Министерство образования и науки РФ
НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ
ТОМСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ

Утверждаю
зав. кафедрой общей и
экспериментальной физики
______________В. П. Демкин
«____»_________2015 г.

МОМЕНТ ИНЕРЦИИ ДИСКА

Методические указания
для проведения лабораторных работ

Томск – 2015

РАССМОТРЕНО И УТВЕРЖДЕНО методической комиссией физического факультета

Протокол № ____ от «____» ___________ 2015 г.

Председатель комиссии В. М. Вымятнин

В работе рассмотрены основные понятия динамики вращательного движения. Изложен принцип вычисления моментов инерции некоторых тел правильной геометрической формы. Описан способ определения момента инерции диска методом колебаний.

Методические указания разработаны для студентов нефизических специальностей.

Составители: доц. В.Ф. Нявро

Томский государственный университет, 2015

МОМЕНТ ИНЕРЦИИ ДИСКА

Цель работы: рассмотреть основные физические характеристики вращательного движения; определить момент инерции диска методом колебаний.

МОМЕНТ СИЛЫ

Опыт показал, что при вращении тела, например закручивании болта гаечным ключом, существенным оказывается понятие **момента силы**, а не только модуля силы и длины рычага. **Моментом силы относительно точки *O* называют вектор** $\bar{M}$**, определяемый векторным произведением радиуса–вектора** $\bar{r}$ **точки приложения силы на силу** $\bar{F}$ (рис.1):

$$\bar{M} = \left[\bar{r}, \bar{F}\right] \tag{1}$$

Модуль вектора момента силы равен

$$M = Fr \cdot \sin\alpha = Fl, \tag{2}$$

где l- **плечо силы.** *Плечом силы называют длину перпендикуляра, опущенного из точки* O *на прямую, вдоль которой действует сила.*

Если радиус- вектор $\vec{r}$, проведенный из точки O в точку приложения силы, и сила $\vec{F}$ лежат в плоскости рисунка, то вектор момента силы $\vec{M}$ перпендикулярен плоскости

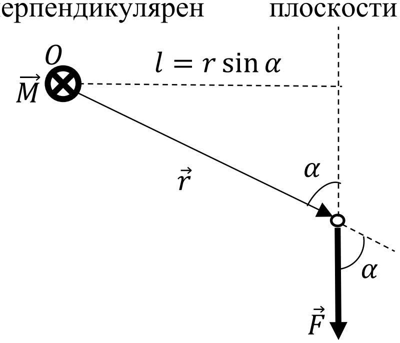

Рис.1

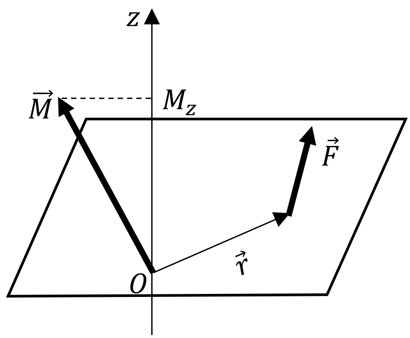

Рис.2

рисунка. Его направление определяется по правилу правого винта. Поворот головки винта в сторону наименьшего угла вызывает перемещение винта в направлении вектора момента силы. В данном случае вектор $\vec{M}$ момента силы направлен от нас и изображен на рис. 1 кружком с крестиком. Точка 0 находится в центре кружка. Момент силы M относительно неподвижной ось z является скалярной физической величиной, т.е. это проекция вектора момента силы относительно неподвижного начала на ось в предположении, что начало лежит на оси (рис.2).

Если сила приложена к одной из точек твердого тела, то вектор $\vec{M}$ характеризует способность силы вращать тело вокруг точки 0. В реальных условиях под действием силы твердое тело вращается вокруг оси, проходящей через точку 0. При этом все точки тела описывают окружности с центрами на этой оси и имеют одинаковую угловую скорость ω и одинаковое угловое ускорение ε.

МОМЕНТ ИМПУЛЬСА. МОМЕНТ ИНЕРЦИИ

По аналогии с моментом силы можно получить еще одну важную векторную характеристику вращающейся материальной точки – момент импульса. **Момент импульса материальной точки относительно точки** 0 **есть вектор** $\bar{L}$ **, определяемый векторным произведением:**

$$\bar{L} = \left[\bar{r}, \bar{P}\right] = \left[\bar{r}, m\bar{v}\right], \tag{3}$$

где $\vec{r}$ – радиус–вектор, определяющий положение материальной точки относительно точки 0, а $\bar{P} = m \cdot \bar{v}$ – импульс этой материальной точки. Модуль момента импульса материальной точки равен:

$$L = rP \cdot \sin\alpha = Pl, \tag{4}$$

где l – плечо импульса (рис.3).

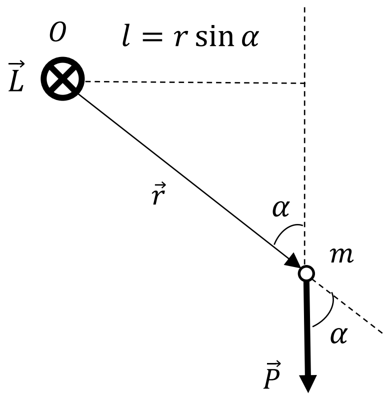

Рис.3

Если материальная точка движется прямолинейно, то модуль момента импульса равен $L = m\cdot v\cdot l$, при движении материальной точки по окружности радиусом R момент импульса относительно центра окружности равен $L = m\cdot v\cdot R$.

Пусть твердое тело вращается вокруг оси Z. Момент импульса твердого тела относительно оси Z представляет собой сумму моментов импульса отдельных частиц

$$L_z = \sum_i m_i v_i r_i$$

Зная связь линейной скорости с угловой $v_i = \omega\cdot r_i$ получим

$$I_z = \sum_i m_i v_i r_i = \sum_i m_i \omega\cdot r_i^2 = \omega\sum_i m_i r_i^2, \quad (5)$$

Произведение

$$m_i r_i^2 = I_i \qquad (6)$$

называется **моментом инерции материальной точки относительно неподвижной оси**. Момент инерции **системы материальных точек** равен **сумме моментов инерции** всех его материальных точек относительно оси вращения

$$I = \sum_{i=1}^{n} m_i r_i^2 \qquad (7)$$

Твердое тело можно разбить на элементарные участки, тогда заменив суммирование интегрированием по всему объему тела, получим

$$I = \lim_{n \to \infty} \sum_{i=1}^{n} \Delta m_i r_i^2 = \int_V r^2 dm, \qquad (8)$$

где V – объем тела.

Момент инерции – скалярная величина, зависящая от массы тела и её распределения относительно оси вращения. Момент инерции I является аналогом массы и **характеризует инертные свойства тела при вращении.** Единицей измерения момента инерции является в системе СИ 1 *кг·м*^{2} и *1 г·см*^{2} в системе СГС.

Движение вращающиеся вокруг неподвижной оси тела подчиняется основному **закону динамики вращательного движения**

$$M = I\varepsilon \qquad (9)$$

где M - результирующий момент силы; *I*- момент инерции тела и ε- угловое ускорение.

ВЫЧИСЛЕНИЕ МОМЕНТОВ ИНЕРЦИИ ТЕЛ

Найти момент инерции тонкого однородного кольца относительно оси O_1O_2, проходящей через центр кольца перпендикулярно его плоскости.

Однородное кольцо – это кольцо, плотность которого одинакова в каждой точке кольца. Разобьем кольцо на участки *dm* (рис.4). В любом месте кольца они отстоят от центра кольца на одно и то же расстояние *R*. По формуле (8)

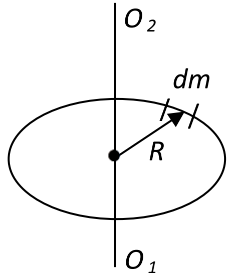

Рис.4

$$I_0 = \int_V R^2 dm = R^2 \int_V dm = mR^2. \qquad (10)$$

2.2. Определить момент инерции однородного диска относительно оси, перпендикулярной к плоскости диска и проходящей через его центр (рис.5).

Разобьем диск на элементарные цилиндрические слои радиусом *r*, толщиной *dr*, высотой *h*. Момент инерции такого слоя согласно формуле (10)

$$dI = dm \cdot r^2.$$

Масса кольца

$$dm = \rho \cdot 2\pi r \cdot h \cdot dr,$$

где ρ – плотность диска. Тогда

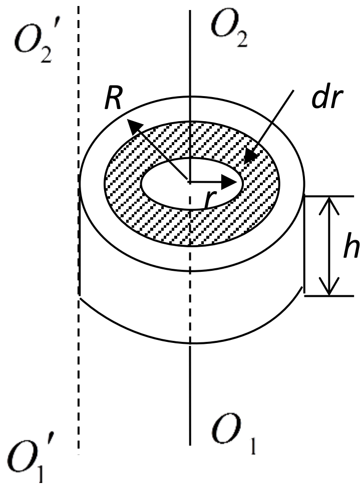

Рис.5

$$dI = 2\pi\rho\, h\, r^3 dr, \quad \mathrm{I}_0 = \int_V dI.$$

Масса диска $m = \rho \cdot V$, где $V = h \cdot \pi R^2$ – объем диска. Тогда

$$I_0 = \frac{mR^2}{2}. \tag{11}$$

2.3. Момент инерции однородного шара относительно оси, проходящей через его центр

Шар обладает сферической симметрией. Поэтому моменты инерции шара I_0 относительно осей, проходящих через центр шара в разных направлениях, одинаковы. Вычисление с использованием сферической системы координат дают, что

$$I_0 = \frac{2}{5} mR^2 \quad , \tag{12}$$

где m – масса шара, R – радиус шара.

ТЕОРЕМА ШТЕЙНЕРА

В пунктах 2.1, 2.2 и 2.3 получены выражения для моментов инерции однородного кольца, диска и шара относительно осей, проходящих через центр масс этих тел. Но тело может вращаться вокруг осей, не проходящих через центр масс. Например, диск может вращаться вокруг оси O_1' и O_2', которая соприкасается с его боковой поверхностью, как изображено на рис. 5. В подобных случаях для вычисления момента инерции применяют **теорему Штейнера**, которая формулируется следующим образом: *момент инерции* ***I*** *относительно произвольной оси равен сумме момента инерции* $\boldsymbol{I_0}$ *относительно оси, параллельной данной и проходящей* *через центр масс тела, и произведения массы тела* **m** *на квадрат расстояния* **r** *между осями*

$$I = I_0 + mr^2 \tag{13}$$

По теореме Штейнера момент инерции диска относительно оси: $O_1'O_2'$

$$I = I_0 + mR^2 = \frac{mR^2}{2} + mR^2 = \frac{3}{2}mR^2$$

Теорема Штейнера, по существу, сводит вычисление момента инерции относительно произвольной оси к вычислению момента инерции относительно осей, проходящих через центр масс тела.

Для *однородных* тел *правильной геометрической формы* моменты инерции рассчитываются. Но на практике реальные диски, цилиндры, шары и т.д. не являются однородными и часто вращательное движение совершают тела неправильной геометрической формы. Для этих случаев разработаны экспериментальные методы определения моментов инерции, один из которых основан на знании теории физического маятника.

ФИЗИЧЕСКИЙ МАЯТНИК

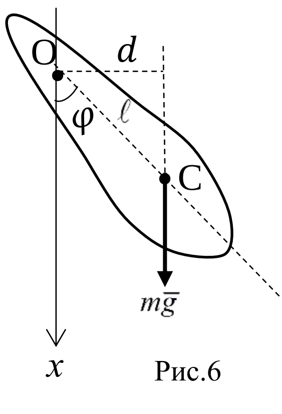

Рис.6

Физическим маятником называется любое твердое тело, которое может вращаться вокруг горизонтальной оси *O* при условии, что центр масс тела *C* не лежит на этой оси.

Если физический маятник отклонить от положения равновесия и отпустить, то он будет совершать колебания относительно оси вращения. Эти колебания можно рассматривать как вращение твердого тела вокруг неподвижной оси. Траекторией движения центра масс маятника является дуга окружности, центр которой находится в т. *O*. Возвращение маятника в положение равновесия происходит под действием момента силы тяжести (рис. 6)

$$M = mgd = mg\ell \cdot \sin\varphi,$$

где ℓ – расстояние от оси вращения до центра масс; φ – угол отклонения линии OC от вертикального направления.

Для описания движения маятника воспользуемся уравнением основного закона динамики вращательного движения. Так как угловое ускорение можно представить через угол отклонения $\varepsilon = \dfrac{d^2\varphi}{dt^2}$, то (9) получим в виде

$$I\frac{d^2\varphi}{dt^2} = -mg\ell \cdot \sin\varphi \qquad (14)$$

Знак минус (–) в последнем уравнении обусловлен тем, что момент силы тяжести стремится вернуть маятник в положение равновесия. (рис.6). Если углы поворота тела относительно положения равновесия $\varphi \le 5^0$, то $\sin\varphi \cong \varphi$ (в радианах). Тогда уравнение (14) запишется в виде:

$$\frac{d^2\varphi}{dt^2} + \frac{mg\ell}{I}\varphi = 0 \qquad (15)$$

Обозначив $\omega^2 = \dfrac{mg\ell}{I}$, (16)

уравнение (15) запишем в виде

$$\frac{d^2\varphi}{dt^2} + \omega^2\varphi = 0 \qquad (17)$$

В теории дифференциальных уравнений доказывается, что решением (17) является функция

$$\varphi = \varphi_0 \sin(\omega t + \alpha),$$

где φ_0 - максимальный угол отклонения от положения равновесия; $\omega -$ циклическая частота колебаний. Так как $\omega = \dfrac{2\pi}{T}$ и учитывая обозначение (16), получим, что период колебаний физического маятника равен

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{I}{mg\ell}} \qquad (18)$$

Используя формулу (18), можно найти момент инерции тела.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ МОМЕНТА ИНЕРЦИИ ДИСКА МЕТОДОМ КОЛЕБАНИЙ

На рис.7 изображена экспериментальная установка, являющаяся физическим маятником, который состоит из диска массой *M*, горизонтальная ось вращения которого проходит через его центр симметрии (т. О на рис.7) и шарика массой *m*. Центр масс маятника находится в т С (сравните с рис.6). Если маятник отклонить от положения равновесия на угол не более 5 ^{0} и отпустить, то он будет совершать колебания относительно оси вращения. Согласно формуле (18) период колебаний данного физического маятника равен

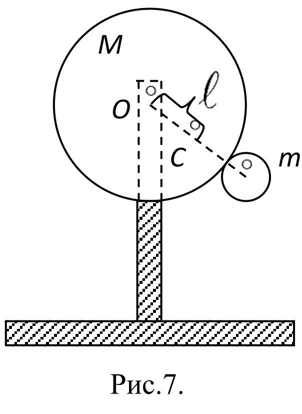

Рис.7.

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{I_{Д} + I_{Ш}}{(\mathrm{M} + \mathrm{m})g\ell}}, \qquad (19)$$

где $I_{Д}$ – момент инерции диска; $I_{Ш}$ –момент инерции шарика относительно оси вращения.

Величину ℓ в формуле (19) определим из условия равновесия системы диск – шарик относительно оси, проходящей через центр масс (т. С). На рис.8 изображены силы тяжести диска $M\bar{g}$, шарика $m\bar{g}$ и их равнодействующая $\bar{F}$, приложенная в центре масс. Система шарик – диск будет находиться в положении равновесия, если моменты сил Mg и mg одинаковы относительно оси, проходящей через центр масс, т.е.

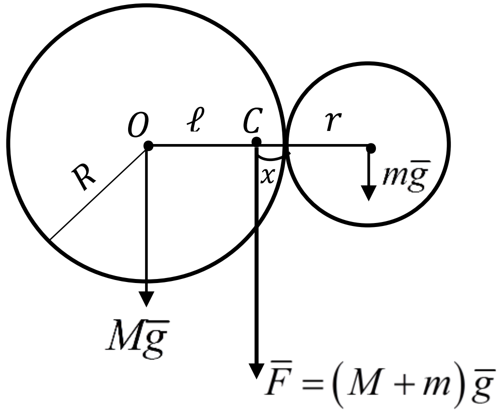

Рис.8.

$$Mg\ell = (x + r)\cdot mg,$$

где $x = R - \ell$.

Из последних двух уравнений получаем:

$$\ell = \frac{(R + r)\cdot m}{M + m}.$$

Подставим выражение для ℓ в уравнение (19), получим:

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{I_{Д} + I_{Ш}}{(\mathrm{R} + \mathrm{r})\cdot mg}},$$

откуда

$$I_{Д} = \frac{T^2}{4\pi^2}\left(R+r\right)\cdot mg - I_{Ш} \qquad (20)$$

Момент инерции шарика $I_{Ш}$ относительно оси вращения согласно теореме Штейнера и с учетом (12)

$$I_{Ш} = \frac{2}{5}mr^2 + m\left(R+r\right)^2$$

Подставив $I_{ш}$ в формулу (20) , получим выражение для вычисления момента инерции диска методом колебаний

$$I_{Д} = \frac{T^2}{4\pi^2}\left(R+r\right)\cdot mg - \frac{2}{5}mr^2 - m\left(R+r\right)^2 \qquad (21)$$

На практике удобнее измерять диаметры шарика и диска. Тогда формула (21) запишется в виде:

$$= \frac{T^2}{8\pi^2}\left(d_{Д} + d_{Ш}\right)\cdot mg - 0{,}1md_{Ш}^2 - \frac{m}{4}\left(d_{Д} + d_{Ш}\right)^2, \qquad (22)$$

где $d_{Д}$ – диаметр диска; $d_{Ш}$ – диаметр шарика.

МЕТОДИКА РАБОТЫ

1.Отклоните маятник на угол не более пяти градусов.
2.Измерьте время десяти колебаний маятника (измерения проведите не менее пяти раз).
3. Вычислите период колебаний .
4.Измерьте диаметры диска и шарика. *Для получения более точного результата измерения проводят неоднократно и в разных направлениях*.
5.Определите массу шарика.
6.Результаты измерений и расчетов занесите в таблицу.
7.Оцените погрешность полученного результата.

Т а б л и ц а 1

№ п/п	Число колебаний N	Время t, с	Период Т, с	Масса шарика m, г	Диаметр диска $d_д$, см	Диаметр шарика $d_ш$, см	Момент инерции I, г см^2

По данным таблицы находят средние значения периода, диаметров шарика, диска и подставляют их в формулу (22), переведя все значения в одну систему единиц (СИ или СГС). Полученное значение $I_Д$ при таком методе подсчета является **средним** значением момента инерции диска.

ОЦЕНКА ПОГРЕШНОСТИ ПОЛУЧЕННОГО ЗНАЧЕНИЯ

Максимальная погрешность вычисляется по формуле:

$$\Delta I_Д = \sqrt{\left(\frac{\partial I_Д}{\partial T}\right)^2 (\Delta T)^2 + \left(\frac{\partial I_Д}{\partial \mathrm{m}}\right)^2 (\Delta m)^2 + \left(\frac{\partial I_Д}{\partial \mathrm{d}_Д}\right)^2 (\Delta d_Д)^2} \ ,$$

где $\dfrac{\partial I_Д}{\partial \mathrm{T}} = \dfrac{md(d_Д + d_Ш)T}{4\pi^2}$;

$$\frac{\partial I_Д}{\partial \mathrm{m}} = \frac{T^2}{8\pi^2}(d_Д + d_Ш)\cdot g - 0{,}1 d_ш^2 - 0{,}25(d_Д + d_ш)^2;$$

$$\frac{\partial I_Д}{\partial \mathrm{d}_Д} = \frac{T^2 mg}{8\pi^2} - 0{,}5m(d_Д + d_Ш)$$

– частные производные по всем измеряемым величинам от формулы (22).

Погрешность периода $\Delta T = \dfrac{\Delta t}{N}$, где N – число колебаний при определении периода T, Δt – погрешность определения времени.

$$\Delta \mathrm{t} = \sqrt{\left(\Delta \mathrm{t}_{\text{случ}}\right)^2 + \left(\Delta t_{\text{пр}}\right)^2}\,, \qquad (23)$$

где $\Delta t_{\text{случ}}$ – случайная погрешность в определении времени,

$\Delta t_{\text{пр}}$ – погрешность прибора.

$$\Delta t_{\text{случ}} = t_{n\alpha} \sqrt{\frac{\sum \left(t_i - t_{\text{ср}}\right)^2}{n(n-1)}}$$

$t_{n\alpha}$– коэффициент Стьюдента. Он определяется по специальным таблицам для доверительной вероятности 0,95. Погрешность прибора $\Delta t_{\text{пр}}$ равна половине наименьшего деления шкалы прибора для измерения времени. Если в формуле (23) одно из слагаемых в 3 раза меньше другого, то меньшее отбрасывается. Погрешность $\Delta d_{\text{Д}}$ рассчитывается аналогичным способом.

КОНТРОЛЬНЫЕ ВОПРОСЫ

1.Что называется моментом силы относительно точки? Относительно оси вращения?

2.Что называется моментом импульса относительно точки? Относительно оси вращения?

3.Что называется моментом инерции материальной точки? Тела?

4.В чем состоит физический смысл момента инерции?

5.Запишите уравнение основного закона динамики вращательного движения.

6.Сформулируйте теорему Штейнера.

7.Запишите уравнение движения физического маятника.

8.Что представляет собой физический маятник в данной работе? Чему равен период его колебаний?

9.Как находится момент инерции диска методом колебаний?

ЛИТЕРАТУРА

1. Савельев И.В. Курс общей физики.Т.1.М.: Наука,1982. 432 с.

2.ЗайдельА.Н.Элементарные оценки ошибок измерений. М.:Наука,1968

3.Демидченко В.И. Физика. Выс. обр-е .Ростов н/Д: «Феникс», 2008. 46-49 с.

Издание подготовлено в авторской редакции

Отпечатано на участке цифровой печати
Издательского Дома Томского государственного университета

Заказ № 1320 от «30» сентября 2015 г. Тираж 100 экз.