

УДК 517.54

О МНОЖЕСТВЕ ЗНАЧЕНИЙ ОДНОГО КОМПЛЕКСНОЗНАЧНОГО ФУНКЦИОНАЛА

В. А. Пчелинцев, Е. А. Пчелинцев

Аннотация. Решается задача о нахождении множества Ω значений одного функционала, заданного на классе пар нормированных однолистных функций. С помощью метода внутренних вариаций получена система функционально-дифференциальных уравнений для граничных функций, разрешенных в квадратурах. Установлено, что множеством значений функционала является круг с центром в начале и радиусом, зависящим от параметров функционала.

DOI 10.17377/smzh.2015.56.501

Ключевые слова: функционал, множество значений, вариационный метод, граничные функции, однолистные функции.

§ 1. Введение

Вопросы, которые рассматриваются в настоящей статье, принадлежат к геометрической теории однолистных функций комплексного переменного. Здесь большое внимание уделяется различным экстремальным задачам, в которых речь идет об экстремумах и множествах значений функционалов, характеризующих свойства конформных отображений. Экстремальные задачи получили мощный импульс благодаря исследованиям М. А. Лаврентьева [1], Г. М. Голузина [2, 3], П. П. Куфарева [4], Н. А. Лебедева [5, 6], К. Поммеренке [7], И. А. Александрова [8], В. Я. Гутлянского [9] и других авторов. К числу интересных задач относятся задачи о нахождении множеств значений функционалов, зависящих от значений пар функций и их производных в фиксированных точках единичного круга и его внешности. Например, в [6, 10] исследовались области значений функционалов на классе пар мероморфных однолистных функций без общих значений в единичном круге и его внешности, так называемые задачи о неналежащих областях. Настоящая работа посвящена дальнейшему развитию вариационного метода для исследования множества значений более общего функционала, заданного на классе, состоящем из пар нормированных однолистных функций, определенных соответственно в единичном круге и его внешности. При этом множества значений указанных функций могут пересекаться.

Пусть D и D^* — односвязные области в w -плоскости такие, что $0 \in D$, а $\infty \in D^*$. Пусть функция f принадлежит классу S , т. е. $f : U \rightarrow D$ — голоморфная однолистная функция, имеющая разложение в ряд

$$f(z) = z + c_2 z^2 + \dots + c_n z^n + \dots,$$

и функция F принадлежит классу Σ_0 , т. е. $F : U^* \rightarrow D^*$ — мероморфная однолистная функция, имеющая разложение в ряд

$$F(\zeta) = \zeta + d_0 + \frac{d_{-1}}{\zeta} + \dots + \frac{d_{-n}}{\zeta^n} + \dots$$

и не принимающая в U^* нулевого значения. Здесь $U = \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}$ и $U^* = \{\zeta \in \mathbb{C} : |\zeta| > 1\}$. Семейство пар функций $(f(z), F(\zeta))$ указанного вида назовем *классом* \mathfrak{M}' .

В статье решается задача о нахождении множества Ω значений функционала

$$I(f, F) = \ln \left(\frac{z_0 f'(z_0)}{f(z_0)} \frac{\zeta_0 F'(\zeta_0)}{F(\zeta_0)} \right) = \int_0^{z_0} \left(\frac{f''(z)}{f'(z)} - \frac{f'(z)}{f(z)} + \frac{1}{z} \right) dz - \int_{\zeta_0}^{\infty} \left(\frac{F''(\zeta)}{F'(\zeta)} - \frac{F'(\zeta)}{F(\zeta)} + \frac{1}{\zeta} \right) d\zeta \quad (1)$$

при фиксированных z_0 и ζ_0 , $|z_0| < 1$ и $|\zeta_0| > 1$ на классе \mathfrak{M}' .

Отметим, что множество Ω значений функционала (1) не зависит от $\arg z_0$ и $\arg \zeta_0$. Для того чтобы это показать, введем пару функций $(f_1(z), F_1(\zeta)) \in \mathfrak{M}'$, где $f_1(z) = e^{-i\varphi} f(e^{i\varphi} z)$, $F_1(\zeta) = e^{-i\psi} F(e^{i\psi} \zeta)$, $\varphi = \arg z_0$ и $\psi = \arg \zeta_0$. Тогда $f(z) = e^{i\varphi} f_1(e^{-i\varphi} z)$, $F(\zeta) = e^{i\psi} F_1(e^{-i\psi} \zeta)$, а

$$I(f, F) = \ln \left(\frac{z_0 f'(z_0)}{f(z_0)} \frac{\zeta_0 F'(\zeta_0)}{F(\zeta_0)} \right) = \ln \left(\frac{z_0 f_1'(e^{-i\varphi} z_0)}{e^{i\varphi} f_1(e^{-i\varphi} z_0)} \frac{\zeta_0 F_1'(e^{-i\psi} \zeta_0)}{e^{i\psi} F_1(e^{-i\psi} \zeta_0)} \right) = \ln \left(\frac{|z_0| f_1'(|z_0|)}{f_1(|z_0|)} \frac{|\zeta_0| F_1'(|\zeta_0|)}{F_1(|\zeta_0|)} \right).$$

Отсюда следует независимость множества Ω от аргументов точек z_0 и ζ_0 . Далее будем считать, что $|z_0| = r \in (0, 1)$, $|\zeta_0| = \rho \in (1, +\infty)$.

В работах Н. А. Лебедева [5, 6] показано, что для нахождения множества значений Ω достаточно разыскать все граничные точки этого множества, т. е. найти его границу $\partial\Omega$. В свою очередь, при нахождении границы $\partial\Omega$ достаточно рассмотреть только совокупность неособых граничных точек, поскольку множество всех неособых точек границы плотно в $\partial\Omega$.

Точка $I_0 \in \partial\Omega$ называется *неособой точкой границы*, если существует такая внешняя для Ω точка I_e , что расстояние между точками I_e и I_0 равно расстоянию между I_e и множеством Ω .

Разыскание неособых точек множества значений Ω функционала (1) сводится к нахождению наименьшего значения выражения

$$|I(f, F) - I_e| = \left| \ln \frac{r f'(r)}{f(r)} \frac{\rho F'(\rho)}{F(\rho)} - I_e \right| \quad (2)$$

на классе \mathfrak{M}' при всевозможных $I_e \notin \Omega$.

Таким образом, исходная задача нахождения множества Ω значений функционала (1) заменяется эквивалентной экстремальной задачей: *отыскать минимум вещественнозначного функционала* (2).

Функции, вносящие неособые граничные точки функционала, называют *граничными функциями* этого функционала, т. е. это функции, значения функционала в которых являются неособыми граничными точками.

Заметим, что класс \mathfrak{M}' не линейный и методы классического вариационного исчисления оказываются недостаточными. Для решения экстремальных задач в геометрической теории однолистных функций были предложены свои методы, среди которых метод площадей, параметрический метод и вариационные методы [3, 8, 9].

В данной работе при решении экстремальной задачи, эквивалентной исходной задаче, используется вариационный метод Голузина [2]. Получены необходимые условия для граничных функций функционала (1) (лемма 1). С помощью этих условий, рассмотренных совместно с малыми вариационными формулами, доказано, что образы единичного круга и его внешности при отображении граничными функциями не имеют внешних точек (лемма 2). Основными результатами являются теорема 1, дающая систему уравнений на пару граничных функций, и теорема 2, полностью описывающая значения функционала (1).

§ 2. Необходимые условия для граничных функций

Пусть $\Delta \subset \bar{\mathbb{C}}$ — область и \mathbf{W} — некоторое подмножество множества голоморфных или мероморфных в Δ функций. Говорят, что в классе \mathbf{W} имеет место *вариационная формула*

$$h_\varepsilon(z) = h(z) + \varepsilon R(z) + o(z, \varepsilon),$$

если для каждой функции $h(z) \in \mathbf{W}$ и любого достаточно малого ε , $\varepsilon > 0$, функция $h_\varepsilon(z)$ принадлежит \mathbf{W} , причем $R(z)$ — голоморфная в Δ функция, и $o(z, \varepsilon)/\varepsilon \rightarrow 0$ при $\varepsilon \rightarrow 0$ равномерно внутри Δ .

Запишем вариационные формулы для граничных функций $f(z)$ и $F(\zeta)$ на классе \mathfrak{M}' в виде

$$f_\varepsilon(z) = f(z) + \varepsilon P(z) + o(z, \varepsilon), \quad F_\varepsilon(\zeta) = F(\zeta) + \varepsilon Q(\zeta) + o(\zeta, \varepsilon)$$

при положительном и достаточно малом ε . С доказательствами вариационных формул, используемых в работе, можно познакомиться в [3].

Лемма 1. Пусть $f(z)$, $F(\zeta)$ — граничные функции. Тогда необходимое условие экстремума функционала (2) имеет вид

$$\operatorname{Re} \left(e^{-i\alpha} \left[\frac{P'(r)}{f'(r)} - \frac{P(r)}{f(r)} \right] \right) \geq 0, \quad (3)$$

$$\operatorname{Re} \left(e^{-i\alpha} \left[\frac{Q'(\rho)}{F'(\rho)} - \frac{Q(\rho)}{F(\rho)} \right] \right) \geq 0, \quad (4)$$

где $\alpha = \arg(I(f, F) - I_e)$, $0 \leq \alpha < 2\pi$.

Доказательство. Из определения минимума функционала (2) для граничной пары функций $(f(z), F(\zeta))$ имеем неравенства

$$|I(f_\varepsilon, F) - I_e|^2 \geq |I(f, F) - I_e|^2, \quad |I(f, F_\varepsilon) - I_e|^2 \geq |I(f, F) - I_e|^2$$

или

$$\left| I(f, F) + \ln \left(1 + \varepsilon \frac{P'(r)}{f'(r)} \right) - \ln \left(1 + \varepsilon \frac{P(r)}{f(r)} \right) + o(z, \varepsilon) - I_e \right|^2 \geq |I(f, F) - I_e|^2,$$

$$\left| I(f, F) + \ln \left(1 + \varepsilon \frac{Q'(\rho)}{F'(\rho)} \right) - \ln \left(1 + \varepsilon \frac{Q(\rho)}{F(\rho)} \right) + o(z, \varepsilon) - I_e \right|^2 \geq |I(f, F) - I_e|^2.$$

Разложив слагаемые в левых частях неравенств по формуле Тейлора по степеням ε , получим

$$\left| I(f, F) + \varepsilon \left(\frac{P'(r)}{f'(r)} - \frac{P(r)}{f(r)} \right) + o(z, \varepsilon) - I_e \right|^2 \geq |I(f, F) - I_e|^2,$$

$$\left| I(f, F) + \varepsilon \left(\frac{Q'(\rho)}{F'(\rho)} - \frac{Q(\rho)}{F(\rho)} \right) + o(z, \varepsilon) - I_e \right|^2 \geq |I(f, F) - I_e|^2.$$

Воспользовавшись равенством $|a|^2 = a\bar{a}$ и выполнив несложные преобразования, имеем

$$\begin{aligned} \varepsilon \operatorname{Re} \left[e^{-i\alpha} \left(\frac{P'(r)}{f'(r)} - \frac{P(r)}{f(r)} \right) \right] + o(z, \varepsilon) &\geq 0, \\ \varepsilon \operatorname{Re} \left[e^{-i\alpha} \left(\frac{Q'(\rho)}{F'(\rho)} - \frac{Q(\rho)}{F(\rho)} \right) \right] + o(z, \varepsilon) &\geq 0. \end{aligned}$$

Разделив обе части последних соотношений на ε , а затем перейдя в каждом из них к пределу при $\varepsilon \rightarrow 0$, приходим к неравенствам (3) и (4). Лемма доказана.

Лемма 2. Пусть $f(z), F(\zeta)$ — граничные функции функционала (1). Тогда области D и D^* не имеют внешних точек.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Допустим, что w_0 есть внешняя точка для области D . Подставляя в условие (3) в качестве функции сравнения варьированную функцию

$$f_\varepsilon(z) = f(z) + \varepsilon A_0 \frac{f^2(z)}{f(z) - w_0},$$

где w_0 — внешняя точка для области D , A_0 — произвольная комплексная постоянная, перепишем его в виде

$$\operatorname{Re} \left(-e^{-i\alpha} A_0 \frac{w_0 f(r)}{(f(r) - w_0)^2} \right) \geq 0.$$

Так как дробь в скобках отлична от нуля при данном w_0 , в силу произвольности константы A_0 может быть справедливо неравенство $|I(f_\varepsilon, F) - I_e| < |I(f, F) - I_e|$, которое противоречит экстремальности функции $f(z)$. Полученное противоречие доказывает отсутствие внешних точек для области D . Подобным образом доказывается, что область D^* не имеет внешних точек. Для этого в неравенстве (4) нужно выбрать в качестве функции сравнения варьированную функцию вида

$$F_\varepsilon(\zeta) = F(\zeta) + \varepsilon A_0 \frac{w_0^* F(\zeta)}{F(\zeta) - w_0^*} + o(\zeta, \varepsilon),$$

где w_0^* — внешняя точка для области D^* , A_0 — произвольная комплексная постоянная. Лемма доказана.

§ 3. Основные результаты

Используя в совокупности условие (3) с вариационной формулой

$$\begin{aligned} f(z, \varepsilon) = f(z) + \varepsilon \left(A_0 \frac{f^2(z)}{f(z) - f(z_0)} - \frac{A_0}{2} \left[z f'(z) \frac{z + z_0}{z - z_0} + f(z) \right] \left[\frac{f(z_0)}{z_0 f'(z_0)} \right]^2 \right. \\ \left. - \frac{\bar{A}_0}{2} \left[z f'(z) \frac{\bar{z}_0 z + 1}{\bar{z}_0 z - 1} + f(z) \right] \left[\frac{f(z_0)}{z_0 f'(z_0)} \right]^2 \right) + o(z, \varepsilon), \end{aligned} \quad (5)$$

а условие (4) — с вариационной формулой

$$\begin{aligned} F(\zeta, \varepsilon) = F(\zeta) + \varepsilon \left(A_0 \frac{F(\zeta_0) F(\zeta)}{F(\zeta) - F(\zeta_0)} + \frac{A_0}{2} \left[\zeta F'(\zeta) \frac{\zeta_0 + \zeta}{\zeta_0 - \zeta} + F(\zeta) \right] \left[\frac{F(\zeta_0)}{\zeta_0 F'(\zeta_0)} \right]^2 \right. \\ \left. + \frac{\bar{A}_0}{2} \left[\zeta F'(\zeta) \frac{1 + \bar{\zeta}_0 \zeta}{1 - \bar{\zeta}_0 \zeta} + F(\zeta) \right] \left[\frac{F(\zeta_0)}{\zeta_0 F'(\zeta_0)} \right]^2 \right) + o(\zeta, \varepsilon), \end{aligned} \quad (6)$$

получим систему функционально-дифференциальных уравнений для граничных функций множества Ω , соответствующих неособым граничным точкам. В формулах (5) и (6) $z_0 \in U$, $\zeta_0 \in U^*$, A_0 — произвольная комплексная постоянная.

Введем обозначения:

$$\begin{aligned} V(z) &= Az^4 + Bz^3 + (C + \bar{C})z^2 + \bar{B}z + \bar{A}, \\ V^*(\zeta) &= A^*\zeta^4 + B^*\zeta^3 + (C^* + \bar{C}^*)\zeta^2 + \bar{B}^*\zeta + \bar{A}^*, \\ A &= \frac{1}{2}(e^{i\alpha} \overline{H(r)} - e^{-i\alpha} H(r)), \quad A^* = \frac{1}{2}(e^{-i\alpha} \overline{H^*(\rho)} - e^{i\alpha} H^*(\rho)), \\ B &= e^{-i\alpha} \left(\frac{H(r)}{r} - r \right) - e^{i\alpha} \left(\overline{H(r)} r + \frac{1}{r} \right), \\ B^* &= e^{i\alpha} \left(\overline{H^*(\rho)} \rho - \frac{1}{\rho} \right) - e^{-i\alpha} \left(\frac{H^*(\rho)}{\rho} + \rho \right), \\ C &= \frac{e^{-i\alpha}}{2} \left(H(r)r^2 - \frac{H(r)}{r^2} + 4 \right), \quad C^* = \frac{e^{-i\alpha}}{2} \left(\frac{H^*(\rho)}{\rho^2} - H^*(\rho)\rho^2 + 4 \right), \\ H(r) &= 1 + \frac{rf''(r)}{f'(r)} - \frac{rf'(r)}{f(r)}, \quad H^*(\rho) = \frac{\rho F'(\rho)}{F(\rho)} - \frac{\rho F''(\rho)}{F'(\rho)} - 1. \end{aligned}$$

Теорема 1. Каждая граничная пара функций $(f(z), F(\zeta))$ функционала (1) удовлетворяет в U и U^* системе функционально-дифференциальных уравнений

$$-e^{-i\alpha} \frac{f(r)f(z)}{(f(z) - f(r))^2} \left(\frac{zf'(z)}{f(z)} \right)^2 = \frac{V(z)}{(z-r)^2 \left(z - \frac{1}{r} \right)^2}, \quad (7)$$

$$-e^{-i\alpha} \frac{F(\rho)F(\zeta)}{(F(\zeta) - F(\rho))^2} \left(\frac{\zeta F'(\zeta)}{F(\zeta)} \right)^2 = \frac{V^*(\zeta)}{(\zeta - \rho)^2 \left(\zeta - \frac{1}{\rho} \right)^2}, \quad (8)$$

где $\alpha = \arg(I(f, F) - I_e)$. При этом правые части уравнений (7) и (8) на единичной окружности $|z| = |\zeta| = 1$ неотрицательны.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Неравенство (3) в случае выбора вариационной формулы (5) примет вид

$$\begin{aligned} \operatorname{Re} \left[-e^{-i\alpha} A_0 \frac{f(r)f(z_0)}{(f(r) - f(z_0))^2} \right. \\ \left. - \frac{e^{-i\alpha} A_0}{2} \left(H(r) \frac{r+z_0}{r-z_0} - \frac{2rz_0}{(r-z_0)^2} \right) \left(\frac{f(z_0)}{z_0 f'(z_0)} \right)^2 \right. \\ \left. - \frac{e^{-i\alpha} \bar{A}_0}{2} \left(H(r) \frac{r\bar{z}_0+1}{r\bar{z}_0-1} - \frac{2r\bar{z}_0}{(r\bar{z}_0-1)^2} \right) \left(\overline{\frac{f(z_0)}{z_0 f'(z_0)}} \right)^2 \right] \geq 0. \end{aligned}$$

Заменяя последнее слагаемое под знаком вещественной части его сопряженным значением, имеем

$$\begin{aligned} \operatorname{Re} A_0 \left[-e^{-i\alpha} \frac{f(r)f(z_0)}{(f(r) - f(z_0))^2} \right. \\ \left. - \frac{e^{-i\alpha}}{2} \left(H(r) \frac{r+z_0}{r-z_0} - \frac{2rz_0}{(r-z_0)^2} \right) \left(\frac{f(z_0)}{z_0 f'(z_0)} \right)^2 \right. \\ \left. - \frac{e^{i\alpha}}{2} \left(\overline{H(r)} \frac{r\bar{z}_0+1}{r\bar{z}_0-1} - \frac{2r\bar{z}_0}{(r\bar{z}_0-1)^2} \right) \left(\overline{\frac{f(z_0)}{z_0 f'(z_0)}} \right)^2 \right] \geq 0. \end{aligned}$$

В этом условии выражение в скобках равно нулю, иначе при надлежащем выборе $\arg A_0$ получили бы, что левая часть последнего неравенства отрицательна. Это приводит к равенству

$$\begin{aligned}
 & -e^{-i\alpha} \left(\frac{f(r)f(z_0)}{(f(r) - f(z_0))^2} \right) \left(\frac{z_0 f'(z_0)}{f(z_0)} \right)^2 \\
 & = \frac{e^{-i\alpha}}{2} \left(H(r) \frac{r + z_0}{r - z_0} - \frac{2rz_0}{(r - z_0)^2} \right) + \frac{e^{i\alpha}}{2} \left(\overline{H(r)} \frac{rz_0 + 1}{rz_0 - 1} - \frac{2rz_0}{(rz_0 - 1)^2} \right).
 \end{aligned}$$

Поскольку в этом соотношении z_0 — произвольная точка круга U , заменив z_0 на z , находим дифференциальное уравнение, которому удовлетворяет граничная функция $f(z)$. Вычисления показывают, что оно имеет вид (7). Выбрав варьированную функцию

$$f(z, \varepsilon) = f(z) + \varepsilon \left(z f'(z) \frac{z + e^{i\theta}}{z - e^{i\theta}} + f(z) \right) + o(z, \varepsilon), \quad 0 \leq \theta \leq 2\pi,$$

посредством (3) приходим к неравенству

$$\operatorname{Re} \left[e^{-i\alpha} \left(H(r) \frac{r + e^{i\theta}}{r - e^{i\theta}} - \frac{2re^{i\theta}}{(r - e^{i\theta})^2} \right) \right] \geq 0,$$

которое указывает на неотрицательность правой части уравнения (7) на единичной окружности $|z| = 1$.

Вывод уравнения (8) в идейном отношении повторяет вывод уравнения (7), для этого надо применить условие (4) совместно с вариационными формулами (6) и

$$F(\zeta, \varepsilon) = F(\zeta) - \varepsilon \left(\zeta F'(\zeta) \frac{1 + e^{i\theta} \zeta}{1 - e^{i\theta} \zeta} + F(\zeta) \right) + o(\zeta, \varepsilon), \quad 0 \leq \theta \leq 2\pi.$$

Теорема доказана.

На основании аналитической теории дифференциальных уравнений [11] заключаем, что граничные функции $f(z)$ и $F(\zeta)$, удовлетворяющие своим уравнениям, являются голоморфными не только в U и U^* , но и на единичной окружности, за исключением конечного числа алгебраических особых точек. В лемме 2 установлено, что области D и D^* не содержат внешних точек, следовательно, в образах будут плоскости, разрезанные по конечному числу аналитических дуг. Пусть точка $z = k$, $|k| = 1$, и точка $\zeta = \varkappa$, $|\varkappa| = 1$, отображаются граничными функциями $f(z)$ и $F(\zeta)$ в концы разрезов, лежащих в конечной части плоскости. Тогда при $z = k$ производная $f'(z)$ и при $\zeta = \varkappa$ производная $F'(\zeta)$ имеют простые нули и, значит, правые части уравнений (7) и (8) делятся соответственно на $(z - k)^2$ и $(\zeta - \varkappa)^2$. С учетом вышесказанного уравнения (7) и (8) можно представить в виде

$$-e^{-i\alpha} \frac{f(r)f(z)}{(f(z) - f(r))^2} \left(\frac{z f'(z)}{f(z)} \right)^2 = \frac{(1 - \bar{k}z)^2 (Ak^2 z^2 - Ekz + \bar{A})}{(z - r)^2 \left(z - \frac{1}{\bar{r}} \right)^2}, \quad (9)$$

$$-e^{-i\alpha} \frac{F(\rho)F(\zeta)}{(F(\zeta) - F(\rho))^2} \left(\frac{\zeta F'(\zeta)}{F(\zeta)} \right)^2 = \frac{(\zeta - \varkappa)^2 (A^* \zeta^2 - E^* \bar{\varkappa} \zeta + \bar{A}^* \bar{\varkappa}^2)}{(\zeta - \rho)^2 \left(\zeta - \frac{1}{\bar{\rho}} \right)^2}, \quad (10)$$

где E, E^* — вещественные константы. Найдем их. Устремляя в уравнении (9) z к нулю, а в уравнении (10) ζ к бесконечности, получаем $\bar{A} = A^* = 0$. Перепишем уравнения

$$e^{-i\alpha} \frac{f(r)f(z)}{(f(z) - f(r))^2} \left(\frac{zf'(z)}{f(z)} \right)^2 = \frac{(1 - \bar{k}z)^2 E k z}{(z - r)^2 (z - \frac{1}{r})^2}, \quad (11)$$

$$e^{-i\alpha} \frac{F(\rho)F(\zeta)}{(F(\zeta) - F(\rho))^2} \left(\frac{\zeta F'(\zeta)}{F(\zeta)} \right)^2 = \frac{(\zeta - \varkappa)^2 E^* \bar{\varkappa} \zeta}{(\zeta - \rho)^2 (\zeta - \frac{1}{\rho})^2}. \quad (12)$$

Умножая обе части равенства (11) на $(z - r)^2$, а обе части равенства (12) на $(\zeta - \rho)^2$ и устремляя соответственно z к r , а ζ к ρ , в пределах имеем равенства

$$E k e^{i\alpha} = \frac{(1 - r^2)^2}{r(1 - \bar{k}r)^2}, \quad E^* \bar{\varkappa} e^{i\alpha} = \frac{(\rho^2 - 1)^2}{\rho(\rho - \varkappa)^2}.$$

Поскольку $\text{Im}(E) = 0$ и $\text{Im}(E^*) = 0$, то

$$e^{-i\alpha} k = \pm \frac{1 - \bar{k}r}{1 - kr}, \quad E = \pm \frac{(1 - r^2)^2}{r(1 - kr)(1 - \bar{k}r)},$$

$$e^{-i\alpha} \varkappa = \pm \frac{\rho - \varkappa}{\rho - \bar{\varkappa}}, \quad E^* = \pm \frac{(\rho^2 - 1)^2}{\rho(\rho - \varkappa)(\rho - \bar{\varkappa})}.$$

В этих формулах нужно взять знак минус, так как правые части уравнений (9) и (10) на единичной окружности неотрицательны. Отсюда с учетом того, что

$$\bar{k} = \frac{e^{-i\alpha} r - 1}{e^{-i\alpha} - r}, \quad \varkappa = \frac{e^{-i\alpha} - \rho}{e^{-i\alpha} \rho - 1},$$

уравнения (11) и (12) принимают вид

$$\frac{f(r)f(z)}{(f(z) - f(r))^2} \left(\frac{zf'(z)}{f(z)} \right)^2 = \frac{(1 - r^2)^2}{r(1 - \bar{k}r)^2} \frac{(1 - \bar{k}z)^2 z}{(z - r)^2 (z - \frac{1}{r})^2}, \quad (13)$$

$$\frac{F(\rho)F(\zeta)}{(F(\zeta) - F(\rho))^2} \left(\frac{\zeta F'(\zeta)}{F(\zeta)} \right)^2 = \frac{(\rho^2 - 1)^2}{\rho(\rho - \varkappa)^2} \frac{(\zeta - \varkappa)^2 \zeta}{(\zeta - \rho)^2 (\zeta - \frac{1}{\rho})^2}. \quad (14)$$

Перейдем к интегрированию уравнений (13) и (14). Извлекая квадратные корни из обеих частей каждого из равенств, имеем

$$\frac{du}{\sqrt{u(u-1)}} = \left(\frac{\sqrt{r}}{\sqrt{z}(z-r)} - \frac{e^{i\alpha}\sqrt{r}}{\sqrt{z}(rz-1)} \right) dz, \quad u = \frac{f(z)}{f(r)},$$

$$\frac{dv}{\sqrt{v(v-1)}} = \left(\frac{\sqrt{\rho}}{\sqrt{\zeta}(\rho\zeta-1)} - \frac{e^{i\alpha}\sqrt{\rho}}{\sqrt{\zeta}(\zeta-\rho)} \right) d\zeta, \quad v = \frac{F(\zeta)}{F(\rho)}.$$

Интегрируя полученные уравнения, получим равенства

$$\ln \frac{\sqrt{f(r)} - \sqrt{f(z)}}{\sqrt{f(r)} + \sqrt{f(z)}} = \ln \frac{\sqrt{r} - \sqrt{z}}{\sqrt{r} + \sqrt{z}} + e^{i\alpha} \ln \frac{1 + \sqrt{rz}}{1 - \sqrt{rz}}, \quad (15)$$

$$\ln \frac{\sqrt{F(\zeta)} - \sqrt{F(\rho)}}{\sqrt{F(\zeta)} + \sqrt{F(\rho)}} = \ln \frac{\sqrt{\zeta} - \sqrt{\rho}}{\sqrt{\zeta} + \sqrt{\rho}} + e^{i\alpha} \ln \frac{\sqrt{\rho\zeta} + 1}{\sqrt{\rho\zeta} - 1}. \quad (16)$$

Здесь под $\sqrt{f(z)}$ и \sqrt{z} понимаются те ветви, которые при $z \rightarrow r$ обращаются соответственно в $\sqrt{f(r)}$ и \sqrt{r} . Под $\sqrt{F(\zeta)}$ и $\sqrt{\zeta}$ понимаются те ветви, которые при $\zeta \rightarrow \rho$ обращаются соответственно в $\sqrt{F(\rho)}$ и $\sqrt{\rho}$. Постоянные интегрирования найдены из условий, что при $z = 0$ все логарифмы в (15) равны нулю и при $\zeta \rightarrow \infty$ все логарифмы в (16) стремятся к нулю.

Уравнения (15) и (16) неявно определяют граничные функции $f(z)$ и $F(\zeta)$. Устремляя в (15) z к r и в (16) ζ к ρ , в пределах получим

$$\ln \frac{rf'(r)}{f(r)} = e^{i\alpha} \ln \frac{1+r}{1-r}, \quad \ln \frac{\rho F'(\rho)}{F(\rho)} = e^{i\alpha} \ln \frac{\rho+1}{\rho-1}.$$

Почленно складывая последние равенства, находим уравнение границы множества Ω значений функционала (1):

$$\ln \left(\frac{rf'(r)}{f(r)} \frac{\rho F'(\rho)}{F(\rho)} \right) = e^{i\alpha} \ln \left(\frac{1+r}{1-r} \cdot \frac{\rho+1}{\rho-1} \right).$$

Таким образом, доказана

Теорема 2. Пусть $(f(z), F(\zeta)) \in \mathfrak{M}'$ и $r \in (0, 1)$, $\rho \in (1, +\infty)$ — фиксированные точки. Тогда множество Ω значений функционала (1) на классе \mathfrak{M}' есть круг:

$$\left| \ln \frac{rf'(r)}{f(r)} \frac{\rho F'(\rho)}{F(\rho)} \right| \leq \ln \left(\frac{1+r}{1-r} \cdot \frac{\rho+1}{\rho-1} \right).$$

Авторы выражают благодарность профессору Игорю Александровичу Александру за полезные обсуждения.

ЛИТЕРАТУРА

1. Лаврентьев М. А., Шабат Б. В. Методы теории функций комплексного переменного. М.: Наука, 1966.
2. Голузин Г. М. Метод вариаций в конформном отображении // Мат. сб. 1946. Т. 19, № 2. С. 203–236.
3. Голузин Г. М. Геометрическая теория функций комплексного переменного. М.: Наука, 1966.
4. Труды П. П. Куфарева (К 100-летию со дня рождения) / под общ. ред. И. А. Александрова. Томск: Изд-во НТЛ, 2009.
5. Лебедев Н. А. Мажорантная область для выражения $I = \ln\{z^\lambda [f'(z)]^{1-\lambda} / [f(z)]^\lambda\}$ в классе S // Вестн. Ленингр. ун-та. 1955. Т. 3, № 8. С. 29–41.
6. Лебедев Н. А. Об области значений одного функционала в задаче о неналегающих областях // Докл. АН СССР. 1957. Т. 115, № 6. С. 1070–1073.
7. Pommerenke Ch. Univalent Functions. Göttingen: Vandenhoeck & Ruprecht, 1975.
8. Александров И. А. Методы геометрической теории аналитических функций. Томск: Том. гос. ун-т, 2001.
9. Гутлянский В. Я., Рязанов В. И. Геометрическая и топологическая теория функций и отображений. Киев: Наук. думка, 2011.
10. Пчелинцев В. А. К задаче о неналегающих областях // Сиб. мат. журн. 2012. Т. 53, № 6. С. 1391–1400.

11. Голубев В. В. Лекции по аналитической теории дифференциальных уравнений. М.; Л.: Гостехиздат, 1950.

Статья поступила 4 января 2015 г.

Пчелинцев Валерий Анатольевич
Томский политехнический университет,
физико-технический институт,
пр. Ленина, 30, Томск 634050
VPchelintsev@vtomske.ru

Пчелинцев Евгений Анатольевич,
Томский гос. университет,
механико-математический факультет,
пр. Ленина, 36, Томск 634050
evgen-pch@yandex.ru