Министерство образования и науки РФ
НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ
ТОМСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ

Утверждаю
зав. кафедрой общей и
экспериментальной физики
______________В. П. Демкин
«____»_________2015 г.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ МОМЕНТА ИНЕРЦИИ ОДНОРОДНОГО ДИСКА МЕТОДОМ КОЛЕБАНИЙ

Методические указания
для выполнения лабораторной работы

Томск – 2015

РАССМОТРЕНО И УТВЕРЖДЕНО методической комиссией физического факультета

Протокол № ___ от «___» _________ 2015 г.

Председатель комиссии В. М. Вымятнин

Лабораторная работа посвящена изучению законов вращательного и колебательного движения. Студенты в ходе её выполнения должны определить момент инерции однородного диска методом колебаний.

Методические указания рассчитаны на студентов физических специальностей.

Составитель: доц. А.М. Толстик

Томский государственный университет, 2015

ОПРЕДЕЛЕНИЕ МОМЕНТА ИНЕРЦИИ ОДНОРОДНОГО ДИСКА МЕТОДОМ КОЛЕБАНИЙ

Цель работы: изучение законов вращательного и колебательного движения; определение момента инерции однородного диска методом колебаний.

МОМЕНТ СИЛЫ ОТНОСИТЕЛЬНО ОСИ

Рассмотрим тело, имеющее закрепленную ось вращения (рис.1). На тело пусть действует сила $\vec{F}$, перпендикулярная этой оси. Силу можно разложить на две составляющие, одна из которых $\vec{F}_n$ действует вдоль прямой, проходящей через ось. Эта сила не влияет на вращение тела, а может лишь его деформировать. Другая составляющая $\vec{F}_\tau$ перпендикулярна ей, именно эта сила заставляет тело изменить состояние своего вращения. Чем больше расстояние $OA = a$ от оси вращения до точки приложения силы, тем легче заставить тело вращаться. Поэтому при изучении вращательного движения играет роль не сама сила, а величина, называемая моментом силы относительно оси, равная $M = F_\tau a$.

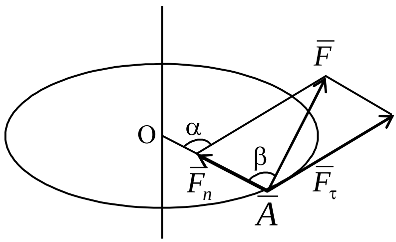

Рис. 1

Из рисунка 1 видно, что $F_\tau = F \sin\beta$, то есть

$$M = F_\tau a = Fa \sin\beta = Fh, \tag{1}$$

где величина $h = a\ \sin\beta$ – кратчайшее расстояние от оси вращения до линии действия силы $\vec{F}$, называемое плечом силы.

Таким образом, моментом силы относительно оси вращения называется произведение величины этой силы на её плечо.

Если на тело с закрепленной осью действует несколько сил, которые стремятся повернуть тело в противоположные стороны, то их моменты имеют противоположные знаки.

ОСНОВНОЕ УПРАВЛЕНИЕ ВРАЩАТЕЛЬНОГО ДВИЖЕНИЯ

Пусть частица массы m движется по окружности радиуса *r*. Второй закон Ньютона для частицы запишется в виде

$$m \cdot \frac{d\vec{\mathrm{v}}}{dt} = \vec{F} \,,$$

где $\vec{F}$ – результирующая сила.

В проекции на касательную уравнение перепишется:

$$m \frac{\mathrm{dv}}{\mathrm{dt}} = F_\tau \,,$$

где F_τ – касательная проекция силы $\vec{F}$ (рис.1). Угловая скорость ω и линейная скорость v связаны соотношением:

$$\mathrm{v} = \omega \mathrm{r} \,.$$

Тогда уравнение примет вид:

$$mr \frac{d\omega}{dt} = F_\tau \,.$$

Умножим левую и правую части уравнения на *r* и воспользуемся тем, что $M = F_\tau \cdot r$ – момент силы $\vec{F}$ относительно оси вращения, тогда уравнение примет вид:

$$mr^2 \frac{d\omega}{dt} = M \,, \qquad (2)$$

где M – момент результирующей силы $\vec{F}$, равный сумме моментов сил, действующих на частицу.

Рассмотрим теперь твердое тело, вращающееся вокруг неподвижной оси OO (рис. 2). При вращении каждая из малых частиц, на которые можно разбить это тело, движется по своей окружности, причем радиусы этих окружностей различны, а угловая скорость вращения одинакова. Тогда для каждой частицы тела можно записать уравнение типа (2). Система этих уравнений примет вид:

$$\begin{cases} \Delta m_1 r_1^2 \dfrac{d\omega}{dt} = M_1^{вн} + M_{12} + M_{13} + \ldots + M_{1N} \\ \Delta m_2 r_2^2 \dfrac{d\omega}{dt} = M_2^{вн} + M_{21} + M_{23} + \ldots + M_{2N} \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \Delta m_N r_N^2 \dfrac{d\omega}{dt} = M_N^{вн} + M_{N1} + M_{N2} + \ldots + M_{N,N-1} \end{cases}, \qquad (3)$$

где Δm_i – масса i – той частицы, r_i – ее расстояние до оси, $M_i^{вн}$ – момент внешних сил, т. е. сил, действующих на i-ю частицу со стороны других тел, M_{ij} – момент силы, действующей на i-ю частицу тела со стороны j-ой, N – полное число частиц, на которые мы разбили тело.

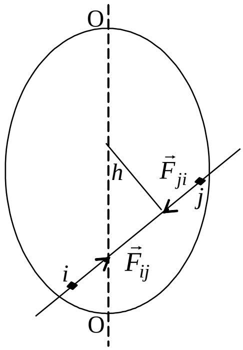

Рис. 2

По третьему закону Ньютона сила, с которой на частицу i действует частица j, равна и противоположно направлена силе, с которой частица i действует на частицу j, то есть $\vec{F}_{ij} = -\vec{F}_{ji}$ (рис. 2). Линия действия этих сил общая, поэтому и плечо h у этих сил одинаково (рис. 2), то есть $M_{ij} + M_{ji} = F_{ij}h + F_{ji}h = 0$.

Если мы теперь просуммируем левые и правые части уравнений системы (3), то получим:

$$\sum_{i=1}^{N} \Delta m_i r_i^2 \frac{d\omega}{dt} = \sum_{i-1}^{N} M_i^{вн} \qquad (4)$$

Сумма моментов всех сил взаимодействия между частицами обратится в ноль ($M_{12} + M_{21} = 0$ и т. д.).

Введем величину:

$$I = \sum_{i=1}^{N} \Delta m_i r_i^2 , \tag{5}$$

которую называют моментом инерции твердого тела относительно данной оси. Тогда уравнение (4) запишется в виде:

$$I \frac{d\omega}{dt} = M^{вн} , \tag{6}$$

где $M^{вн} = \sum_{i=1}^{N} M_i^{вн}$ – суммарный момент всех внешних сил, действующих на тело. Уравнение (6) называют основным уравнением вращательного движения. Оно играет для вращательного движения ту же роль, что и уравнение второго закона Ньютона для поступательного. Из уравнения (6) видно, что момент инерции является мерой инертности для вращательного движения, то есть если у тела велик момент инерции I, то при постоянном моменте сил $M^{вн}$ оно приобретает малое угловое ускорение $d\omega/dt$. Таким образом, тело с большим моментом инерции трудно раскрутить, но трудно и остановить, его инертность велика. Тело же с малым моментом инерции легко раскрутить, но и легко остановить.

Нужно отметить, что определение момента инерции тела по формуле (5) является приближенным, так как число частиц, на которые разбивается тело, в этой формуле конечно. Следует устремить размер таких частиц к нулю, а число их к бесконечности, и совершить в формуле (5) предельный переход, при котором сумма превратится в интеграл:

$$I = \lim_{N \to \infty} \sum_{i=1}^{N} \Delta m_i r_i^2 = \int r^2 dm , \tag{7}$$

где интегрирование осуществляется по всему объему тела.

Ясно, что момент инерции данного твердого тела зависит от распределения масс в этом теле относительно оси вращения, а не просто от общей массы тела. Так, например, если взять два одинаковых по размерам и массе цилиндра, один из которых сплошной, а другой пустотелый, то у пустотелого цилиндра момент инерции относительно оси симметрии больше, так как его участки расположены в среднем на больших расстояниях от оси вращения, а в формулу (7) расстояние входит в квадрате.

Момент инерции одного и того же тела зависит от положения оси вращения. Например, момент инерции цилиндра относительно периферийной оси больше, чем для оси, проходящей через центр масс, так как часть частиц цилиндра находится от периферийной оси на больших расстояниях, давая большие вклады, пропорциональные квадрату расстояния, в суммарный момент инерции.

ТЕОРЕМА ШТЕЙНЕРА-ГЮЙГЕНСА

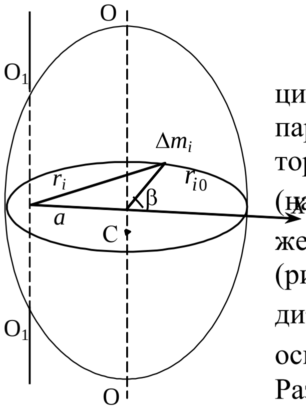

Рис. 3

Эта теорема связывает моменты инерции одного и того же тела относительно параллельных друг другу осей, одна из которых проходит через центр масс тела (например, оси OO и O_1O_1 на рис.3). Докажем ее. Возьмем произвольное твердое тело (рис.3). C – его центр масс, а ось OO проходит через точку C. Ось O_1O_1 параллельна оси OO, расстояние между осями равно a. Разобьем данное тело на элементарные участки. Δm_i – масса участка с номером i, r_{i0} – кратчайшее расстояние от этого участка до оси OO, а r_i – расстояние до оси O_1O_1. По теореме косинусов

$$r_i^2 = r_{i0}^2 + a^2 + 2a \cdot r_{i0} \cos\beta = r_{i0}^2 + a^2 + 2ax_{i0},$$

где $x_{io} = r_{io} \cos\beta$ – координата X материальной точки Δm_i (начало координат выбрано на оси OO). Тогда момент инерции относительно O_1O_1

$$I=\sum_{i=1}^{N}\Delta m_i r_i^2=\sum_{i=1}^{N}\Delta m_i\left(r_{i0}^2+a^2+2ax_{i0}\right)=$$

$$=\sum_{i=1}^{N}\Delta m_i r_{i0}^2+a^2\sum_{i=1}^{N}\Delta m_i+2a\sum_{i=1}^{N}\Delta m_i x_{i0}$$

Если ввести массу всего тела $M=\sum_{i=1}^{N}\Delta m_i$ и координату центра масс $x_c=\frac{1}{M}\sum_{i=1}^{N}\Delta m_i x_{i0}$, то последняя сумма запишется $2aMx_c=0$, так как $x_c=0$ ввиду того, что центр масс тела находится на оси ОО. Тогда момент инерции I равен

$$I=I_0+Ma^2 \qquad (8)$$

где $I_0=\sum_{i=1}^{N}\Delta m_i r_{i0}^2$ – момент инерции этого тела относительно оси *OO*. Формула (8) выражает содержание теоремы Штейнера:

момент инерции тела относительно произвольной оси равен сумме момента инерции этого тела относительно оси, проходящей через центр масс и параллельной данной, и произведения массы тела на квадрат расстояния между осями.

Теорема Штейнера применяется при вычислении моментов инерции тел.

КОЛЕБАНИЯ ФИЗИЧЕСКОГО МАЯТНИКА

Рассмотрим тело, имеющее закрепленную ось вращения *O* (рис.4), причем центр масс этого тела *C* не совпадает с осью.

В положении равновесия точка C будет находиться ниже точки O на одной с ней вертикали. Если отклонить тело от положения равновесия на некоторый угол α, то оно будет колебаться. Такое тело называется физическим маятником.

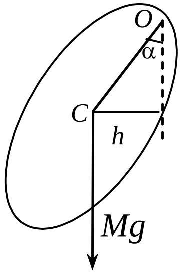

Рис. 4

На тело действует сила тяжести $M\vec{g}$, момент которой равен $-Mgh = -Mgb \cdot \sin\alpha$, где $h = b \cdot \sin\alpha$ – плечо этой силы относительно оси O, b – расстояние от оси O до центра масс C. Сила реакции опоры приложена к точке O, поэтому плечо этой силы и ее момент равны нулю. Таким образом, если пренебречь трением, то на тело действует единственный вращающий момент - момент силы тяжести.

Основное уравнение вращательного движения (6) запишется так:

$$I\frac{d^2\alpha}{dt^2} = -Mgb\sin\alpha,$$

где $\dfrac{d^2\alpha}{dt^2} = \dfrac{d\omega}{dt}$ – угловое ускорение. Допустим, что тело может, вращаясь вокруг оси O, совершать лишь малые колебания. Тогда угол α мал, $\sin\alpha \approx \alpha$ (угол α выражен в радианах), и уравнение вращательного движения примет вид:

$$I\frac{d^2\alpha}{dt^2} = -Mgb\alpha.$$

Приведем это уравнение к виду:

$$\frac{d^2\alpha}{dt^2} = -\frac{Mgb}{I}\cdot\alpha. \qquad (9)$$

Уравнение такого вида всегда описывает гармонические колебания, то есть его решение имеет вид:

$$\alpha = \alpha_0\cos(\omega_0 t + \varphi), \qquad (10)$$

где амплитуда колебаний α_0 и начальная фаза φ могут быть произвольными, а круговая частота ω_0 должна быть найдена из самого уравнения (9). Для нахождения ω_0 возьмем α в виде (10), дважды продифференцируем это выражение по времени и подставим в (9). Тогда получим:

$$-\alpha_0\omega_0^2\cos(\omega_0 t+\varphi)+\frac{Mgb}{I}\alpha_0\cos(\omega_0 t+\varphi)=0$$

Это равенство должно выполняться в любой момент времени, то есть на $\cos(\omega t+\varphi)$ можно сократить. Тогда $\omega_0^2=\dfrac{Mgb}{I}$. Так как период колебаний – это время, за которое фаза $(\omega_0 t+\varphi)$ в (14) изменится на 2π, то $T=\dfrac{2\pi}{\omega_0}$.

Тогда окончательно:

$$T=2\pi\sqrt{\frac{I}{Mgb}}. \tag{11}$$

ОПИСАНИЕ РАБОТЫ

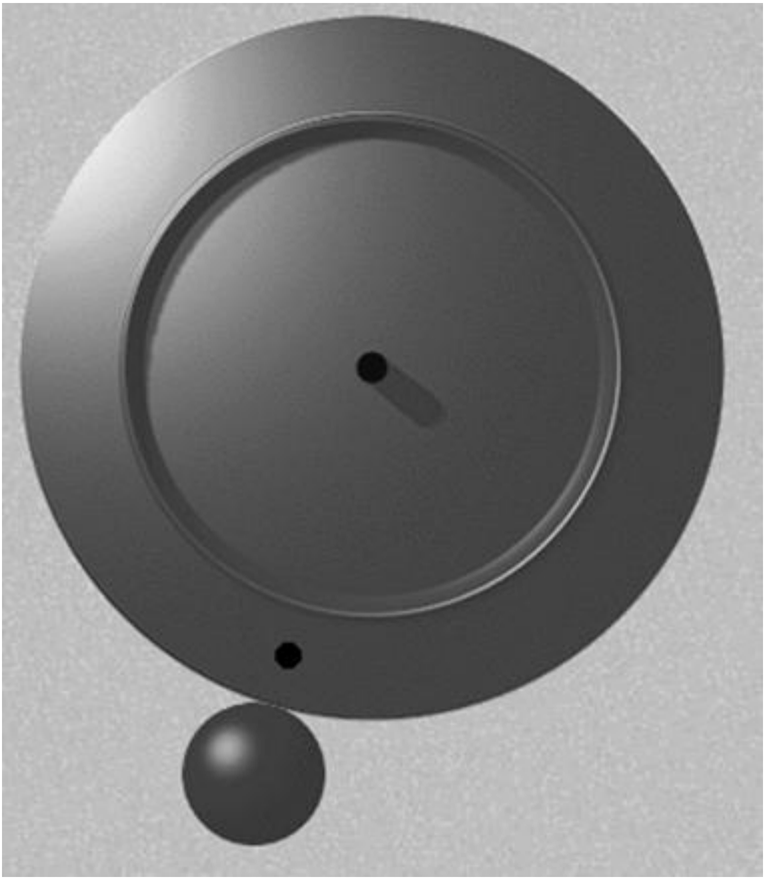

Рис. 5

Установка представляет собой колесо, к которому прикрепляется небольшой шарик (рис.5). Колесо может свободно вращаться вокруг оси. В частности, оно может совершать колебания относительно этой оси, тогда оно представляет собой физический маятник.

Для нахождения момента инерции колеса можно воспользоваться формулой для периода колебаний физического маятника (11), если в этой формуле общий момент инерции колеса и шарика

$$I = I_к + I_ш,$$

их общая масса $M = m + m_к$, m – масса шарика, b – расстояние от оси колеса до общего центра масс колеса и шарика.

Для нахождения b воспользуемся формулой для координаты центра масс:

$$Mx_c = mx_ш + m_к x_к,$$

где $x_c, x_ш, x_к$ – координаты соответственно общего центра масс, центра шарика и центра колеса. Если начало координат находится на оси колеса, то $x_к = 0$ ввиду его симметрии, $x_c = b$ по обозначению, $x_ш = \ell$ – расстояние от оси колеса до центра шарика, равное сумме радиусов колеса и шарика. Тогда искомое расстояние от оси колеса до общего центра масс равно

$$b = \frac{m}{m + m_к}\ell .$$

Подставив b, I, M в формулу (11), получим выражение для периода колебаний колеса с шариком:

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{I_к + I_ш}{(m + m_к)\cdot\dfrac{m}{m + m_к}\cdot \ell g}} = 2\pi\cdot\sqrt{\frac{I_к + I_ш}{mg\ell}} \qquad (12)$$

Разрешив уравнение (12) относительно $I_к$, получим:

$$I_к = mg\ell\frac{T^2}{4\pi^2} - I_ш \qquad (13)$$

Момент инерции шарика относительно оси вращения равен $I_ш = \frac{2}{5}mR^2 + m\ell^2$, где R – радиус шарика, $\frac{2}{5}mR^2$ – его момент инерции относительно оси, проходящей через центр масс шарика, а $m\ell^2$ – добавка по теореме Штейнера. Тогда формула (13) примет окончательный вид:

$$I_k = mg\ell \frac{T^2}{4\pi^2} - m\ell^2 - \frac{2}{5} mR^2 = I_1 - I_2 - I_3, \tag{14}$$

где $\ell = r + R$ (r – радиус колеса).

Для нахождения $I_к$ массу шарика m определяют на технических весах, радиус колеса и шарика R – при помощи штангенциркуля.

Для нахождения периода колебаний T измеряют время n = 20 или более полных колебаний несколько (5 или более) раз и вычисляют среднее время $\langle t \rangle$, а затем средний период колебаний $\langle T \rangle = \frac{\langle t \rangle}{n}$. Погрешность измерения времени Δt находят по формуле:

$$\Delta t = \sqrt{\Delta t_{сист}^2 + \Delta t_{случ}^2}$$

где систематическая погрешность измерения времени секундомером обычно принимается равной $\Delta t_{сист}$ = 0,2 с (главным образом из-за запаздывания реакции экспериментатора), а случайную погрешность $\Delta t_{случ}$ следует вычислить как среднеквадратичное отклонение:

$$\Delta t_{случ} = \sqrt{\frac{\sum_{i=n}^{N} \left(t_i - \langle t \rangle\right)^2}{N}},$$

где N – число измерений.

Погрешность измерения периода в n (n – число колебаний) раз меньше, то есть $\Delta T = \frac{\Delta t}{n}$.

Итоговая погрешность измерения момента инерции колеса запишется в виде

$$\Delta I_k = \sqrt{\Delta I_1^2 + \Delta I_2^2 + \Delta I_3^2},$$

где $\left(\frac{\Delta I_1}{I_1}\right)^2 = \left(\frac{\Delta m}{m}\right)^2 + \left(\frac{\Delta l}{l}\right)^2 + 4\left(\frac{\Delta T}{T}\right)^2$,

$$\left(\frac{\Delta I_2}{I_2}\right)^2 = \left(\frac{\Delta m}{m}\right)^2 + 4\left(\frac{\Delta l}{l}\right)^2, \quad \left(\frac{\Delta I_3}{I_3}\right)^2 = \left(\frac{\Delta m}{m}\right)^2 + 4\left(\frac{\Delta R}{R}\right)^2,$$

а, в свою очередь, $\Delta l = \sqrt{(\Delta r)^2 + (\Delta R)^2}$.

В этих формулах погрешность измерения массы на технических весах Δm принимается равной 0,1 грамма. Погрешность измерения радиусов ΔR и Δr равны 0,1 мм или 1 мм в зависимости от используемого прибора. Для нахождения радиусов измеряются диаметры тел при помощи штангенциркуля (погрешность 0,1 мм) или линейки (погрешность 1 мм)..

КОНТРОЛЬНЫЕ ВОПРОСЫ

1. Что называется плечом силы?
2. Что называется моментом силы относительно оси?
3. Как выбирают знак для момента силы?
4. Почему сумма моментов сил взаимодействия для любой пары частиц тела равна нулю?
5. Что означают слова: момент инерции есть мера инертности тела для вращения?
6. Что такое момент инерции материальной точки?
7. Почему момент инерции пустотелого цилиндра больше, чем сплошного с такими же размерами и массой?
8. Сформулируйте теорему Штейнера.
9. Обруч повешен на гвоздик. Чему равен его момент инерции относительно гвоздика, если его масса M, а радиус R?
10. Какие моменты сил действуют на физический маятник?
11. Почему колебания маятника должны быть малыми?
12. Какое дифференциальное уравнение описывает гармонические колебания?

13. Чем определяется период гармонических колебаний?

14. Получить рабочую формулу (14).

15. Как определить погрешность измерения момента инерции?

ЛИТЕРАТУРА

1. Савельев И.В. Курс общей физики. Т. I. Механика. Молекулярная физика. М.: Наука. - 2009. - 432 с.

Издание подготовлено в авторской редакции

Отпечатано на участке цифровой печати
Издательского Дома Томского государственного университета

Заказ № 1312 от «30» сентября 2015 г. Тираж 100 экз.