Филиал Кемеровского государственного университета
в г. Анжеро-Судженске

Национальный исследовательский
Томский государственный университет

Кемеровский государственный университет

Институт проблем управления им. В. А. Трапезникова РАН

Институт вычислительных технологий СО РАН

ИНФОРМАЦИОННЫЕ ТЕХНОЛОГИИ И МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ (ИТММ–2015)

Материалы XIV Международной конференции имени А. Ф. Терпугова

18–22 ноября 2015 г.

Часть 1

Издательство Томского университета

2015

УДК 519
ББК 22.17
И74

Информационные технологии и математическое моделирование
И74 (ИТММ–2015): Материалы XIV Международной конференции имени А. Ф. Терпугова (18–22 ноября 2015 г.). – Томск : Изд-во Том. ун-та, 2015. – Ч. 1. – 218 с.

ISBN 978-5-7511-2382-6

В часть 1 вошли материалы докладов, представленные на XIV Международной конференции имени А. Ф. Терпугова «Информационные технологии и математическое моделирование» на секциях «Вероятностные методы и модели», «Модели и методы массового обслуживания», «Оптимизационные модели и исследование операций».

Для специалистов в области информационных технологий и математического моделирования.

УДК 519

ББК 22.17

Конференция проводится при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проект № 15-01-20933-г)

ISBN 978-5-7511-2382-6

Таким образом, в данной работе построена математическая модель страховой компании в виде системы массового обслуживания с неограниченным количеством обслуживающих приборов. Найдена характеристическая функция двумерного процесса числа застрахованных в компании рисков и числа требований на страховые выплаты. Показано, что полученные результаты являются обобщением частных случаев.

Литература

1. Гафуров Ш. Р., Гугнин В. И., Аманов С. Н. Язык бизнеса. Ташкент: Шарк, 1995. 738 с.
2. Глухова Е. В., Змеев О. А., Лившиц К. И. Математические модели страхования. Томск: Изд-во Том. ун-та, 2004. 180 с.
3. Назаров А. А., Терпугов А. Ф. Теория массового обслуживания. Томск: Изд-во НТЛ, 2005. 228 с.
4. Эльсгольц Л. Э. Дифференциальные уравнения и вариационное исчисление. М.: Наука, 1969. 424 с.

ИССЛЕДОВАНИЕ ПОТОКА ПОВТОРНЫХ ОБРАЩЕНИЙ В СМО С ПОВТОРНЫМ ОБСЛУЖИВАНИЕМ ЗАЯВОК МЕТОДОМ АСИМПТОТИЧЕСКОГО АНАЛИЗА

Л. А. Задиранова

Национальный исследовательский
Томский государственный университет, Томск, Россия

Рассмотрим системы массового обслуживания с неограниченным числом обслуживающих устройств, в качестве моделей входящих потоков взяты пуассоновский поток (M), марковский модулированный поток (MMPP) и рекуррентный поток (GI).

Продолжительность обслуживания заявки является случайной величиной и имеет экспоненциальное распределение с параметром μ. Поступившая заявка занимает любой из свободных приборов, завершив обслуживание на котором, с вероятностью $1-r$ покидает систему или с вероятностью r возвращается для повторного обслуживания.

Ставится задача исследования потока заявок, обратившихся в рассматриваемые системы за время t для повторного обслуживания (поток повторных обращений).

Поток повторных обращений в системе M|M|∞ с повторным обслуживанием

Рассмотрим систему массового обслуживания с неограниченным числом приборов, на вход которой поступает простейший поток заявок с интенсивностью λ. Обозначим $i(t)$ – число занятых приборов в момент времени t; $n(t)$ – число заявок, обратившихся в систему за время t для повторного обслуживания, тогда двумерный поток $\{i(t), n(t)\}$ является марковским [1].

Для распределений вероятностей $P(i,n,t)=P\{i(t)=i,n(t)=n\}$ запишем систему дифференциальных уравнений Колмогорова вида

$$\frac{\partial P(i,n,t)}{\partial t}=-\lambda P(i,n,t)-i\mu P(i,n,t)+\lambda P(i-1,n,t)+$$
$$+i\mu r P(i,n-1,t)+\mu(1-r)(1+i)P(i+1,n,t),\text{ где } i=\overline{0,\infty},n=\overline{0,\infty}. \qquad (1)$$

Введем частичные характеристические функций в виде [2]

$$H(u,w,t)=\sum_i\sum_n e^{jui}e^{jwn}P(i,n,t),$$

тогда из (1) получаем следующее дифференциальное уравнение:

$$\frac{\partial H(u,w,t)}{\partial t}=\lambda(e^{ju}-1)H(u,w,t)+j\mu(1-re^{jw}-(1-r)e^{-ju})\frac{\partial H(u,w,t)}{\partial u}. \qquad (2)$$

Полученное уравнение позволяет определить основные вероятностные характеристики рассматриваемой системы, в том числе и для потока повторных обращений в систему.

Сформулируем вспомогательное утверждение относительно вида асимптотической характеристической функции числа занятых приборов в рассматриваемой системе.

Лемма. *Асимптотическое приближение характеристической функции числа занятых приборов в системе $M|M|\infty$ в условии растущего времени обслуживания имеет вид*

$$h(u)=\exp\left\{\frac{j\lambda u}{\mu(1-r)}\right\}.$$

Проведем исследование потока повторных обращений в систему за время t с помощью метода асимптотического анализа в условии растущего времени обслуживания [3]. Для этого обозначим

$$\mu=\varepsilon,\ u=\varepsilon y,\ H(u,w,t)=F(y,w,t,\varepsilon)$$

и перепишем (2) в виде

$$\frac{\partial F(y,w,t,\varepsilon)}{\partial t}=\lambda(e^{j\varepsilon y}-1)F(y,w,t,\varepsilon)+j(1-re^{jw}-(1-r)e^{-j\varepsilon y})\frac{\partial F(y,w,t,\varepsilon)}{\partial y}. \qquad (3)$$

Теорема 1. *Предельное, при $\varepsilon\to 0$, значение функции $F(y, w, t)$ решения $F(y, w, t, \varepsilon)$ уравнения (3) имеет вид*

$$F(y,w,t)=\exp\left\{\frac{\lambda rt(e^{jw}-1)}{1-r}+\frac{j\lambda y}{1-r}\right\}. \qquad (4)$$

Доказательство.

Выполняя в уравнении (4) предельный переход при $\varepsilon\to 0$, получаем дифференциальное уравнение первого порядка:

$$\frac{\partial F(y,w,t)}{\partial t}=jr(1-e^{jw})\frac{\partial F(y,w,t)}{\partial y}. \qquad (5)$$

Общее решение полученного уравнения имеет вид

$$F(y,w,t)=\varphi\left(t+\frac{jy}{r(e^{jw}-1)}\right),$$

где $\varphi(y)$ – некоторая функция, вид которой определим, используя начальное условие.

Рассмотрим функцию $F(y,w,t)$ в нулевой момент времени, очевидно, что данная функция не будет зависеть от w, иначальное условие имеет вид

$$F(y,w,0)=\Phi(y), \tag{6}$$

где $\Phi(y)$ – асимптотическое приближение характеристической функции распределения числа занятых приборов в системе в условии растущего времени обслуживания заявок, вид которого определен выше:

$$\Phi(y)=\exp\left\{\frac{j\lambda y}{1-r}\right\}.$$

Таким образом, решение уравнения (4), удовлетворяющее начальному условию (6), запишем в виде

$$F(y,w,t)=\exp\left\{\frac{\lambda tr(e^{jw}-1)}{1-r}+\frac{j\lambda y}{1-r}\right\},$$

которое совпадает с равенством (4). Теорема доказана.

Полагая в (4) $y=0$, имеем асимптотическое приближение характеристической функции числа повторных обращений, поступивших в систему за время t, в условии растущего времени обслуживания

$$h(w,t)=M\{e^{jwn(t)}\}=H(0,w,t)=F(0,w,t,\varepsilon)\approx F(0,w,t)=\exp\left\{\frac{\lambda rt(e^{jw}-1)}{1-r}\right\}.$$

Поток повторных обращений в системе MMPP|M|∞ с повторным обслуживанием

Рассмотрим систему массового обслуживания с неограниченным числом приборов, на вход которой поступает марковский модулированный поток (MMPP), управляемый цепью Маркова $k(t)$ с конечным числом состояний, $k(t)$ = 1, 2,…,K, заданной матрицей инфинитезимальных характеристик $\mathbf{Q}=\|q_{ij}\|$, i, j = 1, 2,…,K, и матрицей условных интенсивностей $\mathbf{\Lambda}$ [4].

Обозначим $i(t)$ – число занятых приборов в момент времени t; $n(t)$ – число повторных заявок, обратившихся за время t, $k(t)$ – состояние управляющей цепи Маркова. Трехмерный процесс $\{k(t), i(t), n(t)\}$ является марковским.

Для распределения вероятностей $P(k,i,n,t)=P\{k(t)=k,i(t)=i,n(t)=n\}$ можно записать систему дифференциальных уравнений Колмогорова вида

$$\frac{\partial P(k,i,n,t)}{\partial t}=-\lambda_k P(k,i,n,t)-i\mu P(k,i,n,t)+\lambda_k P(k,i-1,n,t)+$$

$$+\mu(1-r)(1+i)P(k,i+1,n,t)+\mu irP(k,i,n-1,t)+\sum P(\nu,i,n,t)q_{\nu k}, \qquad (7)$$
$$k,\ v=1,\ 2,\ \ldots,\ K, \quad i,\ n=1,\ 2,\ 3,\ \ldots.$$

Введя частичные характеристические функции, запишем систему (7) в виде дифференциального матричного уравнения

$$\frac{\partial \mathbf{H}(u,w,t)}{\partial t}+j\mu(re^{jw}-1+(1-r)e^{-ju})\frac{\partial \mathbf{H}(u,w,t)}{\partial u}=\mathbf{H}(u,w,t)[(e^{ju}-1)\mathbf{\Lambda}+\mathbf{Q}], \qquad (8)$$

где

$$\mathbf{H}(u,w,t)=[H(1,u,w,t),H(2,u,w,t),...,H(K,u,w,t)],$$

$$\mathbf{\Lambda}=\begin{bmatrix}\lambda_1 & 0 & . & 0\\ 0 & \lambda_2 & . & 0\\ . & . & . & .\\ 0 & 0 & . & \lambda_K\end{bmatrix}, \quad \mathbf{Q}=\begin{bmatrix}q_{11} & q_{12} & \cdot & q_{1K}\\ q_{21} & q_{22} & \cdot & q_{2K}\\ . & . & . & .\\ q_{K1} & q_{K2} & \cdot & q_{KK}\end{bmatrix}.$$

Найдем асимптотическую характеристическую функцию числа повторных обращений в системе MMPP|M|∞ за время t в условии растущего времени, обозначим

$$\mu=\varepsilon,\ u=\varepsilon y,\ \mathbf{H}(u,w,t)=\mathbf{F}(y,w,t,\varepsilon)$$

и перепишем уравнение (8) с учетом введенных обозначений:

$$\frac{\partial \mathbf{F}(y,w,t,\varepsilon)}{\partial t}+j(re^{iw}-1+\left(1-r\right)e^{-j\varepsilon y})\frac{\partial \mathbf{F}\left(y,w,t,\varepsilon\right)}{\partial y}=$$
$$=\mathbf{F}\left(y,w,t,\varepsilon\right)\left[\left(e^{j\varepsilon y}-1\right)\mathbf{\Lambda}+\mathbf{Q}\right]. \qquad (9)$$

Сформулируем теорему, доказательство которой можно провести аналогично доказательству теоремы 1.

Теорема 2. *Сумма компонентов предельного, при* $\varepsilon\to 0$*, значения вектор-функции* $F(y,w,t)$ *решения* $F(y, w, t, \varepsilon)$ *уравнения (9) имеет вид*

$$\mathbf{F}(y,w,t)\mathbf{E}=\exp\left\{\frac{r\kappa t(e^{jw}-1)}{1-r}+\frac{jy\kappa}{1-r}\right\}, \qquad (10)$$

где величина κ *определяется выражением* $\kappa=\mathbf{R\Lambda E}$.

Полагая в (10) $y = 0$, имеем асимптотическое приближение характеристической функции числа повторных обращений, поступивших в систему за время t, в условии растущего времени обслуживания:

$$h(w,t)=M\{e^{jwn(t)}\}=\mathbf{H}(0,w,t)\mathbf{E}=$$
$$=\mathbf{F}(0,w,t,\varepsilon)\mathbf{E}\approx\mathbf{F}(0,w,t)\mathbf{E}=\exp\left\{\frac{\lambda rt(e^{jw}-1)}{1-r}\right\}.$$

Поток повторных обращений в системе GI|M|∞ с повторным обслуживанием

Рассмотрим систему массового обслуживания с неограниченным числом обслуживающих приборов, на вход которой поступает рекуррентный поток заявок с функцией распределения длин интервалов между моментами поступления заявок $A(x)$.

Обозначим $i(t)$ – число занятых приборов в системе в момент времени t; $n(t)$ – число заявок, обратившихся в систему за время t для повторного обслуживания. Так как полученный случайный процесс $\{i(t), n(t)\}$ немарковский, то марковизируем его, введя дополнительную переменную $z(t)$, равную длине интервала от момента t до момента поступления следующей заявки. Тогда трехмерный процесс $\{z(t), i(t), n(t)\}$ будет марковским.

Обозначим распределение вероятностей значений полученного марковского процесса $P(z,i,n,t) = P\{z(t) < z, i(t) = i, n(t) = n\}$, тогда получаем систему дифференциальных уравнений Колмогорова:

$$\frac{\partial P(z,i,n,t)}{\partial t} = \frac{\partial P(z,i,n,t)}{\partial z} - \frac{\partial P(0,i,n,t)}{\partial z} +$$
$$+ i\mu r P(z,i,n-1,t) + \mu(1+i)(1-r)P(z,i+1,n,t) +$$
$$+ A(z)\frac{\partial P(0,i-1,n,t)}{\partial z} - i\mu P(z,i,n,t), \text{ где } i = \overline{0,\infty}, n = \overline{0,\infty}. \tag{11}$$

Введя частичные характеристические функции, запишем систему (11) в виде

$$\frac{\partial H(z,u,w,t)}{\partial t} = \frac{\partial H(z,u,w,t)}{\partial z} - j\mu\left[(1-r)e^{-ju} + re^{jw} - 1\right]\frac{\partial H(z,u,w,t)}{\partial u} +$$
$$+ (e^{ju}A(z) - 1)\frac{\partial H(0,u,w,t)}{\partial z}. \tag{12}$$

Определим характеристики потока повторных обращений в рассматриваемой системе методом асимптотического анализа. Рассмотрим систему GI|M|∞ с повторным обслуживанием в условии растущего времени обслуживания, для этого обозначим

$$\mu = \varepsilon, u = \varepsilon y, H(z,u,w,t) = F(z,y,w,t,\varepsilon)$$

и перепишем (12) с учетом введенных обозначений:

$$\frac{\partial F(z,y,w,t,\varepsilon)}{\partial t} = \frac{\partial F(z,y,w,t,\varepsilon)}{\partial z} + (e^{j\varepsilon y}A(z) - 1)\frac{\partial F(0,y,w,t,\varepsilon)}{\partial z} -$$
$$- j((1-r)e^{-j\varepsilon y} + re^{jy} - 1)\frac{\partial F(z,y,w,t,\varepsilon)}{\partial y} = 0. \tag{13}$$

Сформулируем теорему, доказательство которой можно провести аналогично доказательству теоремы 1.

Теорема 3. *Предельное, при* $\varepsilon \to 0$, *значение функции* $F(y,w,t)$ *решения* $F(y, w, t, \varepsilon)$ *уравнения (13) имеет вид*

$$F(y,w,t) = \exp\left\{\frac{r\lambda t}{1-r}(e^{jw} - 1) + \frac{j\lambda y}{1-r}\right\}. \tag{14}$$

Полагая в (14) y=0, имеем асимптотическое приближение характеристической функции числа повторных обращений, поступивших в систему за время t, в условии растущего времени обслуживания

$$h(w,t) = M\{e^{jwn(t)}\} = H(0,w,t) = F(0,w,t,\varepsilon) \approx F(0,w,t) = \exp\left\{\frac{\lambda rt(e^{jw}-1)}{1-r}\right\}.$$

Таким образом, в настоящей работе рассмотрены математические модели систем M|M|∞, MMPP|M|∞ и GI|M|∞ с повторными обращениями, получено асимптотическое приближение характеристических функций потока суммарных обращений в условии растущего времени обслуживания для каждой системы.

Литература

1. Морозова А. С. Исследование математических моделей стимулирования сбыта продукции: дис. … канд. физ.-мат. наук / Филиал Кемеровского гос. ун-та в г. Анжеро-Судженске. Анжеро-Судженск, 2007. 115 с.

2. Назаров А. А. Теория массового обслуживания: учеб. пособие / А. А. Назаров, А. Ф. Терпугов. Томск: Изд-во НТЛ, 2004. 228 с.

3. Назаров А. А. Методы асимптотического анализа в теории массового обслуживания / А. А. Назаров, С. П. Моисеева. Томск: Изд-во НТЛ, 2006. 112 с.

4. Жидкова Л. А. Исследование числа занятых приборов в системе MMPP|M|∞ с повторными обращениями / Л. А. Жидкова, С. П. Моисеева // Вестник Томского государственного университета. Управление, вычислительная техника и информатика. 2014. № 1 (26). С. 53–62.

ИССЛЕДОВАНИЕ ПОТОКА СУММАРНЫХ ОБРАЩЕНИЙ В СИСТЕМЕ MMPP|M|∞ С ПОВТОРНЫМ ОБЛУЖИВАНИЕМ ТРЕБОВАНИЙ

Л. А. Задиранова, С. П. Моисеева

Национальный исследовательский

Томский государственный университет, Томск, Россия

Рассмотрим бесконечнолинейную систему массового обслуживания с входящим MMPP-потоком, управляемым цепью Маркова $k(t)$ с конечным числом состояний, $k(t) = 1, 2, \ldots, K$, заданной матрицей инфинитезимальных характеристик $\mathbf{Q} = \left\|q_{ij}\right\|$, $i, j = 1, 2, \ldots,$ K, и матрицей условных интенсивностей $\mathbf{\Lambda}$. Продолжительность обслуживания заявки имеет экспоненциальное распределение с параметром μ. Поступившая заявка занимает любой из свободных приборов, завершив обслуживание на котором, с вероятностью 1–r покидает систему или с вероятностью r возвращается в неё для повторного обслуживания [1].

Ставится задача исследования потока суммарных обращений в систему MMPP|M|∞ с повторным обслуживанием заявок.