}{2b(1-\lambda b)}, \quad (13)$$

где b и b_2 – математическое ожидание и второй начальный момент случайной величины, определяемой функцией распределения $B(x)$ из (4).

Заключение

В работе построена математическая модель call-центра, получена формула для нахождения вероятности немедленного облуживания, получена характеристическая функция распределения вероятностей положительного времени ожидания заявок в очереди. Полученные результаты позволяют определить оптимальное число приборов на второй фазе, что то же самое число работающих операторов в call-центре.

Литература

1. Mandelbaum A., Pats G. State-dependent queues: approximations and applications // In Stochastic Networks, IMA Volumes in Mathematics / F. P. Kelly and R. J.Williams, eds. Springer, 1995. P. 239–282.

2. Borst S., Mandelbaum A., Reiman, M. Dimensioning Large Call Centers // Operations Research. 2004. Vol. 52. P. 17–34; downloadable at http://iew3. technion.ac.il/serveng/References/references.html

3. Liu L, Kashyap B. R. K., Templeton J. G. C. The service system M/MR/∞ with impatient customers // Queuing Systems. 1987. Vol. 2, no. 4. P. 363–372.

4. Tsoukato K. P., Makowski A. M. Heavy Traffic Analysis for A Multiplexer Driven by M/GI/infinity Input Processes [Электронный ресурс]. URL: http://handle.dtic.mil/100.2/ADA4555833. P. 780–789.

5. Brown L., Gans N., Mandelbaum A. et al. Statistical Analysis of a Telephone Call Center // A Queueing-Science Perspective. Journal of the American Statistical Association. 2005. Vol. 100. P. 36–50.

6. Назаров А. А. Теория массового обслуживания : учеб. пособие / А. А. Назаров, А. Ф. Терпугов. Томск: Изд-во НТЛ, 2010. 228 с.

7. Лисовская Е. Ю. Исследование процесса числа заявок в системе M|GI|N|∞ / Е. Ю. Лисовская, С. П. Моисеева // Теория вероятностей, случайные процессы, математическая статистика и приложения: матер. Междунар. науч. конф., посвящ.

80-летию проф., д-ра физ.-мат. наук Г.А. Медведева, Минск, 23–26 февр. 2015 г. / редкол.: Н. Н. Труш [и др.]. Минск: РИВШ, 2015. С. 123–127.

ИССЛЕДОВАНИЕ ДИНАМИЧЕСКОЙ RQ-СИСТЕМЫ С ВХОДЯЩИМ MAP-ПОТОКОМ ЗАЯВОК

Т. В. Любина, В. О. Азева

Филиал Кемеровского государственного университета
в г. Анжеро-Судженске, Россия

Рассмотрим систему массового обслуживания с источником повторных вызовов и входящим MAP-потоком заявок, управляемую динамическим протоколом доступа, которую будем называть динамической RQ-системой с входящим MAP-потоком заявок [1].

На вход RQ-системы поступает MAP-поток заявок из внешнего источника, определяемый матрицей $\mathbf{Q}$ инфинитезимальных характеристик $q_{\nu n}$ цепи Маркова $n(t)$, управляющей MAP-потоком, также задан набор неотрицательных чисел $\rho\lambda_n$ и вероятностей $d_{nn} = 0$, которые целесообразно определять матрицей $\mathbf{D} = \left[d_{\nu n}\right]$ и диагональной матрицей $\rho\mathbf{\Lambda}$ условных интенсивностей $\rho\lambda_n$ на главной диагонали. Заявка, заставшая прибор свободным, занимает его для обслуживания в течение случайного времени, распределенного по экспоненциальному закону с параметром μ. По завершении обслуживания заявка покидает прибор. Если во время обслуживания заявки поступает другая, то поступившая заявка переходит в источник повторных вызовов. Из источника повторных вызовов после случайной задержки заявка с динамической (зависящей от состояния источника повторных вызовов) интенсивностью γ / i вновь обращается к прибору с повторной попыткой его захвата; i – число заявок в источник повторных вызовов. Если прибор свободен, то заявка становится на обслуживание, если же он занят, то возвращается в источник повторных вызовов [2].

Состояние системы в момент времени t определяется трехмерной цепью Маркова $\left\{k(t), n(t), i(t)\right\}$, где $i(t)$ – число заявок в ИПВ; $n(t)$ – значения цепи Маркова, управляющей MMPP-потоком, а $k(t)$ определяет состояние прибора следующим образом: $k(t) = 0$, если прибор свободен, и $k(t) = 1$, если прибор занят.

Обозначим $P\left\{k(t) = k, n(t) = n, i(t) = i\right\} = P(k, n, i, t)$ – вероятность того, что в момент времени t прибор находится в состоянии z, цепь Маркова в состоянии n и в ИПВ i заявок. Таким образом, распределение вероятностей $P(k, n, i, t)$ удовлетворяет следующей системе дифференциальных уравнений Колмогорова для распределения вероятностей $P(k, n, i, t)$: