

УДК 521.1

*Т.В. БОРДОВИЦЫНА\*, И.В. ТОМИЛОВА\*, П.В. КУЛИКОВА\*\*, Р.Р. МЕНИБАЕВ\****ПРИМЕНЕНИЕ ИНТЕГРАЛЬНОЙ АВТОКОРРЕЛЯЦИОННОЙ ФУНКЦИИ ДЛЯ ОЦЕНКИ ОСОБЕННОСТЕЙ ДИНАМИКИ ОКОЛОЗЕМНЫХ КОСМИЧЕСКИХ ОБЪЕКТОВ**

Представлены результаты использования двух способов оценки регулярности и хаотичности движения околоземных объектов различных классов орбит. Рассмотрено применение усредненного параметра MEGNO и интегральной автокорреляционной функции. На примере 200 моделей движения объектов, подверженных влиянию орбитальных и вековых резонансов, показано, что только совместное применение этих методов позволяет составить более или менее полное представление о характере движения.

**Ключевые слова:** искусственные спутники Земли, регулярность и хаотичность движения.

**Введение**

Как известно [1], источником возникновения хаотичности в движении космических, в том числе околоземных объектов является совместное действие резонансов различных типов. Для выявления хаотичности используются различные индикаторы. Одними из наиболее часто употребляемых индикаторов являются ляпуновское характеристическое число и его взвешенная по времени интегральная форма, называемая усредненным параметром MEGNO (Mean Exponential Growth of Nearby Orbit) [2, 3]. Как подчеркивается в [3], MEGNO-подход, в отличие от общего вариационного метода Ляпунова, дает более полную динамическую информацию об эволюции орбит и позволяет более эффективно разделять регулярные и стохастические режимы движения.

В работах [4, 5] предпринята попытка использовать интегральную автокорреляционную функцию для разделения регулярного и хаотического движений. Нам показалось интересным сопоставить эти две оценки на обширном материале, полученном в процессе численно-аналитического эксперимента [6–8], проведенного с целью оценки распространенности вековых резонансов в околоземном орбитальном пространстве. В процессе эксперимента для 29 резонансных соотношений [6] были определены их численные значения для 200 моделей движения, полученных варьированием трех позиционных параметров орбит: большой полуоси  $a$ , эксцентриситета  $e$ , наклона  $i$ , в следующих диапазонах параметров

$$e = \{0.01, 0.1-0.8 \text{ с шагом } 0.1\}; i = \{10-90^\circ \text{ с шагом } 5^\circ\}; a = \{8000-55000 \text{ км с шагом } 1 \text{ км}\}.$$

Для полученных таким способом моделей движения околоземных объектов были определены особенности их орбитальной эволюции, включая MEGNO-анализ. Эти особенности были сопоставлены с наличием в движении объектов тех или иных вековых резонансов.

При выполнении настоящей работы на примере тех же 200 моделей движения мы попытались оценить возможности использования интегральной автокорреляционной функции для исследования особенностей динамики околоземных объектов. Нас интересовало, прежде всего, можно ли с помощью этого математического аппарата надежно выявлять наличие хаотичности в движении объектов, так же как это делается с помощью MEGNO-анализа.

**1. Методы исследования**

Численное моделирование орбитальной эволюции движения. Численное моделирование долговременной орбитальной эволюции рассматриваемых объектов осуществляется с помощью программного комплекса «Численная модель движения систем ИСЗ» [9], дополненного программой MEGNO-анализа орбитальной эволюции объектов [10]. Программный комплекс реализован на кластере «СКИФ Cyberia» Томского госуниверситета. Оценки точности прогнозирования движения ИСЗ с помощью указанного программного комплекса на больших интервалах времени приведены в работе [11]. Оценки получены на примере численного моделирования движения ИСЗ Эталон-1 и -2. Точность моделирования движения на интервале 100 лет при использовании 64-битной разрядной сетки составляет 1 м, а при использовании 128-битной разрядной сетки не превышает 1 мм.

Вычисление параметров MEGNO. В используемом программном комплексе [11] эти параметры вычисляются совместным численным интегрированием уравнений движения, уравнений в вариациях и уравнений параметров.

Как отмечено выше, усредненный параметр MEGNO представляет собой взвешенную по времени интегральную форму ляпуновского характеристического числа

$$\lambda = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} \ln \frac{\|\delta_\phi(t)\|}{\|\delta_\phi(t_0)\|}. \quad (1)$$

Шестимерный вектор состояния динамической системы определяется системой уравнений

$$\frac{d}{dt} \mathbf{r}(t) = f(\mathbf{r}(t)), \quad (2)$$

где  $\phi(t) = \phi(t, \mathbf{r}_0, t_0)$  есть решение системы (2) при начальных условиях  $(t_0, \mathbf{r}_0)$ ;  $\delta_\phi(t)$  – шестимерный вектор, который измеряет эволюцию начального бесконечно малого отклонения  $\delta_\phi(t_0) \equiv \delta_0$  между решением  $\phi(t)$  и очень близкой орбитой. Эта эволюция с точностью до бесконечно малых первого порядка описывается вариационным уравнением вида

$$\dot{\delta}_\phi = \frac{d}{dt} \delta_\phi(t) = \mathbf{J}(f(\phi(t))) \delta_\phi(t), \quad (3)$$

где  $\mathbf{J}(\phi(t))$  есть матрица Якоби системы дифференциальных уравнений (1). Параметр  $\lambda$  может быть представлен в интегральной форме [2]

$$\lambda = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} \int_{t_0}^t \frac{\dot{\delta}_\phi(\tau)}{\delta_\phi(\tau)} d\tau, \quad (4)$$

причем  $\delta_\phi = \|\delta_\phi\|$ ,  $\dot{\delta}_\phi = \dot{\delta}_\phi \cdot \delta_\phi / \delta_\phi$ .

Исходя из того, что параметр MEGNO  $Y_\phi(t)$  представляет собой взвешенную по времени интегральную форму ляпуновского характеристического числа, можно записать

$$Y_\phi(t) = \frac{2}{t} \int_{t_0}^t \frac{\dot{\delta}_\phi(\tau)}{\delta_\phi(\tau)} \tau d\tau, \quad (5)$$

а средняя величина  $\bar{Y}_\phi(t)$  получается как

$$\bar{Y}_\phi(t) = \frac{1}{t} \int_{t_0}^t Y_\phi(\tau) d\tau. \quad (6)$$

Эволюция  $\bar{Y}_\phi(t)$  во времени позволяет выявить различный характер орбит. Так, например, известно, что для квазипериодических (регулярных) орбит  $\bar{Y}_\phi(t)$  осциллирует около 2. Более того, для квазипериодических орбит  $\bar{Y}_\phi(t)$  всегда стремится к 2, а для устойчивых орбит типа гармонического осциллятора  $\bar{Y}_\phi(t)$  стремится к нулю. Эти особенности  $\bar{Y}_\phi(t)$ , как показано в работах [5–8], могут использоваться для анализа орбитальной эволюции околоземных космических объектов.

В задачах численного моделирования целесообразно [3] заменить интегральные соотношения (5) и (6) дифференциальными уравнениями и интегрировать совместно с уравнениями движения (1) и уравнениями в вариациях (3) еще два уравнения

$$\frac{d}{dt} y = \frac{\dot{\delta} \cdot \delta}{\delta \cdot \delta} t, \quad \frac{d}{dt} w = 2 \frac{y}{t}, \quad (7)$$

причем величины  $y$  и  $w$  связаны с параметрами MEGNO как  $Y(t) = 2y(t)/t$ ,  $\bar{Y}(t) = w(t)/t$ .

Вычисление автокорреляционных функций. Интегральная автокорреляционная функция  $I$  определяется как среднее значение квадратов последовательности автокорреляционных функций  $A_k$ . Причем автокорреляционная функция  $A_k$  по смешанным моментам имеет вид

$$A_k = \frac{\sum_{i=0}^{N-k} (r_i - \bar{r}_i)(r_{i+k} - \bar{r}_{i+k})}{\left( \sum_{i=0}^{N-k} (r_i - \bar{r}_i)^2 \sum_{i=0}^{N-k} (r_{i+k} - \bar{r}_{i+k})^2 \right)^{1/2}}, \quad (8)$$

где  $\bar{r}_s = (s+1)^{-1} \sum_{i=0}^s r_i$  – среднее значение  $s$ -элементного подмножества равномерного временного ряда ( $t_0$  – начальный момент,  $h$  – постоянный шаг),

$$r_i = r(t_0 + ih), \quad 0 \leq i \leq N, \quad (9)$$

в нашем случае получаемого в результате численного интегрирования уравнений движения объекта (1). Интегральная автокорреляционная функция  $I$  вычисляется по формуле

$$I(J_K) = \frac{1}{J_K} \left( 1 + \sum_k^K (J_k - J_{k-1}) A_{J_k}^2 \right). \quad (10)$$

Здесь  $J_K = j_K - j_{K-k}$  задает сдвиг аргумента автокорреляционной функции  $A_{J_k}$  на последовательности экспоненциально распределенных точек

$$j_0 = 0, j_1 = 1, \dots, j_k = j_{k-1} + 2^{\lfloor (k-1)/B \rfloor}, \quad k = 0, 1, \dots, K, \quad j_K \leq N, \quad (11)$$

где  $\lfloor (k-1)/B \rfloor$  – целая часть числа,  $B$  – базовое число.

Для постоянных временных рядов интегральная автокорреляционная функция  $I$  асимптотически стремится к 1. Для равномерного временного ряда, представляющего периодическую функцию типа синус, функция  $I$  равна 0.5. Для квазипериодических временных рядов  $I$  стремится к нулю.

В результате серии численных экспериментов Э.Д. Кузнецовым [5] было определено для ИСЗ, что при значении базового числа  $B = 100$  интегральная автокорреляционная функция  $I$  на интервале интегрирования, равном 200 лет, оценивается надёжно.

## 2. Описание численных результатов

Изучение возможности использования интегральной автокорреляционной функции для анализа задач динамики околоземных объектов было проведено на примере 200 моделей движения объектов, сформированных указанным во введении способом. С использованием равномерно распределенных на интервале 100 лет данных об эволюции орбитальных параметров объектов были получены значения интегральной автокорреляционной функции по трем позиционным орбитальным параметрам: большой полуоси  $-I_a$ , эксцентриситету  $-I_e$  и наклонению  $-I_i$ . Общий анализ полученных результатов показывает, что в большинстве случаев оценки регулярности движения по параметру MEGNO и с помощью автокорреляционных функций совпадают, а в сложных случаях оценки дополняют друг друга. Некоторые наиболее интересные результаты, которые позволяют продемонстрировать возможности совместного применения обоих способов анализа динамической эволюции объектов, приведены в таблице и на рис. 1–4. Номера модельных объектов соответствуют номерам, принятым в работах [6–8]. Номера от 1 до 58 присвоены моделям с почти круговым движением и наклонениями в диапазоне  $\{10^\circ - 70^\circ\}$ . Номерами от 010 до 048 отмечены модели с почти круговым движением, но имеющие наклонения орбит в диапазоне  $\{75^\circ - 90^\circ\}$ . Номера от 100 до 168 присвоены моделям с эксцентриситетом 0.6 и наклонениями  $\{10^\circ - 90^\circ\}$ , а модельным объектам с эксцентриситетом 0,8 и наклонениями  $\{10^\circ - 90^\circ\}$  даны номера от 200 до 227. Из рассмотрения были исключены объекты с номерами 9, 018, 049, 127, 133, 134, 141, 147, 148, 213, 215, 217, 219, 220, 226, 229, поскольку орбитальная эволюция этих объектов быстро обрывается в связи с вхождением в атмосферу Земли.

На рис. 1 на левом графике представлена эволюция орбитальных параметров объекта с № 1, а также оценки особенностей движения объекта с помощью параметров MEGNO (изменение параметра  $Y_\phi$  показано сплошной кривой, а осредненного параметра  $\bar{Y}_\phi$  – пунктирной) и интегральных автокорреляционных функций, вычисленных для основных орбитальных параметров. Объект № 1

демонстрирует полное совпадение всех оценок регулярности движения и представленной эволюции орбитальных параметров движения. Следует отметить, что для правильной оценки эволюции с помощью автокорреляционных функций необходимо формировать массив значений параметров объекта таким образом, чтобы шаг по времени был кратен периоду обращения объекта. В противном случае можно получить искусственную нерегулярность в эволюции элементов орбит объектов.

**Значения интегральной автокорреляционной функции и усредненного параметра MEGNO**

№ объекта	$I_a$	$I_e$	$I_i$	MEGNO	№ объекта	$I_a$	$I_e$	$I_i$	MEGNO
1	0.43444	0.86933	0.55865	0.00	221	0.00090	0.25864	0.36777	600
108	0.00118	0.60171	0.16910	4.00	224	0.00121	0.31543	0.49695	550
139	0.00106	0.28039	0.26984	40.0	227	0.00064	0.26876	0.49511	490
140	0.00101	0.39832	0.30499	160	228	0.00054	0.30238	0.42880	600

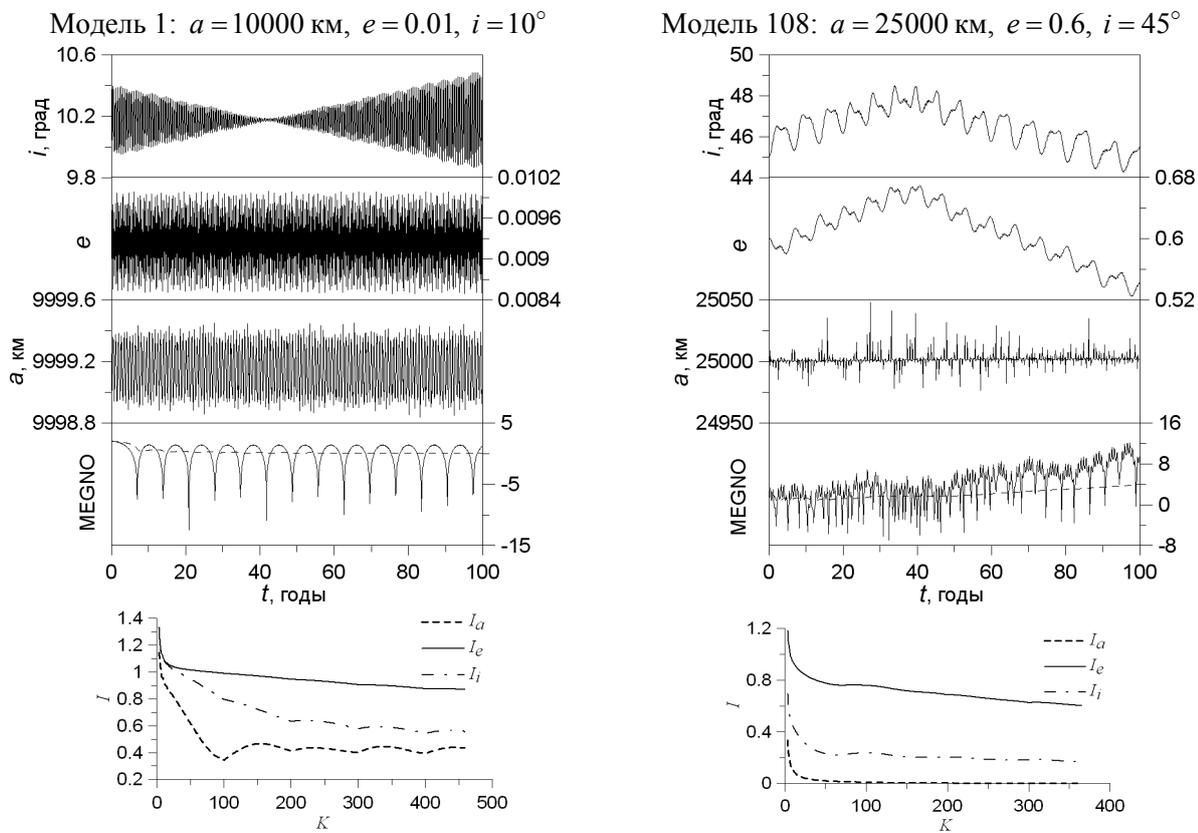


Рис. 1. Модели с малым значением усредненного параметра MEGNO

Объект с № 108 демонстрирует также очень распространенный случай сочетания оценок. Малое значение параметра MEGNO обеспечивается высокой регулярностью изменения одного из позиционных параметров, в данном случае регулярностью изменения эксцентриситета.

На рис. 2 и 3 приведены примеры орбитальной эволюции объектов со средней скоростью возрастания параметра MEGNO. Для всех этих объектов, судя по полученным значениям интегральных автокорреляционных функций, характерна нерегулярность по всем трем позиционным параметрам, но главную роль играет нерегулярность эволюции большой полуоси.

На рис. 4 приведены наиболее интересные случаи эволюции орбит приполярных объектов, для которых характерен настолько быстрый рост параметра MEGNO, что программа не успевает его отслеживать. В этом случае оценки, полученные с помощью автокорреляционных функций, оказываются особенно полезными. Они показывают, что значительное нарастание хаотичности сопровождается нерегулярностью изменения большой полуоси орбиты объекта.

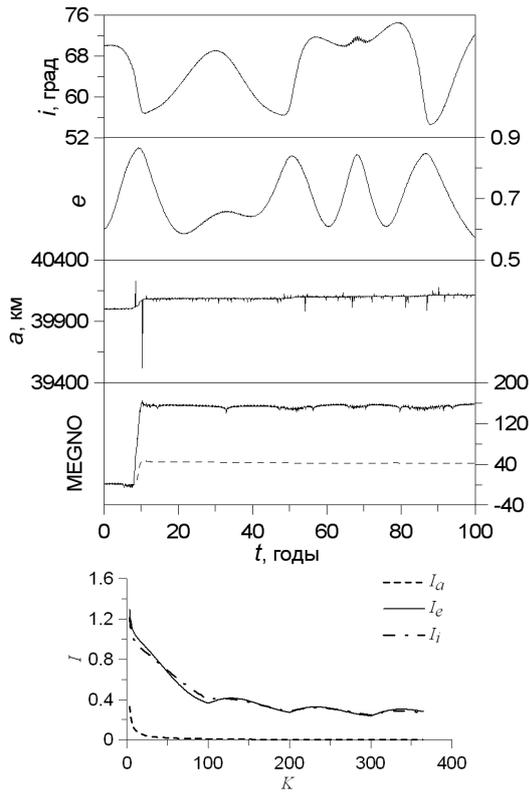
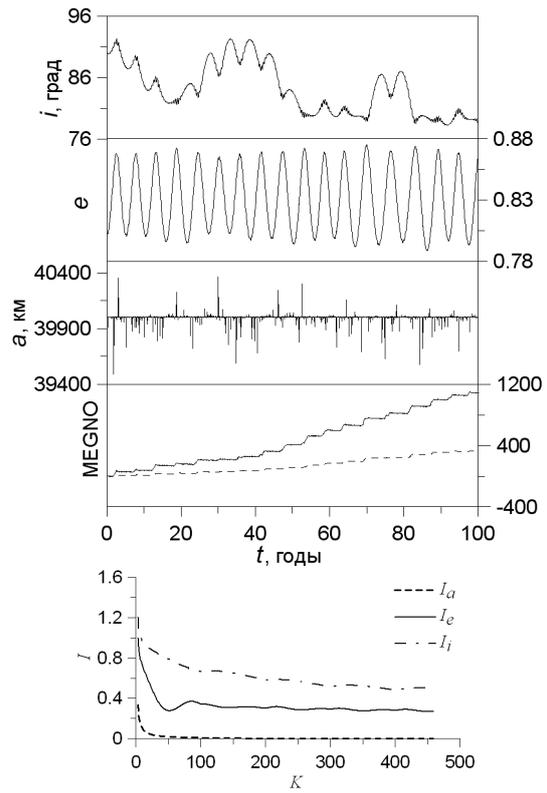
Модель 139:  $a = 40000$  км,  $e = 0.6$ ,  $i = 70^\circ$ Модель 227:  $a = 40000$  км,  $e = 0.8$ ,  $i = 90^\circ$ 

Рис. 2. Модели со средней скоростью роста параметра MEGNO. Первый вариант

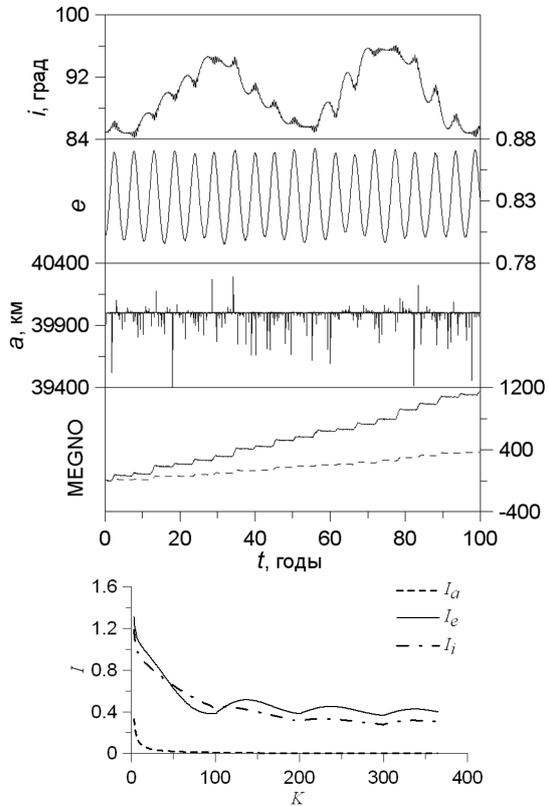
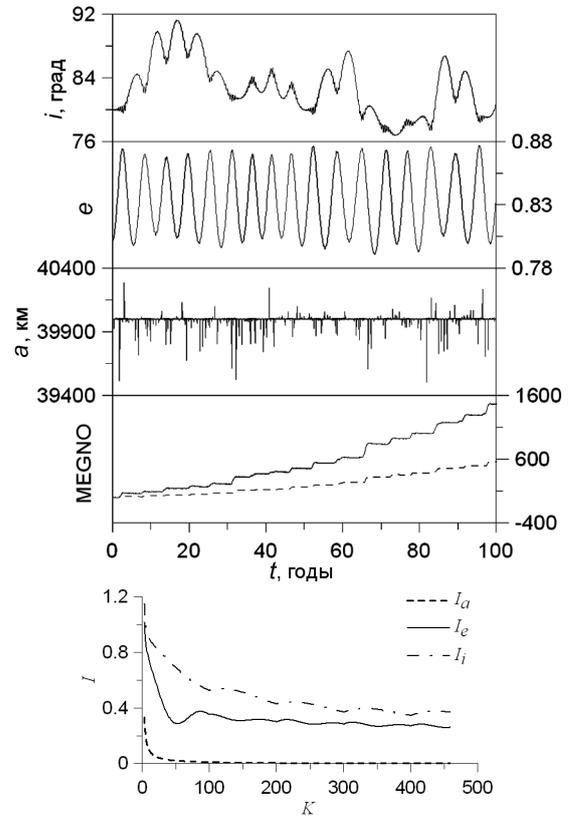
Модель 224:  $a = 40000$  км,  $e = 0.8$ ,  $i = 85^\circ$ Модель 221:  $a = 40000$  км,  $e = 0.8$ ,  $i = 80^\circ$ 

Рис. 3. Модели со средней скоростью роста параметра MEGNO. Второй вариант

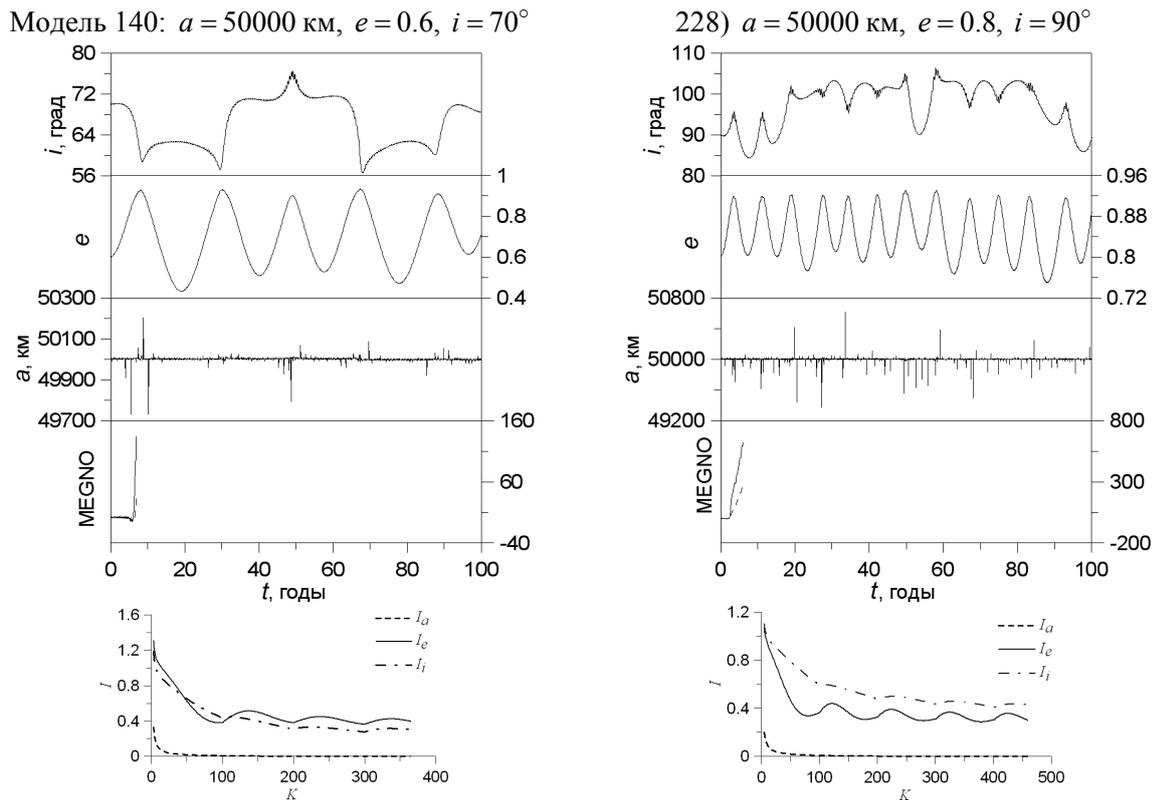


Рис. 4. Модели с высокой скоростью роста параметра MEGNO

### Заключение

Таким образом, в настоящей работе приведены результаты анализа орбитальной эволюции большого количества моделей околоземных объектов, полученные с использованием двух различных независимых способов оценивания свойств хаотичности и регулярности движения: вычисления усредненного параметра MEGNO и интегральных автокорреляционных функций. Результаты показали, что оба подхода хорошо согласуются и дополняют друг друга, расширяя информацию о важных особенностях эволюции исследуемых орбит.

### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Мюррей К., Дермотт С. Динамика Солнечной системы. – М.: Физматлит, 2009. – 588 с.
2. Cincotta P.M., Girdano C.M., and Simo C. // *Physica D.* – 2003. – V. 182. – P. 151–178.
3. Volk S. et al. // *Adv. Space Res.* – 2009. – V. 43. – P. 1509–1526.
4. Wytrzyszczak I. et al. // *Adv. Space Res.* – 2007. – V. 40. – P. 134–142.
5. Kuznetsov E. and Zakharova P. // 40th COSPAR Scientific Assembly. – 2014. – Abstract PEDAS.1-22-14
6. Томилова И.В. и др. // *Изв. вузов. Физика.* – 2013. – Т. 56. – № 10/2. – С. 159–165.
7. Бордовицына Т.В., Томилова И.В. // *Изв. вузов. Физика.* – 2014. – Т. 57. – № 4. – С. 84–91.
8. Бордовицына Т.В., Томилова И.В. // *Изв. вузов. Физика.* – 2014. – Т. 57. – № 6. – С. 102–109.
9. Бордовицына Т.В. и др. // *Изв. вузов. Физика.* – 2009. – Т. 52. – № 12/2. – С. 5–11.
10. Бордовицына Т.В. и др. // *Изв. вузов. Физика.* – 2010. – Т. 53. – № 8/2. – С. 14–21.
11. Бордовицына Т.В. и др. // *Астрон. вест.* – 2012. – Т. 46. – № 5. – С. 356–368.

\*Национальный исследовательский Томский государственный университет,  
г. Томск, Россия

Поступила в редакцию 25.09.14.

\*\*Томский государственный архитектурно-строительный университет,  
г. Томск, Россия  
E-mail: tvbord@sibmail.com

Бордовицына Татьяна Валентиновна, д.ф.-м.н., профессор;  
Томилова Ирина Владимировна, аспирантка;  
Куликова Полина Васильевна, ст. преподаватель;  
Менибаев Руслан Равильевич, студент.

T.V. BORDOVITSYNA\*, I.V. TOMILOVA\*, P.V. KULIKOVA\*\*, R.R. MENIBAEV\*

## APPLICATION OF INTEGRAL AUTOCORRELATION FUNCTION FOR ESTIMATION OF DYNAMICAL PECULIARITIES OF NEAR-EARTH SPACE OBJECTS

\*Tomsk State University, Tomsk, Russia

\*\*Tomsk State University of Architecture and Building, Tomsk, Russia

The results of application of two methods for estimation of regular and chaotic conditions in the motion of near-Earth objects are presented. The application of the average MEGNO-parameter and the integral autocorrelation function has been examined. An analysis of the orbital evolution of 200 models of the near-Earth objects under the influence of secular resonances has been made by two above methods. Estimations demonstrate good agreement. The joint application of these methods allows construction of full vision about the motion character.

**Keywords:** Earth artificial satellites, regular and chaotic dynamical evolution.

### REFERENCES

1. Murrey K.D. and Dermott S.F. *Solar System Dynamics*. Cambridge, Univ. Press., 1999; Moscow, Fizmatlit, 2009, 588 p.
2. Cincotta P.M. et al. *Physica D*, 2003, vol. 182, pp. 151–178.
3. Volk S. et al. *Adv. Space Res.*, 2009, vol. 43, pp. 1509–1526.
4. Wytrzyszczak I. et al. *Adv. Space Res.*, 2007, vol. 40, pp. 134–142.
5. Kuznetsov E. and Zakharova P. *40th COSPAR Scientific Assembly*. 2014, Abstract PEDAS.1-22-14.
6. Tomilova I.V. et al. *Izv. Vyssh. Uchebn. Zaved. Fiz.*, 2013, vol. 56, no. 10/2, pp. 159–165.
7. Bordovitsyna T.V. and Tomilova I.V. *Izv. Vyssh. Uchebn. Zaved. Fiz.*, 2014, vol. 57, no. 4, pp. 84–91.
8. Bordovitsyna T.V. and Tomilova I.V. *Izv. Vyssh. Uchebn. Zaved. Fiz.*, 2014, vol. 57, no. 6, pp. 102–109.
9. Bordovitsyna T.V. et al. *Izv. Vyssh. Uchebn. Zaved. Fiz.*, 2009, vol. 52, no. 12/2, pp. 5–11.
10. Bordovitsyna T.V. et al. *Izv. Vyssh. Uchebn. Zaved. Fiz.*, 2010, vol. 53, no. 8/2, pp. 14–21.
11. Bordovitsyna T.V. et al. *Solar System Research*, 2012, vol. 46, no. 5, pp. 329–340.