

УДК 521.1:523.44-325

*А.П. БАТУРИН, В.В. КИНЗЕРСКИЙ***ИССЛЕДОВАНИЕ ТОЧНОСТИ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ УЛУЧШЕНИЯ ОРБИТ АСТЕРОИДОВ ПО ДАННЫМ ИХ РАДАРНЫХ И УГЛОВЫХ НАБЛЮДЕНИЙ<sup>1</sup>**

Рассмотрена задача улучшения орбит астероидов по данным их радарных и угловых наблюдений стандартным методом наименьших квадратов с использованием радарных наблюдений обоих видов: наблюдений временных задержек отраженного сигнала и доплеровских сдвигов его частоты. С помощью серии улучшений орбиты ряда астероидов по различным выборкам их наблюдений исследован вклад радарных наблюдений в увеличение точности улучшенной орбиты. Используемые выборки содержат все радарные наблюдения, охватывающие небольшую дугу орбиты, и различное число угловых наблюдений, охватывающих значительно большие интервалы времени. Показано, что использование радарных наблюдений может увеличивать точность улучшенной орбиты на 1–3 порядка даже в случаях, когда угловые наблюдения охватывают большие интервалы времени (несколько лет). При проведении исследования разработан удобный windows-интерфейс для применяемой вычислительной программы, к функциям которой добавлена возможность использования при учете возмущений различных эфемерид больших планет и Луны, а также расчетов на различной разрядной сетке.

**Ключевые слова:** астероиды, радарные наблюдения, улучшение орбиты.

Данная работа продолжает исследования, представленные в работах [1–3] и связанные с решением задачи улучшения орбит астероидов с использованием, наряду с угловыми наблюдениями, их радарных наблюдений. Для решения этой задачи в работе применяется традиционный метод наименьших квадратов с введением весовых коэффициентов для различных типов наблюдений. При улучшении орбит используются оба вида радарных наблюдений, выполняемых для астероидов в настоящее время: наблюдения временной задержки сигнала, распространяющегося от излучателя до объекта и обратно до приемника, и наблюдения доплеровского сдвига частоты принимаемого сигнала. Целью работы является исследование вклада радарных наблюдений в увеличение точности улучшения орбит астероидов. Такое исследование выполняется потому, что, с одной стороны, радарные наблюдения имеют значительно более высокую точность по сравнению с угловыми; с другой стороны, они, как правило, охватывают небольшую дугу орбиты длиной в несколько суток, что заметно уменьшает их вклад в увеличение точности улучшенной орбиты, в особенности когда угловые наблюдения охватывают большой временной интервал. Поэтому представляет интерес вопрос о минимальной величине мерного интервала для угловых наблюдений, при которой использование радарных наблюдений приводит к заметному повышению точности улучшенной орбиты. Исследование данного вопроса в работе выполняется с помощью ряда улучшений орбиты для нескольких астероидов по данным их угловых и радарных наблюдений с варьированием величины мерного интервала для угловых наблюдений, т.е. с использованием различных выборок угловых наблюдений вместе со всеми имеющимися радарными наблюдениями.

При выполнении исследования была создана программа-интерфейс, основанная на использовании фортран-кода, разработанного и примененного в [1–3] при улучшении орбит астероидов. Она позволяет автоматически разделять весь массив наблюдений астероида на угловые и радарные, а также использовать при улучшении орбиты различные выборки этих наблюдений. К дополнительным функциям программы относится возможность варьирования разрядной сетки при выполнении вычислений (64, 80 и 128 бит), а также возможность использования различных эфемерид больших планет и Луны при учете возмущений.

Математическое описание применяемого в настоящей работе метода улучшения орбит, а также формулы для моделирования радарных наблюдений и вычисления производных от них по улучшаемым параметрам приведены (с рядом опечаток) в [4], а также использованы в [5]. Кроме того, они были выведены в [1], причем в [1, 2] была допущена неточность, связанная с трактовкой моментов радарных наблюдений, исправленная в [3]. Поэтому приведем далее исправленное описание применяемого метода.

Задачу улучшения орбиты можно представить в общем виде как

<sup>1</sup> Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ в рамках научного проекта № 12-02-00220-а.

$$S = w^2 \sum_{i=1}^N (\Delta\alpha_i^2 \cos^2 \delta_i^{(O)} + \Delta\delta_i^2) + \sum_{i=1}^{N_\tau} p_i^2 \Delta\tau_i^2 + \sum_{i=1}^{N_f} u_i^2 \Delta f_i^2 \rightarrow \min, \quad (1)$$

где  $\Delta\alpha_i = \alpha_i(\mathbf{q}) - \alpha_i^{(O)}$ ,  $\Delta\delta_i = \delta_i(\mathbf{q}) - \delta_i^{(O)}$  – разности вычисленных и измеренных прямых восхождений и склонений астероида соответственно;  $N$  – число угловых наблюдений;  $\Delta\tau_i = \tau_i(\mathbf{q}) - \tau_i^{(O)}$  – разности вычисленных и измеренных временных задержек сигнала;  $N_\tau$  – число измеренных временных задержек;  $\Delta f_i = \Delta v_i(\mathbf{q}) - \Delta v_i^{(O)}$  – разности вычисленных и измеренных доплеровских сдвигов частоты;  $N_f$  – число измеренных сдвигов;  $\mathbf{q} = (x_0, y_0, z_0, \dot{x}_0, \dot{y}_0, \dot{z}_0) = (q_1, q_2, q_3, q_4, q_5, q_6)$  – вектор улучшаемых начальных параметров орбиты;  $w$  – вес угловых наблюдений;  $p_i$  – веса временных задержек;  $u_i$  – веса доплеровских сдвигов частоты.

Выражение для временной задержки сигнала имеет вид

$$\tau(\mathbf{q}) = \tau_{\text{ref}}(\mathbf{q}) + \tau_{\text{rec}}(\mathbf{q}), \quad (2)$$

где  $\tau_{\text{ref}}$  – время распространения сигнала от излучателя до астероида (до отражения);  $\tau_{\text{rec}}$  – время распространения отраженного сигнала до приемника. Вычисляются  $\tau_{\text{ref}}$  и  $\tau_{\text{rec}}$  итерационным образом по формулам

$$\begin{cases} \tau_{\text{rec}}^{(0)} = \frac{1}{c} |\mathbf{r}_{\text{rec}}(t) - \mathbf{r}(\mathbf{q}, t)|, \\ \mathbf{d}_{\text{rec}} = \mathbf{r}_{\text{rec}}(t) - \mathbf{r}(\mathbf{q}, t - \tau_{\text{rec}}^{(s)}), \quad \rho_{\text{rec}} = |\mathbf{d}_{\text{rec}}|, \\ \tau_{\text{rec}}^{(s+1)} = \frac{\rho_{\text{rec}} - R}{c}, \end{cases} \quad \begin{cases} \tau_{\text{ref}}^{(0)} = \frac{1}{c} |\mathbf{r}(\mathbf{q}, t - \tau_{\text{rec}}) - \mathbf{r}_{\text{em}}(t - \tau_{\text{rec}})|, \\ \mathbf{d}_{\text{ref}} = \mathbf{r}(\mathbf{q}, t - \tau_{\text{rec}}) - \mathbf{r}_{\text{em}}(t - \tau_{\text{rec}} - \tau_{\text{ref}}^{(s)}), \quad \rho_{\text{ref}} = |\mathbf{d}_{\text{ref}}|, \\ \tau_{\text{ref}}^{(s+1)} = \frac{\rho_{\text{ref}} - R}{c}, \end{cases} \quad (3)$$

где  $\mathbf{r}(\mathbf{q}, t) = (x(t), y(t), z(t))$  – вектор положения астероида в момент  $t$  приема сигнала;  $\mathbf{r}_{\text{em}} = (x_{\text{em}}, y_{\text{em}}, z_{\text{em}})$  и  $\mathbf{r}_{\text{rec}} = (x_{\text{rec}}, y_{\text{rec}}, z_{\text{rec}})$  – векторы положения излучателя и приемника соответственно;  $c$  – скорость света;  $R$  – радиус астероида;  $s$  – номер итерации.

Доплеровский сдвиг частоты вычисляется по формуле

$$\Delta f(\mathbf{q}) = -\frac{f_{\text{em}}}{c} \left( \dot{\rho}_{\text{ref}} + \dot{\rho}_{\text{rec}} - \frac{\dot{\rho}_{\text{ref}} \dot{\rho}_{\text{rec}}}{c} \right), \quad (4)$$

где  $f_{\text{em}}$  – частота излучаемого сигнала.

Условием минимума (1) является равенство нулю частных производных от функции  $S$  по улучшаемым начальным параметрам:

$$F_j = \frac{1}{2} \frac{\partial S}{\partial q_j} = w^2 \sum_{i=1}^N \left( \Delta\alpha_i \cos^2 \delta_i^{(O)} \frac{\partial \alpha_i}{\partial q_j} + \Delta\delta_i \frac{\partial \delta_i}{\partial q_j} \right) + \sum_{i=1}^{N_\tau} p_i^2 \Delta\tau_i \frac{\partial \Delta\tau_i}{\partial q_j} + \sum_{i=1}^{N_f} u_i^2 \Delta f_i \frac{\partial \Delta f_i}{\partial q_j} = 0 \quad (j = 1, \dots, 6). \quad (5)$$

Входящие в (5) производные  $\frac{\partial \alpha_i}{\partial q_j}$  и  $\frac{\partial \delta_i}{\partial q_j}$  вычисляются через изохронные производные по формулам,

получаемым с помощью дифференцирования соотношений, связывающих прямоугольные и сферические координаты. Изохронные производные вычисляются методом Мультона путем совместного интегрирования уравнений движения и уравнений в вариациях.

Производные от временной задержки вычисляются по формуле  $\frac{\partial \Delta\tau_i}{\partial q_k} = \frac{1}{c} \left( \frac{\partial \rho_{\text{ref}}}{\partial q_k} + \frac{\partial \rho_{\text{rec}}}{\partial q_k} \right)$ , где

$$\begin{aligned} \frac{\partial \rho_{\text{ref}}}{\partial q_k} &= \frac{1}{\rho_{\text{ref}}} \left[ (x(t_{\text{ref}}) - x_{\text{em}}(t_{\text{em}})) \frac{\partial x(t_{\text{ref}})}{\partial q_k} + (y(t_{\text{ref}}) - y_{\text{em}}(t_{\text{em}})) \frac{\partial y(t_{\text{ref}})}{\partial q_k} + (z(t_{\text{ref}}) - z_{\text{em}}(t_{\text{em}})) \frac{\partial z(t_{\text{ref}})}{\partial q_k} \right], \\ \frac{\partial \rho_{\text{rec}}}{\partial q_k} &= \frac{1}{\rho_{\text{rec}}} \left[ (x(t_{\text{ref}}) - x_{\text{rec}}(t)) \frac{\partial x(t)}{\partial q_k} + (y(t_{\text{ref}}) - y_{\text{rec}}(t)) \frac{\partial y(t)}{\partial q_k} + (z(t_{\text{ref}}) - z_{\text{rec}}(t)) \frac{\partial z(t)}{\partial q_k} \right], \end{aligned}$$

причем  $t_{\text{ref}} = t_{\text{em}} + \tau_{\text{ref}}$  – момент отражения сигнала;  $t_{\text{em}} = t - \tau_{\text{ref}} - \tau_{\text{rec}}$  – момент излучения сигнала.

Производные от доплеровского сдвига имеют вид  $\frac{\partial \Delta f}{\partial q_j} = \frac{\partial \Delta f}{\partial r} \frac{\partial r}{\partial q_j} + \frac{\partial \Delta v}{\partial v} \frac{\partial v}{\partial q_j}$ , где

$$\frac{\partial \Delta f}{\partial r} = -\frac{f_{em}}{c} \left( \frac{d_{ref} \dot{d}_{ref}}{\rho_{ref}} d_{ref} + \frac{d_{rec} \dot{d}_{rec}}{\rho_{rec}} d_{rec} \right), \quad \frac{\partial \Delta f}{\partial v} = -\frac{f_{em}}{c} \left( \frac{\dot{d}_{ref}}{\rho_{ref}} + \frac{\dot{d}_{rec}}{\rho_{rec}} \right),$$

причем  $v = (\dot{x}, \dot{y}, \dot{z})$  – вектор скорости астероида.

Система нелинейных уравнений (5) решается итерационным методом дифференциальных поправок.

Для определения весового коэффициента  $w$  предварительно выполняется улучшение орбиты по всем угловым наблюдениям, и этот коэффициент задается как величина, обратная полученной среднеквадратической ошибке представления наблюдений. Весовые коэффициенты  $p_i$  и  $u_i$  задаются как величины, обратные ошибкам соответствующих радарных наблюдений, приводимым вместе с этими наблюдениями.

При проведении исследований для разработанной ранее в [3] программы улучшения орбит астероидов по данным их угловых и радарных наблюдений был создан windows-интерфейс, упрощающий ее использование. Главное окно интерфейса имеет вид, приведенный на рис. 1.

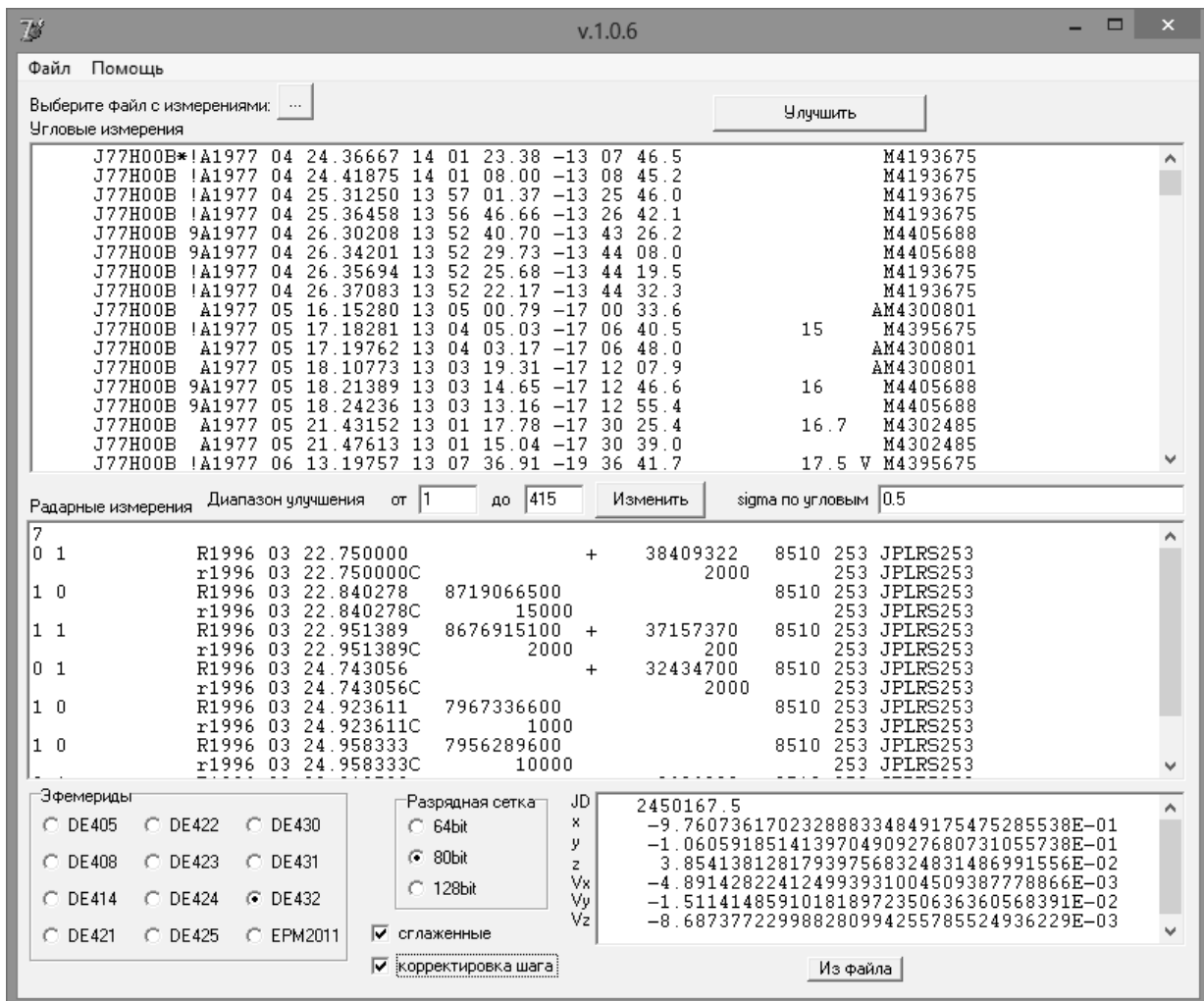


Рис. 1. Интерфейс программы

В верхнее окно программы вводятся путем копирования через буфер Windows или загрузки из текстового файла угловые наблюдения астероида в стандартном формате, принятом для электронной базы [8] Центра малых планет. Для загрузки наблюдений из файла следует нажать кнопку с обозначением «...». Если в массиве наблюдений содержатся радарные, то они автоматически выбираются из него и загружаются в среднее окно, причем в первой и третьей колонке автомати-

чески ставятся цифры «0» и «1», определяющие состав данного радарного наблюдения: если оно содержит только временную задержку, то ставится «1 0»; если только доплеровский сдвиг – то «0 1»; если оба вида измерений – то «1 1». Ручная замена какой-либо из единиц нулем приводит к исключению данного измерения из обработки.

В верхней строке окна с угловыми наблюдениями автоматически вводится общее число наблюдений и номера первого и последнего наблюдений выборки, используемой при улучшении орбиты. По умолчанию это номера первого и последнего наблюдений, однако их можно изменять вручную, что приведет к использованию при улучшении орбиты лишь соответствующей части всего массива угловых наблюдений. Аналогичным образом можно изменять и число используемых радарных наблюдений, расположенное в верхней строке среднего окна. Это приведет к использованию при улучшении орбиты лишь соответствующего числа первых радарных наблюдений. Задание этому числу нулевого значения означает, что радарные наблюдения вообще не будут использованы, т.е. будет выполняться улучшение орбиты только по угловым наблюдениям.

В строке ввода «sigma по угловым» должна быть введена среднеквадратическая ошибка, полученная при улучшении орбиты только по угловым наблюдениям. Данная величина используется в случае улучшения по угловым и радарным наблюдениям при назначении веса для угловых наблюдений. В случае улучшения только по угловым наблюдениям в строку «sigma по угловым» может быть введено любое число, не равное нулю. Веса радарных наблюдений в программе задаются как величины, обратные ошибкам этих наблюдений, приводимым вместе с ними в базе [8] в принятом формате. Данные ошибки видны на рис. 1 в окне с радарными наблюдениями под каждым из измерений.

В нижнем окне вводится юлианская дата эпохи начальных параметров и сами начальные параметры в виде прямоугольных гелиоцентрических координат и компонент скорости, отнесенных к экватору и равноденствию стандартной эпохи 2000.0. Эти данные также могут быть загружены из файла, для чего следует нажать кнопку «Из файла».

В разработанной программе предусмотрена возможность использования различной разрядной сетки при выполнении вычислений, а именно: 64 бита (16-значная десятичная разрядность), 80 бит (19-значная десятичная разрядность) и 128 бит (34-значная десятичная разрядность). Выбор разрядной сетки выполняется с помощью соответствующего переключателя (рис.1). В данной работе при выполнении всех расчетов используется 80-битовая разрядная сетка.

В качестве модели движения используется возмущенная задача двух тел с учетом возмущений от восьми больших планет, Луны и Плутона, координаты которых при вычислениях извлекаются из каких-либо эфемерид больших планет и Луны. В программе предусмотрена возможность использования 12 таких эфемерид, а именно: DE405, DE408, DE414, DE421, DE422, DE423, DE424, DE425, DE430, DE431, DE432 [9] и EPM2011 [10]. Кроме того, каждые из эфемерид могут быть использованы как в своем оригинальном виде, так и в виде, сглаженном [11] до первых производных от координат на границах соседних интервалов интерполирования. Кроме того, при численном интегрировании возможно применение корректировки [11] шага интегрирования в соответствии с границами соседних интервалов интерполирования, которая позволяет исключить влияние на точность численного интегрирования разрывов производных второго и более высоких порядков от интерполируемых координат возмущающих тел.

Для численного интегрирования уравнений движения применяется метод Эверхарта [6, 7]. Параметры подпрограммы, реализующей данный метод, задаются в зависимости от используемой разрядной сетки: для сетки в 64 бита – порядок 15 и параметр LL = 10; для сетки в 80 бит – порядок 19 и параметр LL = 13; для сетки в 128 бит – порядок 27 и параметр LL = 15.

При нажатии кнопки «Улучшить» (рис.1) запускается итерационный процесс улучшения орбиты. Критерием сходимости процесса является различие улучшаемых координат в соседних итерациях не более чем на заданное малое число. Данное число задается в зависимости от используемой разрядной сетки:  $10^{-9}$  а.е. для 64-битовой сетки,  $10^{-12}$  а.е. для 80-битовой и  $10^{-20}$  а.е. для 128-битовой.

Результаты каждой итерации записываются последовательно в файл imprad.out. На рис. 2 приведен скриншот последней записи этого файла, соответствующей последней итерации некоторого процесса улучшения орбиты. Запись содержит: номер итерации; улучшенные координаты и скорости в гелиоцентрической экваториальной системе J2000.0; ковариационную матрицу (размера  $6 \times 6$ ) улучшенных координат и скоростей; среднюю полуось доверительного эллипсоида, вы-

числяемую как среднее геометрическое полуосей эллипсоида, квадратами которых являются собственные числа ковариационной матрицы; элементы орбиты, отнесенные к эклиптике и равноденствию J2000.0, а именно  $a$ ,  $e$ ,  $i$ ,  $\Omega$ ,  $\omega$ ,  $M$ ; среднеквадратическую ошибку «sigma» представления угловых наблюдений (угл. сек.); среднеквадратические ошибки «sigdeldop» представления временных задержек (мкс) и доплеровских сдвигов частоты (Гц); модуль вектора «popr» поправок к координатам, полученным на предыдущей итерации.

```

Итерация      3
2450167.500000000000
-9.760706708902985206E-01
-1.060499862603332027E-01
 3.854687047411241534E-02
-4.891615500845652064E-03
-1.511416564337842704E-02
-8.687370962063308533E-03

 3.162678363760949501E-16  1.044957723182181881E-16 -3.735717317445232140E-17  1.347366903471
 1.044957723182223736E-16  5.922124982365331057E-16  2.338574999045005965E-16 -4.629960426390
-3.735717317445046885E-17  2.338574999045017052E-16  1.137400131280860153E-16 -2.044678149020
 1.347366903475656428E-19 -4.629960426396873941E-18 -2.044678149026882011E-18  4.198487604240
-1.277365681409852561E-17 -5.204705322482367593E-18  9.473733513186415589E-19 -6.918575796250
 1.060898365930679521E-17  6.025148246436675321E-18  6.097847285724312374E-20 -1.096254363640

Ср. полуось дов. эл-да: 1.015533835995206E-09
Элементы:
 1.078060284363460941
 0.3497147193737926577
 9.426017231009450570
 33.28333849445411794
 55.11533056333679744
 55.94463190835991913
sigma= 1.015063959266326E+00
sigdeldop= 3.165501038209194E+00  4.374618863400714E+00
popr= 7.85073E-14

Count time: 2.48
  
```

Рис. 2. Пример записи результатов в файл imprad.out

Улучшенные с помощью описанной программы начальные координаты и скорости могут быть далее использованы, например, при прогнозировании движения астероидов с применением при учете возмущений тех же эфемерид, что и при улучшении орбиты. Для этого разработана программа, описанная в [12], позволяющая прогнозировать движение астероидов с тем же набором эфемерид больших планет и Луны, что и в настоящей работе.

С помощью данной программы было выполнено исследование степени увеличения точности улучшенных орбит астероидов за счет использования их радарных наблюдений в дополнение к угловым. Для проведения исследования из электронной базы наблюдений астероидов [7] были выбраны четыре объекта, имеющие достаточно большое число как радарных, так и угловых наблюдений. Информация о наблюдениях этих объектов приведена в табл. 1. Здесь  $T$  – интервал времени, охватываемый угловыми наблюдениями;  $T_{\text{рад}}$  – интервал времени, охватываемый радарными наблюдениями;  $\overline{\delta\tau}$ ,  $\overline{\delta f}$  – средние модули приводимых в [7] ошибок радарных наблюдений.

Таблица 1  
Информация о наблюдениях рассматриваемых астероидов

Астероид	$N$	$T$ , сут	$N_{\tau}$	$N_f$	$T_{\text{рад}}$ , сут	$\overline{\delta\tau}$ , мкс	$\overline{\delta f}$ , Гц
2063	415	13278	4	4	8	7.00	2.00
6037	379	9275	4	4	8	4.00	2.05
152664	414	7140	6	2	6	2.58	0.50
364136	220	2211	5	3	5	3.08	1.58

Для каждого из астероидов сначала были выполнены два улучшения орбиты – одно по всем угловым наблюдениям, другое по всем угловым и радарным наблюдениям. Полученные в результате вектора начальных параметров движения использовались далее в качестве «точных», или «эталонных», с которыми выполнялось сравнение векторов, полученных по более коротким интервалам наблюдаемости. Обозначим полученные «эталонные» векторы как  $\mathbf{q}^{\text{ang}}$  и  $\mathbf{q}^{\text{ar}}$  соответственно. Покомпонентно они имеют вид  $\mathbf{q}^{\text{ang}} = (x^{\text{ang}}, y^{\text{ang}}, z^{\text{ang}}, \dot{x}^{\text{ang}}, \dot{y}^{\text{ang}}, \dot{z}^{\text{ang}})$  и  $\mathbf{q}^{\text{ar}} = (x^{\text{ar}}, y^{\text{ar}}, z^{\text{ar}}, \dot{x}^{\text{ar}}, \dot{y}^{\text{ar}}, \dot{z}^{\text{ar}})$ . Информация об этих векторах приведена в табл. 2. Здесь  $\sigma_0^{\text{ang}}, \sigma_f^{\text{ang}}, \sigma_\tau^{\text{ang}}$  – среднеквадратические ошибки представления соответственно угловых наблюдений, временных задержек и доплеровских сдвигов частоты вектором  $\mathbf{q}^{\text{ang}}$ ;  $\sigma_0^{\text{ar}}, \sigma_f^{\text{ar}}, \sigma_\tau^{\text{ar}}$  – то же вектором  $\mathbf{q}^{\text{ar}}$ ;  $dr = \sqrt{(x^{\text{ang}} - x^{\text{ar}})^2 + (y^{\text{ang}} - y^{\text{ar}})^2 + (z^{\text{ang}} - z^{\text{ar}})^2}$  – модуль разности соответствующих векторов положения;  $dv = \sqrt{(\dot{x}^{\text{ang}} - \dot{x}^{\text{ar}})^2 + (\dot{y}^{\text{ang}} - \dot{y}^{\text{ar}})^2 + (\dot{z}^{\text{ang}} - \dot{z}^{\text{ar}})^2}$  – модуль разности соответствующих векторов скорости. В последней колонке табл. 2 приведено среднее геометрическое этих модулей разности.

Таблица 2

## Информация об «эталонных» векторах начальных параметров

Астероид	$\sigma_0^{\text{ang}}, "$	$\sigma_f^{\text{ang}},$ мкс	$\sigma_\tau^{\text{ang}},$ Гц	$\sigma_0^{\text{ar}}, "$	$\sigma_f^{\text{ar}},$ мкс	$\sigma_\tau^{\text{ar}},$ Гц	$dr, \text{ a.e.}$	$dv, \frac{\text{a.e.}}{\text{сут}}$	$\sqrt{dr \cdot dv},$ $\text{a.e.}/\text{сут}^{1/2}$
2063	1.01	112.20	4.18	1.02	3.17	4.37	$1.31 \cdot 10^{-7}$	$2.12 \cdot 10^{-9}$	$1.67 \cdot 10^{-8}$
6037	0.81	135.98	7.20	0.88	9.75	7.98	$1.34 \cdot 10^{-7}$	$2.14 \cdot 10^{-8}$	$5.36 \cdot 10^{-8}$
152664	0.54	60.63	21.6	0.55	2.09	21.98	$9.12 \cdot 10^{-7}$	$3.16 \cdot 10^{-9}$	$1.70 \cdot 10^{-8}$
364136	1.58	1047.71	70.70	2.30	2.28	1.89	$2.72 \cdot 10^{-6}$	$6.00 \cdot 10^{-8}$	$4.04 \cdot 10^{-7}$

Далее для каждого из астероидов был выполнен ряд улучшений орбиты с использованием выборок угловых наблюдений, охватывающих все меньшие и меньшие интервалы времени, но содержащие внутри себя интервал, охватываемый радарными наблюдениями. Каждое из улучшений орбиты выполнялось в двух вариантах – только по угловым наблюдениям и с использованием всех радарных наблюдений в дополнение к угловым. Обозначим полученные в результате вектора улучшенных начальных параметров орбиты соответственно как  $\mathbf{q}_i^{\text{ang}} = (x_i^{\text{ang}}, y_i^{\text{ang}}, z_i^{\text{ang}}, \dot{x}_i^{\text{ang}}, \dot{y}_i^{\text{ang}}, \dot{z}_i^{\text{ang}})$  и  $\mathbf{q}_i^{\text{ar}} = (x_i^{\text{ar}}, y_i^{\text{ar}}, z_i^{\text{ar}}, \dot{x}_i^{\text{ar}}, \dot{y}_i^{\text{ar}}, \dot{z}_i^{\text{ar}})$ , где  $i$  – номер используемой выборки угловых наблюдений. Информация о выборках наблюдений, а также о результатах улучшения орбиты с использованием этих выборок приведена в табл. 3 и 4 с использованием следующих обозначений:  $N_i$  – число угловых наблюдений в  $i$ -й выборке;  $T_i$  – интервал времени, охватываемый этими наблюдениями;  $dr_i^{\text{ang}} = \sqrt{(x_i - x^{\text{ang}})^2 + (y_i - y^{\text{ang}})^2 + (z_i - z^{\text{ang}})^2}$ ;  $dv_i^{\text{ang}} = \sqrt{(\dot{x}_i - \dot{x}^{\text{ang}})^2 + (\dot{y}_i - \dot{y}^{\text{ang}})^2 + (\dot{z}_i - \dot{z}^{\text{ang}})^2}$ ;  $dr_i^{\text{ar}} = \sqrt{(x_i - x^{\text{ar}})^2 + (y_i - y^{\text{ar}})^2 + (z_i - z^{\text{ar}})^2}$ ;  $dv_i^{\text{ar}} = \sqrt{(\dot{x}_i - \dot{x}^{\text{ar}})^2 + (\dot{y}_i - \dot{y}^{\text{ar}})^2 + (\dot{z}_i - \dot{z}^{\text{ar}})^2}$ .

Таблица 3

## Информация о сериях улучшений орбиты только по угловым измерениям

$i$	$N_i$	$T_i,$ сут	$dr_i^{\text{ang}},$ a.e.	$dv_i^{\text{ang}},$ a.e./сут	$\sqrt{dr_i^{\text{ang}} \cdot dv_i^{\text{ang}}},$ a.e./сут <sup>1/2</sup>	$dr_i^{\text{ar}},$ a.e.	$dv_i^{\text{ar}},$ a.e./сут	$\sqrt{dr_i^{\text{ar}} \cdot dv_i^{\text{ar}}},$ a.e./сут <sup>1/2</sup>
Астероид 2063								
1	370	11005	$5.46 \cdot 10^{-8}$	$1.45 \cdot 10^{-9}$	$8.89 \cdot 10^{-9}$	$9.65 \cdot 10^{-8}$	$1.93 \cdot 10^{-9}$	$1.37 \cdot 10^{-8}$
2	270	9935	$2.46 \cdot 10^{-7}$	$4.16 \cdot 10^{-9}$	$3.20 \cdot 10^{-8}$	$3.44 \cdot 10^{-7}$	$5.68 \cdot 10^{-9}$	$4.42 \cdot 10^{-8}$
3	220	7328	$3.03 \cdot 10^{-7}$	$5.15 \cdot 10^{-9}$	$3.95 \cdot 10^{-8}$	$3.84 \cdot 10^{-7}$	$6.13 \cdot 10^{-9}$	$4.86 \cdot 10^{-8}$
4	150	1065	$3.41 \cdot 10^{-7}$	$5.71 \cdot 10^{-9}$	$4.41 \cdot 10^{-8}$	$4.45 \cdot 10^{-7}$	$6.90 \cdot 10^{-9}$	$5.54 \cdot 10^{-8}$
5	100	35	$1.37 \cdot 10^{-6}$	$5.38 \cdot 10^{-8}$	$2.71 \cdot 10^{-7}$	$1.43 \cdot 10^{-6}$	$5.37 \cdot 10^{-8}$	$2.77 \cdot 10^{-7}$

Окончание табл. 3

$i$	$N_i$	$T_i$ , сут	$dr_i^{\text{ang}}$ , а.е.	$dv_i^{\text{ang}}$ , а.е./сут	$\sqrt{dr_i^{\text{ang}} \cdot dv_i^{\text{ang}}}$ , а.е./сут <sup>1/2</sup>	$dr_i^{\text{ar}}$ , а.е.	$dv_i^{\text{ar}}$ , а.е./сут	$\sqrt{dr_i^{\text{ar}} \cdot dv_i^{\text{ar}}}$ , а.е./сут <sup>1/2</sup>
Астероид 6037								
1	270	7335	$1.96 \cdot 10^{-8}$	$3.68 \cdot 10^{-9}$	$8.50 \cdot 10^{-8}$	$1.45 \cdot 10^{-7}$	$2.43 \cdot 10^{-8}$	$5.93 \cdot 10^{-8}$
2	250	7040	$6.42 \cdot 10^{-8}$	$1.99 \cdot 10^{-8}$	$3.58 \cdot 10^{-8}$	$1.88 \cdot 10^{-7}$	$4.05 \cdot 10^{-8}$	$8.72 \cdot 10^{-8}$
3	170	4022	$4.49 \cdot 10^{-7}$	$1.50 \cdot 10^{-7}$	$2.96 \cdot 10^{-7}$	$5.71 \cdot 10^{-7}$	$1.69 \cdot 10^{-7}$	$3.11 \cdot 10^{-7}$
4	120	270	$7.80 \cdot 10^{-7}$	$2.54 \cdot 10^{-7}$	$4.45 \cdot 10^{-7}$	$9.02 \cdot 10^{-7}$	$2.73 \cdot 10^{-7}$	$4.96 \cdot 10^{-7}$
5	70	262	$8.50 \cdot 10^{-7}$	$2.73 \cdot 10^{-7}$	$4.82 \cdot 10^{-7}$	$9.72 \cdot 10^{-7}$	$2.92 \cdot 10^{-7}$	$5.33 \cdot 10^{-7}$
Астероид 152664								
1	360	4243	$3.31 \cdot 10^{-8}$	$9.64 \cdot 10^{-10}$	$5.65 \cdot 10^{-9}$	$9.52 \cdot 10^{-8}$	$4.96 \cdot 10^{-9}$	$2.17 \cdot 10^{-8}$
2	250	1524	$1.99 \cdot 10^{-7}$	$5.25 \cdot 10^{-9}$	$3.23 \cdot 10^{-8}$	$1.53 \cdot 10^{-7}$	$7.96 \cdot 10^{-9}$	$3.50 \cdot 10^{-8}$
3	150	1469	$2.44 \cdot 10^{-6}$	$7.64 \cdot 10^{-7}$	$1.37 \cdot 10^{-6}$	$2.42 \cdot 10^{-6}$	$7.64 \cdot 10^{-7}$	$1.36 \cdot 10^{-6}$
4	120	204	$2.11 \cdot 10^{-6}$	$3.59 \cdot 10^{-7}$	$8.69 \cdot 10^{-7}$	$2.06 \cdot 10^{-6}$	$3.59 \cdot 10^{-7}$	$8.61 \cdot 10^{-7}$
5	50	9	$1.55 \cdot 10^{-4}$	$6.61 \cdot 10^{-5}$	$1.01 \cdot 10^{-4}$	$1.55 \cdot 10^{-4}$	$6.61 \cdot 10^{-5}$	$1.01 \cdot 10^{-4}$
Астероид 364136								
1	190	1844	$3.15 \cdot 10^{-7}$	$4.57 \cdot 10^{-8}$	$1.20 \cdot 10^{-7}$	$2.93 \cdot 10^{-7}$	$5.88 \cdot 10^{-8}$	$4.15 \cdot 10^{-7}$
2	147	1503	$1.62 \cdot 10^{-5}$	$4.54 \cdot 10^{-7}$	$2.71 \cdot 10^{-6}$	$1.74 \cdot 10^{-5}$	$4.80 \cdot 10^{-7}$	$2.89 \cdot 10^{-6}$
3	132	18	$2.58 \cdot 10^{-5}$	$7.14 \cdot 10^{-7}$	$4.29 \cdot 10^{-6}$	$2.69 \cdot 10^{-5}$	$7.39 \cdot 10^{-7}$	$4.46 \cdot 10^{-6}$
4	20	5	$6.11 \cdot 10^{-5}$	$1.65 \cdot 10^{-6}$	$1.00 \cdot 10^{-5}$	$6.21 \cdot 10^{-5}$	$1.67 \cdot 10^{-6}$	$1.02 \cdot 10^{-5}$

Таблица 4

## Информация о сериях улучшений орбиты по угловым и радарным измерениям

$i$	$N_i$	$T_i$ , сут	$dr_i^{\text{ang}}$ , а.е.	$dv_i^{\text{ang}}$ , а.е./сут	$\sqrt{dr_i^{\text{ang}} \cdot dv_i^{\text{ang}}}$ , а.е./сут <sup>1/2</sup>	$dr_i^{\text{ar}}$ , а.е.	$dv_i^{\text{ar}}$ , а.е./сут	$\sqrt{dr_i^{\text{ar}} \cdot dv_i^{\text{ar}}}$ , а.е./сут <sup>1/2</sup>
Астероид 2063								
1	370	11005	$1.40 \cdot 10^{-7}$	$3.27 \cdot 10^{-9}$	$2.14 \cdot 10^{-8}$	$1.73 \cdot 10^{-8}$	$1.46 \cdot 10^{-9}$	$5.02 \cdot 10^{-9}$
2	270	9935	$1.48 \cdot 10^{-7}$	$2.31 \cdot 10^{-9}$	$1.85 \cdot 10^{-8}$	$6.54 \cdot 10^{-8}$	$1.63 \cdot 10^{-9}$	$1.03 \cdot 10^{-8}$
3	220	7328	$2.48 \cdot 10^{-7}$	$3.95 \cdot 10^{-9}$	$3.13 \cdot 10^{-8}$	$2.04 \cdot 10^{-7}$	$3.80 \cdot 10^{-9}$	$2.78 \cdot 10^{-8}$
4	150	1065	$2.41 \cdot 10^{-7}$	$5.68 \cdot 10^{-9}$	$3.70 \cdot 10^{-8}$	$1.92 \cdot 10^{-7}$	$5.23 \cdot 10^{-9}$	$3.17 \cdot 10^{-8}$
5	100	35	$2.92 \cdot 10^{-7}$	$9.36 \cdot 10^{-9}$	$5.22 \cdot 10^{-8}$	$2.32 \cdot 10^{-7}$	$7.73 \cdot 10^{-9}$	$4.23 \cdot 10^{-8}$
Астероид 6037								
1	270	7335	$1.32 \cdot 10^{-7}$	$2.60 \cdot 10^{-8}$	$5.87 \cdot 10^{-8}$	$1.02 \cdot 10^{-9}$	$4.59 \cdot 10^{-9}$	$6.68 \cdot 10^{-9}$
2	250	7040	$1.31 \cdot 10^{-7}$	$2.69 \cdot 10^{-8}$	$5.95 \cdot 10^{-8}$	$1.02 \cdot 10^{-8}$	$5.46 \cdot 10^{-9}$	$7.49 \cdot 10^{-9}$
3	170	4022	$1.18 \cdot 10^{-7}$	$3.74 \cdot 10^{-8}$	$6.65 \cdot 10^{-8}$	$3.08 \cdot 10^{-8}$	$2.53 \cdot 10^{-8}$	$3.10 \cdot 10^{-8}$
4	120	270	$1.22 \cdot 10^{-7}$	$3.74 \cdot 10^{-8}$	$6.78 \cdot 10^{-8}$	$4.08 \cdot 10^{-8}$	$2.71 \cdot 10^{-8}$	$3.32 \cdot 10^{-8}$
5	70	262	$1.29 \cdot 10^{-7}$	$3.65 \cdot 10^{-8}$	$6.88 \cdot 10^{-8}$	$5.41 \cdot 10^{-8}$	$2.55 \cdot 10^{-8}$	$3.71 \cdot 10^{-8}$
Астероид 152664								
1	360	4243	$6.53 \cdot 10^{-8}$	$1.81 \cdot 10^{-9}$	$1.09 \cdot 10^{-8}$	$3.87 \cdot 10^{-8}$	$3.73 \cdot 10^{-9}$	$1.20 \cdot 10^{-8}$
2	250	1524	$6.73 \cdot 10^{-8}$	$3.63 \cdot 10^{-9}$	$1.56 \cdot 10^{-8}$	$5.67 \cdot 10^{-8}$	$5.99 \cdot 10^{-9}$	$1.84 \cdot 10^{-8}$
3	150	1469	$7.32 \cdot 10^{-8}$	$6.00 \cdot 10^{-9}$	$2.09 \cdot 10^{-8}$	$7.25 \cdot 10^{-8}$	$8.50 \cdot 10^{-9}$	$2.48 \cdot 10^{-8}$
4	120	204	$7.75 \cdot 10^{-8}$	$7.25 \cdot 10^{-9}$	$2.37 \cdot 10^{-8}$	$8.12 \cdot 10^{-8}$	$9.78 \cdot 10^{-9}$	$2.81 \cdot 10^{-8}$
5	50	9	$6.13 \cdot 10^{-8}$	$7.65 \cdot 10^{-9}$	$2.16 \cdot 10^{-8}$	$5.16 \cdot 10^{-8}$	$5.46 \cdot 10^{-9}$	$1.68 \cdot 10^{-8}$
Астероид 364136								
1	190	1844	$2.69 \cdot 10^{-6}$	$6.45 \cdot 10^{-8}$	$4.16 \cdot 10^{-7}$	$4.76 \cdot 10^{-8}$	$1.13 \cdot 10^{-8}$	$2.32 \cdot 10^{-8}$
2	147	1503	$3.68 \cdot 10^{-6}$	$9.69 \cdot 10^{-8}$	$5.97 \cdot 10^{-7}$	$1.40 \cdot 10^{-6}$	$9.33 \cdot 10^{-8}$	$3.62 \cdot 10^{-7}$
3	132	18	$3.66 \cdot 10^{-6}$	$9.43 \cdot 10^{-8}$	$5.88 \cdot 10^{-7}$	$1.38 \cdot 10^{-6}$	$9.00 \cdot 10^{-8}$	$3.52 \cdot 10^{-7}$
4	20	5	$3.54 \cdot 10^{-6}$	$6.58 \cdot 10^{-8}$	$4.82 \cdot 10^{-7}$	$1.37 \cdot 10^{-6}$	$7.85 \cdot 10^{-9}$	$1.04 \cdot 10^{-7}$

Как видно из табл. 3 и 4, практически все значения, приведенные в табл. 4, меньше значений, приведенных в табл. 3, за исключением некоторых случаев для выборок наблюдений № 1, содержащих наибольшее число угловых наблюдений. Данные исключения имеют место лишь в левой части табл. 3 и 4, т.е. при сравнении с «эталонным» вектором  $q^{\text{ang}}$ , полученным по всем угловым наблюдениям без радарных. Во всех остальных случаях сравнение результатов с обоими «эталон-

ными» векторами показывает, что использование радарных наблюдений в дополнение к угловым увеличивает точность улучшенной орбиты. Кроме того, из табл. 3 и 4 видно, что увеличение точности возрастает с ростом номера выборки, т.е. при уменьшении числа угловых наблюдений. В целом, использование радарных наблюдений приводит к увеличению точности улучшенной орбиты от нескольких раз до нескольких порядков. Наибольшее увеличение имеет место в случаях, когда угловые наблюдения охватывают небольшую дугу орбиты, что заметно для объектов 152664 и 364136 при использовании выборок № 4, 5, когда это увеличение составляет от 2 до 4 порядков. Однако увеличение точности происходит и в случаях большой дуги, охватываемой угловыми наблюдениями: для объекта 2063 – начиная с дуги в 9935 сут, для объекта 6037 – 4022 сут, для объекта 152664 – 4243 сут и для объекта 364136 – 1503 сут.

Сравнивая последний столбец в табл. 3 и 4, можно видеть, что его значения в табл. 4 всегда меньше значений в табл. 3. Это означает, что при сравнении с «эталонным» вектором  $q^{ar}$  оценки точности орбит, улучшенных с использованием радарных наблюдений, всегда получаются более высокими, чем при сравнении с «эталонным» вектором  $q^{ang}$ . Поскольку при сравнении с «эталонным» вектором  $q^{ang}$  в большинстве случаев просматривается аналогичная картина, можно сделать вывод, что в целом использование радарных наблюдений приводит к повышению точности улучшенной орбиты даже при больших интервалах, охватываемых угловыми наблюдениями.

#### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Батури́н А.П. // Изв. вузов. Физика. – 2012. – Т. 55. – № 10/2. – С. 78–82.
2. Батури́н А.П. // Изв. вузов. Физика. – 2013. – Т. 56. – № 6/3. – С. 185–187.
3. Батури́н А.П. // Изв. вузов. Физика. – 2013. – Т. 56. – № 10/2. – С. 139–143.
4. Yeomans D. K. et al. // Astron. J. – 1992. – V. 103. – No. 1. – P. 303–317.
5. Виноградова Т.А., Кочетова О.М., Чернетенко Ю.А. и др. // Астрон. вестник. – 2008. – Т. 42. – № 4. – С. 291–300.
6. Бордовицына Т.В. Современные численные методы в задачах небесной механики. – М.: Наука, 1984. – 136 с.
7. Авдюшев В.А. // Вычислительные технологии. – 2010. – Т. 15. – № 4. – С. 31–46.
8. <http://www.minorplanetcenter.net/iau/ECS/MPCAT-OBS/NumObs.txt.gz> (дата обращения март 2014 г.)
9. <ftp://ssd.jpl.nasa.gov/pub/eph/planets> (дата обращения сентябрь 2014 г.)
10. <ftp://quasar.ipa.nw.ru/incoming/ERM> (дата обращения февраль 2014 г.)
11. Батури́н А.П. // Изв. вузов. Физика. – 2014. – Т. 57. – № 9. – С. 72–79.
12. Батури́н А.П., Вотчель И.А. // Изв. вузов. Физика. – 2014. – Т. 57. – № 10/2. – С. 17–24.

Национальный исследовательский  
Томский государственный университет, г. Томск, Россия  
E-mail: alexbaturin@sibmail.com

Поступила в редакцию 25.09.14.



A.P. BATURIN, V.V. KINZERSKY

## THE RESEARCH OF THE ACCURACY OF ASTEROID ORBIT FITTING USING BOTH RADAR AND ASTROMETRIC OBSERVATIONS

*Tomsk State University, Tomsk, Russia*

The least-square orbit fitting problem for asteroids using their radar and astrometric observations has been considered. The both types of radar observations have been taken into account: the time delay observations and the Doppler observations. The research of accuracy increase due to the using of radar observations in addition to astrometric ones has been carried out. This research has been done by means of several orbit fittings using different samples of observations of some asteroids. The samples contain all radar observations and different numbers of astrometric ones. The orbit arc of radar observations of chosen asteroids is very short (several days) while the arcs of astrometric observations for all used samples are much longer. It has been demonstrated that the using of radar observations in the orbit fitting may increase the accuracy of obtained solution by 1-3 orders even in the cases of very long astrometric arcs (several years). During the research the convenient windows-interface for the calculating program has been developed. The functions of the program also have been expanded. Particularly, the ability of perturbations calculation from different planet ephemerides and of calculations with different machine precision have been added to the program.

**Keywords:** *asteroids, radar observations, orbit fitting.*

### REFERENCES

1. Baturin A.P. *Izv. Vyssh. Uchebn. Zaved. Fiz.*, 2012, vol. 55, no. 10/2, pp. 78–82.
2. Baturin A.P. *Izv. Vyssh. Uchebn. Zaved. Fiz.*, 2013, Vol. 56, no. 6/3, pp. 185–187.
3. Baturin A.P. *Izv. Vyssh. Uchebn. Zaved. Fiz.*, 2013, vol. 56, no. 10/2, pp. 139–143.
4. Yeomans D.K. et al. *Astron. J.*, 1992, vol. 103, no. 1, pp. 303–317.
5. Vinoradova T.A., Kochetova O.M., Chernetenko Yu.A., et al. *Solar System Research*, 2008, vol. 42, no. 4, pp. 271–280.
6. Bordovitsyna T.V. *Currently Used Numerical Methods in Celestial Mechanics*. Moscow, Izdatel'stvo Nauka, 1984, 136 p.
7. Avdyushev V.A. *Computational Technologies*, 2010, vol. 15, no. 4, pp. 31–46.
8. <http://www.minorplanetcenter.net/iau/ECS/MPCAT-OBS/NumObs.txt.gz> (the date of request: March, 2014)
9. <ftp://ssd.jpl.nasa.gov/pub/eph/planets> (the date of request: September, 2014)
10. <ftp://quasar.ipa.nw.ru/incoming/EPM> (the date of request: February, 2014)
11. Baturin A.P. *Izv. Vyssh. Uchebn. Zaved. Fiz.*, 2014, vol. 57, no. 9, pp. 72–79.
12. Baturin A.P. and Votchel I.A. *Izv. Vyssh. Uchebn. Zaved. Fiz.*, 2014, vol. 57, no. 10/2, pp. 17–24.