УДК 519.812

С.А. Цой

ПРИМЕНЕНИЕ ХАРАКТЕРИСТИЧЕСКИХ ФУНКЦИЙ ДЛЯ АСИМПТОТИЧЕСКОГО ИССЛЕДОВАНИЯ СЕТЕЙ СВЯЗИ СО СТАТИЧЕСКИМИ ПРОТОКОЛАМИ СЛУЧАЙНОГО МНОЖЕСТВЕННОГО ДОСТУПА

Рассматриваются сети связи со статическими протоколами случайного множественного доступа, для исследования которых строится математическая модель в виде системы массового обслуживания. Исследование проводится методом асимптотического анализа с применением теории характеристических функций и матричного подхода, что позволяет в значительной степени сократить трудоемкость исследования и получить асимптотические результаты сразу для целого класса моделей.

Рассмотрим одноканальную сеть связи, управляемую статическим протоколом случайного множественного доступа, состоящую из абонентских станций и разделяемого ресурса, служащего для передачи данных.

В качестве модели рассмотрим систему массового обслуживания, на вход которой поступает простейший с параметром λ поток заявок. Продолжительность обслуживания и время оповещения о конфликте имеют экспоненциальное распределение с параметрами $\mu_1 = 1$ и μ_2. Интенсивность повторного обращения из источника повторных вызовов (ИПВ) составляет σi, где i – число заявок в ИПВ, а k – состояние прибора: 0 – свободен, 1 – занят обслуживанием, 2 – реализуется этап оповещения о конфликте. В этом случае процесс $\{k(t), i(t)\}$ является двумерной цепью Маркова, поэтому ее распределение $P(k,i,t) = P\{k(t)=k, i(t)=i\}$ удовлетворяет системе дифференциальных уравнений Колмогорова

$$\frac{\partial P_0(i,t)}{\partial t} = -(\lambda + i\sigma)P_0(i,t) + \mu_1 P_1(i,t) + \mu_2 P_2(i,t),$$
$$\frac{\partial P_1(i,t)}{\partial t} = -(\lambda + i\sigma + \mu_1)P_1(i,t) + \lambda P_0(i,t) + (i+1)\sigma P_0(i+1,t),$$
$$\frac{\partial P_2(i,t)}{\partial t} = -(\lambda + \mu_2)P_2(i,t) + \lambda P_2(i-1,t) + \lambda P_1(i-2,t) + (i-1)\sigma P_1(i-1,t). \quad (1)$$

Обозначим

$$H_k(u,t) = \sum_{i=0}^{\infty} e^{jui} P_k(i,t) = P\{k(t)=k\} M\left\{e^{jui(t)} \mid k(t)=k\right\},$$

тогда систему (1) можно переписать в виде

$$\frac{\partial H_0(u,t)}{\partial t} - j\sigma \frac{\partial H_0(u,t)}{\partial u} = -\lambda H_0(u,t) + \mu_1 H_1(u,t) + \mu_2 H_2(u,t),$$
$$\frac{\partial H_1(u,t)}{\partial t} + j\sigma e^{-ju} \frac{\partial H_0(u,t)}{\partial u} - j\sigma \frac{\partial H_1(u,t)}{\partial u} = \lambda H_0(u,t) - (\lambda + \mu_1)H_1(u,t),$$
$$\frac{\partial H_2(u,t)}{\partial t} + j\sigma e^{ju} \frac{\partial H_2(u,t)}{\partial u} = \lambda e^{2ju} H_1(u,t) + \left(\lambda\left(e^{ju} - 1\right) - \mu_2\right)P_2(u,t). \quad (2)$$

Для сокращения записи обозначим

$$H(u,t) = \{H_0(u,t), H_1(u,t), H_2(u,t)\}$$

и матрицы

$$A(y) = \begin{bmatrix} -1 & e^{-y} & 0 \\ 0 & -1 & e^{y} \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

$$B(y) = \begin{bmatrix} -\lambda & \lambda & 0 \\ \mu_1 & -(\lambda + \mu_1) & \lambda e^{2y} \\ \mu_2 & 0 & \lambda(e^{y} - 1) - \mu_2 \end{bmatrix}, \quad (3)$$

тогда систему (2) можно записать в виде

$$\frac{\partial H(u,t)}{\partial t} + j\sigma \frac{\partial H(u,t)}{\partial u} A(ju) = H(u,t)B(ju). \quad (4)$$

Отметим, что уравнение (4) будет иметь совершенно аналогичный вид для целого класса математических моделей сетей связи, управляемых статическими протоколами случайного множественного доступа, что позволяет исследовать их одним методом, который будет рассмотрен ниже.

Уравнение (4) будем решать методом асимптотического анализа в условиях большой задержки $\sigma \to 0$, когда среднее значение времени задержки требований в ИПВ неограниченно возрастает.

Асимптотика первого порядка

Для $H(u,t)$ выполним следующие замены:

$$\tau = \sigma t, \; u = \sigma v, \; H(u,t) = F_1(v, \tau, \sigma). \quad (5)$$

Тогда

$$F_1(v,\tau,\sigma) = H(u,t) = P\{k(t)=k\} M\left\{e^{jv\sigma i(\tau/\sigma)} / k(t)=k\right\}. \quad (6)$$

Пусть E – единичный вектор-столбец, тогда

$$F_1(v,\tau,\sigma)E = Me^{jv\sigma i(\tau/\sigma)}. \quad (7)$$

Теорема 1. Если при $s \to 0$ существует предел $\lim\limits_{\sigma\to 0} F_1(v,\tau,\sigma) = F_1(v,\tau)$, то

$$\lim_{\sigma\to 0} F_1(v,\tau,\sigma) = F_1(v,\tau) = Re^{jv\kappa_1(\tau)}, \qquad (8)$$

где вектор R определяется системой линейных алгебраических уравнений (16), а скалярная функция $k_1(\tau)$ является решением обыкновенного дифференциального уравнения (17).

Доказательство. В уравнении (4) выполним замены (5), получим

$$\sigma\frac{\partial F_1(v,\tau,\sigma)}{\partial\tau} + j\frac{\partial F_1(v,\tau,\sigma)}{\partial v}A(j\sigma v) = \\ = F_1(v,\tau,\sigma)B(j\sigma v). \qquad (9)$$

В этом уравнении перейдем к пределу и обозначим

$$\lim_{\sigma\to 0} F_1(v,\tau,\sigma) = F_1(v,\tau). \qquad (10)$$

При $\sigma \to 0$ уравнение (9) приобретет вид

$$j\frac{\partial F_1(v,\tau)}{\partial v}A(0) = F_1(v,\tau)B(0), \qquad (11)$$

решение $F_1(v,\tau)$ этого уравнения имеет вид

$$F_1(v,\tau) = Re^{jv\kappa_1(\tau)}, \qquad (12)$$

где R – вектор, а $k_1(\tau)$ – скалярная функция. В силу равенства (6) вектор R имеет смысл распределения вероятностей значений предельного процесса $k(\tau/\sigma)$ при $\sigma \to 0$. Найдем этот вектор, подставив (12) в (11), получим

$$jRj\kappa_1(\tau)A(0) = RB(0).$$

То есть вектор R является решением однородной системы линейных алгебраических уравнений

$$R\{B(0) + \kappa_1(\tau)A(0)\} = 0, \qquad (13)$$

он также удовлетворяет условию нормировки $RE = 1$.

Теперь найдем функцию $k_1(\tau)$. Для этого просуммируем по k все уравнения системы (9). Получим следующее равенство:

$$\sigma\frac{\partial F_1(v,\tau,\sigma)}{\partial\tau}E + j\frac{\partial F_1(v,\tau,\sigma)}{\partial v}A(j\sigma v)E = \\ = F_1(v,\tau,\sigma)B(j\sigma v)E. \qquad (14)$$

Используя разложения

$$A(j\sigma v) = A(0) + j\sigma vA'(0) + O(\sigma^2), \\ B(j\sigma v) = B(0) + j\sigma vB'(0) + O(\sigma^2),$$

а также свойства $A(0)E = 0$ и $B(0)E = 0$, равенство (14) перепишем в виде

$$\sigma\frac{\partial F_1(v,\tau,\sigma)}{\partial\tau}E + j\frac{\partial F_1(v,\tau,\sigma)}{\partial v}j\sigma vA'(0)E = \\ = F_1(v,\tau,\sigma)j\sigma vB'(0)E + O(\sigma^2),$$

откуда при $\sigma \to 0$ получим равенство

$$\frac{\partial F_1(v,\tau,\sigma)}{\partial\tau}E + j\frac{\partial F_1(v,\tau,\sigma)}{\partial v}jvA'(0)E = \\ = F_1(v,\tau,\sigma)jvB'(0)E,$$

подставив в которое (12), запишем уравнение для функций $k_1(\tau)$ в виде

$$jv\kappa_1'(\tau)RE - \kappa_1(\tau)jvRA'(0)E = jvRB'(0)E,$$

откуда получим, что функция $k_1(\tau)$ является решением обыкновенного дифференциального уравнения

$$\kappa_1'(\tau) = R(\kappa_1)\{B'(0) + \kappa_1 A'(0)\}. \qquad (15)$$

Обозначив матрицу $K(v,\kappa_1) = B(v) + \kappa_1 A(v)$, ее значение при $v = 0$ – $K(0,\kappa_1) = K(\kappa_1)$, значение ее производной по v в нуле

$$\left.\frac{\partial K(v,\kappa_1)}{\partial v}\right|_{v=0} = V(\kappa_1),$$

уравнения (13) и (15) запишем в виде

$$R(\kappa_1)K(\kappa_1) = 0, \qquad (16)$$

$$\kappa_1'(\tau) = R(\kappa_1)V(\kappa_1)E. \qquad (17)$$

Теорема доказана.

Следствие. Последовательность случайных процессов $\sigma i(\tau/\sigma)$ при $\sigma \to 0$ сходится по распределению к детерминированной функции $\kappa_1(\tau)$, т.е. имеет место предельное равенство

$$\lim_{\sigma\to 0}\sigma i(\tau/\sigma) = \kappa_1(\tau). \qquad (18)$$

Равенства (8) и (18) будем называть асимптотиками первого порядка.

Асимптотика второго порядка

Из равенства (8) имеем

$$F_1(v,\tau)E = e^{jv\kappa_1(\tau)} = e^{j\frac{u}{\sigma}\kappa_1(\sigma t)}.$$

Функцию $H(u,t)$ запишем в виде

$$H(u,t) = e^{j\frac{u}{\sigma}\kappa_1(\sigma t)}H_2(u,t), \qquad (19)$$

откуда следует, что

$$H_2(u,t) = H(u,t)e^{-j\frac{u}{\sigma}\kappa_1(\sigma t)} =$$
$$= P\{k(t)=k\}M\left\{\exp\left(ju\left(i(t)-\kappa_1(\sigma t)/\sigma\right)\right)/k(t)=k\right\},$$

следовательно

$$H_2(u,t)E = M\left\{\exp\left(ju\left(i(t)-\kappa_1(\sigma t)/\sigma\right)\right)\right\}, \qquad (20)$$

т.е. $H_2(u,t)E$ является безусловной характеристической функцией асимптотически центрированного случайного процесса $i(t)-\frac{1}{\sigma}\kappa_1(\sigma t)$. Подставляя (19) в (4), получим, что $H_2(u,t)$ удовлетворяет уравнению

$$\frac{\partial H_2(u,t)}{\partial t} + j\sigma\frac{\partial H_2(u,t)}{\partial u}A(ju) =$$
$$= H_2(u,t)\left\{B(ju)+\kappa_1(\sigma t)A(ju) - ju\kappa_1'(\sigma t)I\right\}, \qquad (21)$$

где I – диагональная единичная матрица.

Обозначив $\sigma = \varepsilon^2$, в уравнении (21) выполним замены

$$t\sigma = t\varepsilon^2 = \tau,\ u = \varepsilon v,\ H_2(u,t) = F_2(v,\tau,\varepsilon).$$

Для $F_2(v,\tau,\varepsilon)$ получим следующее уравнение:

$$\varepsilon^2\frac{\partial F_2(v,\tau,\varepsilon)}{\partial t} + j\varepsilon\frac{\partial F_2(v,\tau,\varepsilon)}{\partial u}A(j\varepsilon v) =$$
$$= F_2(v,\tau,\varepsilon)\left\{B(j\varepsilon v)+\kappa_1(\tau)A(j\varepsilon v) - j\varepsilon v\kappa_1'(\tau)I\right\}. \qquad (22)$$

Здесь для $F_2(v,\tau,\varepsilon)$ в силу (22) выполняется равенство

$$F_2(v,\tau,\varepsilon)E = M\left\{\exp\left(jv\varepsilon\left(i(\tau/\sigma)-\kappa_1(\sigma t)/\sigma\right)\right)\right\} =$$
$$= M\left\{\exp\left(jv\frac{\sigma i(\tau/\sigma)-\kappa_1(\tau)}{\sqrt{\sigma}}\right)\right\},$$

т.е. $F_2(v,\tau,\varepsilon)E$ является характеристической функцией случайного процесса

$$y(\tau,\varepsilon) = \frac{\sigma i(\tau/\sigma)-\kappa_1(\tau)}{\sqrt{\sigma}} = \frac{\varepsilon^2 i(\tau/\varepsilon^2)-\kappa_1(\tau)}{\varepsilon}.$$

Теорема 2. Если при $\varepsilon\to 0$ существует предел $\lim\limits_{\varepsilon\to 0}F_2(v,\tau,\varepsilon) = F_2(v,\tau)$, то

$$\lim_{\varepsilon\to 0}F_2(v,\tau,\varepsilon) = F_2(v,\tau) = Re^{\frac{(jv)^2}{2}\kappa_2(\tau)}, \qquad (23)$$

где функция $\kappa_2(\tau)$ является решением обыкновенного дифференциального уравнения (31).

Доказательство теоремы выполним в три этапа.

Этап 1. В уравнении (22) выполним предельный переход при $\varepsilon\to 0$, получим уравнение

$$F_2(v,\tau)\left\{B(0)+\kappa_1 A(0)\right\} = 0,$$

совпадающее с (13), поэтому его решение $F_2(v,\tau)$ запишем в виде

$$F_2(v,\tau) = \Phi_2(v,\tau)R,$$

где вектор R определен выше, а скалярная функция $\Phi_2(v,\tau)$ будет определена ниже.

Этап 2. Систему (22) перепишем следующим образом:

$$O(\varepsilon^2) + j\varepsilon\frac{\partial F_2(v,\tau,\varepsilon)}{\partial v}A(0) =$$
$$= F_2(v,\tau,\varepsilon)\left\{K(j\varepsilon v,\kappa_1) - j\varepsilon v\kappa_1'(\tau)I\right\} =$$
$$= F_2(v,\tau,\varepsilon)\left\{K(\kappa_1) + j\varepsilon v\left(V(\kappa_1)-\kappa_1'(\tau)I\right)\right\} + O(\varepsilon^2).$$

Решение $F_2(v,\tau,\varepsilon)$ этой системы будем искать в виде

$$F_2(v,\tau,\varepsilon) = \Phi_2(v,\tau)R + j\varepsilon f_2(v,\tau) + O(\varepsilon^2). \qquad (24)$$

Подставляя это разложение в предыдущее равенство, получим

$$j\varepsilon\frac{\partial \Phi_2(v,\tau)}{\partial v}RA(0) =$$
$$= \left\{\Phi_2(v,\tau)R + j\varepsilon f_2(v,\tau)\right\}\times$$
$$\times\left\{K(\kappa_1) + j\varepsilon v\left(V(\kappa_1)-\kappa_1'(\tau)I\right)\right\} + O(\varepsilon^2) =$$
$$= \Phi_2(v,\tau)RK(\kappa_1) + \Phi_2(v,\tau)Rj\varepsilon v\left(V(\kappa_1)-\kappa_1'(\tau)I\right) +$$
$$+ j\varepsilon f_2(v,\tau)K(\kappa_1) + O(\varepsilon^2).$$

Так как $RK(\kappa_1)=0$, то при $\varepsilon\to 0$ можно записать равенство

$$\frac{\partial \Phi_2(v,\tau)}{\partial v}RA(0) =$$
$$= v\Phi_2(v,\tau)R\left(V(\kappa_1)-\kappa_1'(\tau)I\right) + f_2(v,\tau)K(\kappa_1),$$

из которого получаем, что $f_2(v,\tau)$ имеет вид

$$f_2(v,\tau) = v\Phi_2(v,\tau)h_1 - \frac{\partial \Phi_2(v,t)}{\partial v}h_2, \qquad (25)$$

где векторы h_1 и h_2 определяются системами

$$h_1 K(\kappa_1) + R\left(V(\kappa_1)-\kappa_1'(\tau)I\right) = 0,$$
$$h_2 K(\kappa_1) + RA(0) = 0. \qquad (26)$$

Так как $K(\kappa_1) = B(0)+\kappa_1 A(0)$, то $A(0) = K'(\kappa_1)$, поэтому $h_2 = R'(\kappa_1)$, следовательно, (25) запишем в виде

$$f_2(v,\tau) = v\Phi_2(v,\tau)h_1 - \frac{\partial \Phi_2(v,t)}{\partial v}R'(\kappa_1).$$

Очевидно, что $R'(\kappa_1)E=0$, можно также полагать, что решение h_1 системы (26) удовлетворяет условию $h_1E=0$, поэтому (24) запишем в виде

$$F_2(v,\tau,\varepsilon)=\Phi_2(v,\tau)R+$$
$$+j\varepsilon\left\{v\Phi_2(v,\tau)h_1-\frac{\partial\Phi_2(v,t)}{\partial v}R'(\kappa_1)\right\}+O(\varepsilon^2). \quad (27)$$

Этап 3. Для нахождения функции $\Phi_2(v,\tau)$ просуммируем по k все уравнения системы (22), получим

$$\varepsilon^2\frac{\partial F_2(v,\tau,\varepsilon)}{\partial t}E+j\varepsilon\frac{\partial F_2(v,\tau,\varepsilon)}{\partial u}A(j\varepsilon v)E=$$
$$=F_2(v,\tau,\varepsilon)\{K(j\varepsilon v,\kappa_1)-j\varepsilon v\kappa_1'(\tau)I\}E. \quad (28)$$

Раскладывая в ряд матрицы

$$A(j\varepsilon v)=A(0)+j\varepsilon vA'(0)+O(\varepsilon^2),$$
$$K(jev,\kappa_1)=K(\kappa_1)+j\varepsilon vV(\kappa_1)+$$
$$+\frac{(j\varepsilon v)^2}{2}D(\kappa_1)+O(\varepsilon^2),$$

где матрица

$$D(\kappa_1)=\left.\frac{\partial^2K(v,\kappa_1)}{\partial v^2}\right|_{v=0},$$

уравнение (28) перепишем в виде

$$\varepsilon^2\frac{\partial F_2(v,\tau,\varepsilon)}{\partial t}E+j\varepsilon\frac{\partial F_2(v,\tau,\varepsilon)}{\partial u}\{A(0)+j\varepsilon vA'(0)\}E=$$
$$=F_2(v,\tau,\varepsilon)\times$$
$$\times\left\{K(\kappa_1)+j\varepsilon v\big(V(\kappa_1)-\kappa_1'(\tau)I\big)+\frac{(j\varepsilon v)^2}{2}D(\kappa_1)\right\}E+$$
$$+O(\varepsilon^3).$$

Так как $A(0)E=0$, $K(\kappa_1)E=0$, то последнее равенство имеет вид

$$\varepsilon^2\frac{\partial F_2(v,\tau,\varepsilon)}{\partial t}E+j\varepsilon\frac{\partial F_2(v,\tau,\varepsilon)}{\partial u}j\varepsilon vA'(0)E=$$
$$=F_2(v,\tau,\varepsilon)\left\{j\varepsilon v\big(V(\kappa_1)-\kappa_1'(\tau)I\big)+\frac{(j\varepsilon v)^2}{2}D(\kappa_1)\right\}E+$$
$$+O(\varepsilon^3).$$

Подставляя сюда разложение (27) и учитывая тот факт, что в силу (17) $R\{V(\kappa_1)-\kappa_1'(\tau)I\}E=0$ при $\varepsilon\to0$, получим следующее уравнение относительно функции $\Phi_2(v,\tau)$:

$$\frac{\partial\Phi_2(v,\tau)}{\partial\tau}=v\frac{\partial\Phi_2(v,\tau)}{\partial v}RA'(0)E-$$
$$-\frac{v^2}{2}\Phi_2(v,\tau)RD(\kappa_1)E+v\frac{\partial\Phi_2(v,\tau)}{\partial v}R'(\kappa_1)V(\kappa_1)E-$$
$$-v^2\Phi_2(v,\tau)h_1V(\kappa_1)E=$$
$$=v\frac{\partial\Phi_2(v,\tau)}{\partial v}\{RA'(0)E+R'(\kappa_1)V(\kappa_1)E\}-$$
$$-\frac{v^2}{2}\Phi_2(v,\tau)\{RD(\kappa_1)E+2h_1V(\kappa_1)E\}.$$

Так как $V(\kappa_1)=B'(0)+\kappa_1A'(0)$, то $A'(0)=V'(\kappa_1)$, следовательно,

$$RA'(0)E+R'(\kappa_1)V(\kappa_1)E=\{R(\kappa_1)V(\kappa_1)E\}',$$

поэтому функция $\Phi_2(v,\tau)$ является решением уравнения

$$\frac{\partial\Phi_2(v,\tau)}{\partial\tau}=v\frac{\partial\Phi_2(v,\tau)}{\partial v}\big(R(\kappa_1)V(\kappa_1)E\big)'-$$
$$-\frac{v^2}{2}\Phi_2(v,\tau)\{RD(\kappa_1)+2h_1V(\kappa_1)\}E \quad (29)$$

и поэтому имеет вид

$$\Phi_2(v,\tau)=e^{-\frac{v^2}{2}\kappa_2(\tau)}, \quad (30)$$

где, подставляя (30) в (29), получим, что функция $\kappa_2(\tau)$ является решением обыкновенного дифференциального уравнения

$$\kappa_2'(\tau)=2\kappa_2(\tau)\big(R(\kappa_1)V(\kappa_1)E\big)'+$$
$$+\{R(\kappa_1)D(\kappa_1)+2h_1(\kappa_1)V(\kappa_1)\}E, \quad (31)$$

где вектор $h_1(\kappa_1)$ является решением системы (26), удовлетворяющим условию $h_1E=0$, которую, принимая во внимание (17), запишем в виде

$$h_1(\kappa_1)K(\kappa_1)+R(\kappa_1)\{V(\kappa_1)-R(\kappa_1)V(\kappa_1)EI\}=0. \quad (32)$$

Теорема доказана.

Равенство (23) будем называть асимптотикой второго порядка. Очевидно, что функция $\Phi_2(v,\tau)$ является характеристической функцией предельного процесса $y(\tau)$ последовательностей $y(\tau,\varepsilon)$, где

$$y(\tau,\varepsilon)=\frac{\varepsilon^2i(\tau/\varepsilon^2)-\kappa_1(\tau)}{\varepsilon}. \quad (33)$$

Так как $\Phi_2(v,\tau)$, определяемая равенством (30), является характеристической функцией нормального распределения, то процесс $y(\tau)$ – Гауссовский. Выполним его исследования методами теории случайных процессов.

Диффузионная аппроксимация процесса изменения числа заявок в ИПВ. Локальная диффузионная аппроксимация

Очевидно из (33), имеет место равенство

$$\varepsilon^2 i(\tau/\varepsilon^2) = \kappa_1(\tau) + \varepsilon y(\tau) + O(\varepsilon^2), \tag{34}$$

которое будем называть локальной аппроксимацией процесса $i(t)$, так как процесс $y(\tau)$ определяет величину отклонения значений процесса $i(t)$ от значений асимптотического среднего $\kappa_1(\tau)$.

Теорема 3. Случайный процесс $y(\tau)$ является диффузионным процессом авторегрессии, удовлетворяющим стохастическому дифференциальному уравнению

$$dy(\tau) = \left(R(\kappa_1)V(\kappa_1)E\right)' y(\tau)d\tau + L(\kappa_1)dw(\tau), \tag{35}$$

где

$$L^2(\kappa_1) = R(\kappa_1)D(\kappa_1)E + 2h_1(\kappa_1)V(\kappa_1)E. \tag{36}$$

Доказательство. Уравнение (29) для характеристической функции $\Phi_2(v,\tau)$ запишем в виде

$$\frac{\partial\Phi_2(v,\tau)}{\partial\tau} = v\frac{\partial\Phi_2(v,\tau)}{\partial v}\left(R(\kappa_1)V(\kappa_1)E\right)' - \frac{v^2}{2}\Phi_2(v,\tau)L^2(\kappa_1), \tag{37}$$

где $L^2(\kappa_1)$ определяется равенством (36).

Обозначив обратное преобразование Фурье $\pi(y,\tau)$ от функции $\Phi_2(v,\tau)$

$$\pi(y,\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-jyv}\Phi_2(v,\tau)dv, \tag{38}$$

из уравнения (37) получим

$$\frac{\partial\pi(y,\tau)}{\partial\tau} = \left(R(\kappa_1)V(\kappa_1)E\right)'\int_{-\infty}^{\infty} e^{-jyv}v\frac{\partial\Phi_2(v,\tau)}{\partial v}dv - \frac{v^2}{2}L^2(\kappa_1)\int_{-\infty}^{\infty} e^{-jyv}v^2\Phi_2(v,\tau)dv. \tag{39}$$

Выразим интегралы через функцию $\pi(y,\tau)$ и ее производные. Из (38) получим

$$\frac{\partial^2\pi(y,\tau)}{\partial y^2} = \int_{-\infty}^{\infty}(-jv)^2 e^{-jyv}\Phi_2(v,\tau)dv = -\int_{-\infty}^{\infty} v^2 e^{-jyv}\Phi_2(v,\tau)dv. \tag{40}$$

Для первого интеграла из (39) получим

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-jyv}v\frac{\partial\Phi_2(v,\tau)}{\partial v}dv = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-jyv}v d\Phi_2(v,\tau) = -\int_{-\infty}^{\infty}\Phi_2(v,\tau)d\left(ve^{-jyv}\right) =$$
$$= -\int_{-\infty}^{\infty}\Phi_2(v,\tau)e^{-jyu}dv + jy\int_{-\infty}^{\infty}\Phi_2(v,\tau)ve^{-jyv}dv =$$
$$= -\int_{-\infty}^{\infty}\Phi_2(v,\tau)e^{-jyu}dv - y\frac{\partial}{\partial y}\left\{\int_{-\infty}^{\infty}\Phi_2(v,\tau)e^{-jyv}dv\right\} =$$
$$= -y\frac{\partial}{\partial y}\{y\pi(y,\tau)\}. \tag{41}$$

Подставляя (40) и (41) в (39), получим уравнение

$$\frac{\partial\pi(y,\tau)}{\partial\tau} = -\left(R(\kappa_1)V(\kappa_1)E\right)'\frac{\partial}{\partial y}\{y\pi(y,\tau)\} + \frac{1}{2}L^2(\kappa_1)\frac{\partial^2\pi(y,\tau)}{\partial y^2},$$

которое является уравнением Фоккера–Планка для плотности распределения вероятностей $\pi(y,\tau)$ диффузионного процесса авторегрессии $y(\tau)$, являющегося решением стохастического дифференциального уравнения (35). Теорема доказана.

Глобальная диффузионная аппроксимация

Принимая во внимание равенство (34), рассмотрим случайный процесс

$$z(\tau) = \kappa_1(\tau) + \varepsilon y(\tau). \tag{42}$$

Теорема 4. Случайный процесс $z(\tau)$ с точностью до $O(\varepsilon^2)$ является диффузионным, удовлетворяющим стохастическому дифференциальному уравнению

$$dz(\tau) = \left(R(z)V(z)E\right)d\tau + \varepsilon L(z)dw(\tau), \tag{43}$$

где $L(z)$ определено равенством (36).

Доказательство. Дифференцируя (42) получим:

$$dz(\tau) = \kappa_1'(\tau)d\tau + \varepsilon dy(\tau).$$

Подставляя сюда $\kappa_1(\tau)$ из (17), а $dy(\tau)$ из (35), получим

$$dz(\tau) = R(\kappa_1)V(\kappa_1)Ed\tau + \varepsilon\left\{\left(R(\kappa_1)V(\kappa_1)E\right)' y(\tau)d\tau + L(\kappa_1)dw(\tau)\right\} =$$
$$= \left\{R(\kappa_1)V(\kappa_1)E + \varepsilon y(\tau)\left(R(\kappa_1)V(\kappa_1)E\right)'\right\}d\tau + \varepsilon L(\kappa_1)dw(\tau). \tag{44}$$

Так как выражение в фигурных скобках является первыми двумя членами разложения для

$$R(z)V(z)E = R(\kappa_1 + \varepsilon y)V(\kappa_1 + \varepsilon y)E =$$
$$= R(\kappa_1)V(\kappa_1)E + \varepsilon y\big(R(\kappa_1)V(\kappa_1)E\big)' + O(\varepsilon^2),$$

а $L(\kappa_1)$ является первым членом разложения для

$$L(z) = L(\kappa_1 + \varepsilon y) = L(\kappa_1) + O(\varepsilon),$$

то (44) можно записать в виде

$$dz(\tau) = \big(R(z)V(z)E\big)d\tau + \varepsilon L(z)dw(\tau) + O(\varepsilon^2),$$

которое с точностью до $o(\varepsilon)$ совпадает с уравнением (43). Теорема доказана.

Из уравнения (43) нетрудно получить, что плотность $G(z,\tau)$ распределения вероятностей значений процесса $z(\tau)$ удовлетворяет уравнению Фоккера–Планка вида

$$\frac{\partial G(z,\tau)}{\partial \tau} = -\frac{\partial}{\partial z}\big\{\big(R(z)V(z)E\big)G(z,\tau)\big\} +$$
$$+\frac{\varepsilon^2}{2}\frac{\partial^2}{\partial z^2}\{L(z)G(z,\tau)\}.$$

Если для процесса $z(\tau)$ существует стационарный режим, то стационарное распределение $G(z,\tau) = G(z)$ удовлетворяет обыкновенному дифференциальному уравнению

$$\frac{\varepsilon^2}{2}\big(L(z)G(z)\big)'' - \big(R(z)V(z)EG(z)\big)' = 0, \qquad (45)$$

решение которого не представляет труда. Обозначив $L(z)G(z) = G_1(z)$ и проинтегрировав по z равенство (45), получим уравнение первого порядка

$$G_1'(z) = \frac{2}{\varepsilon^2}\frac{R(z)V(z)E}{L(z)}G_1(z),$$

решение $G_1(z)$ которого имеет вид

$$G_1(z) = C\exp\left\{\frac{2}{\varepsilon^2}\int_{-\infty}^{z}\frac{R(x)V(x)E}{L(x)}dx\right\},$$

откуда получим вид стационарной плотности распределения $G(z)$:

$$G(z) = \frac{C}{L(z)}\exp\left\{\frac{2}{\varepsilon^2}\int_{-\infty}^{z}\frac{R(x)V(x)E}{L(x)}dx\right\}, \qquad (46)$$

где константа C определяется условием нормировки

$$\int_{-\infty}^{\infty} G(z)dz = 1.$$

Таким образом, в (46) получена основная вероятностная характеристика рассматриваемых неустойчивой сети связи со статическими протоколами случайного множественного доступа, так как $G(z)$ является плотностью распределения вероятностей процесса $z(\tau)$, аппроксимирующего $\varepsilon^2 i(t/\varepsilon^2)$ – нормированное число заявок в ИПВ. Используя полученную характеристику, можно определить все интересующие нас основные вероятностно-временные характеристики.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Назаров А.А., Терпугов А.Ф.* Теория массового обслуживания: Учебное пособие. Томск: Изд-во НТЛ, 2004. 228 с.
2. *Назаров А.А., Цой С.А.* Общий подход к исследованию марковских моделей сетей передачи данных, управляемых статическими протоколами случайного множественного доступа // Автоматика и вычислительная техника. 2004. № 4. С. 73–85.
3. *Цой С.А.* Применение общего подхода к сравнению функционирования двухканальных сетей случайного множественного доступа // Вестник Томского государственного университета. Приложение. 2005. № 14. С. 271–274.
4. *Колоусов Д.В., Назаров А.А., Цой С.А.* Исследование вероятностно-временных характеристик бистабильных сетей случайного доступа // Автоматика и телемеханика. 2006. № 2. С. 90–105.

Статья представлена кафедрой теории вероятностей и математической статистики факультета прикладной математики и кибернетики Томского государственного университета, поступила в научную редакцию «Кибернетика» 30 мая 2006 г.