

УДК 521.1:523.44-325

А.П. БАТУРИН, И.А. ВОТЧЕЛЬ

ПРОГНОЗИРОВАНИЕ ДВИЖЕНИЯ АСТЕРОИДОВ С ИСПОЛЬЗОВАНИЕМ ПРИ УЧЕТЕ ВОЗМУЩЕНИЙ РАЗЛИЧНЫХ ПЛАНЕТНЫХ ЭФЕМЕРИД¹

Рассматривается вопрос о влиянии выбора эфемерид больших планет и Луны на результаты прогнозирования движения астероидов. Разработана программа прогнозирования движения, позволяющая использовать при учете возмущений эфемериды DE405, DE408, DE414, DE421, DE422, DE423, DE424, DE425, DE430, DE431, DE432 и EPM2011. Программа имеет удобный windows-интерфейс и предназначена для одновременного расчета двух траекторий с использованием различных эфемерид из приведенного списка. По окончании расчета автоматически выполняется сравнение полученных результатов в графическом виде. С помощью разработанной программы было выполнено прогнозирование движения астероида Апофис с использованием различных комбинаций указанных эфемерид и показано, что наибольшие различия в прогнозируемом движении проявляются при замене более старых эфемерид (DE405, DE408) более новыми (DE430, DE431, DE432), поэтому при учете планетных возмущений предпочтительнее использовать последние выпуски эфемерид.

Ключевые слова: DE405, DE408, DE414, DE421, DE422, DE423, DE424, DE425, DE430, DE431, DE432, EPM2011, Апофис.

В настоящее время прогнозирование движения космических объектов, и в частности астероидов, выполняется путем численного интегрирования их уравнений движения с использованием при учете возмущений каких-либо эфемерид больших планет и Луны. Среди таких эфемерид наиболее известными и часто используемыми являются эфемериды DE, выпускаемые Лабораторией реактивного движения (JPL) НАСА (<ftp://ssd.jpl.nasa.gov/pub/eph/planets>). В последние годы были разработаны также отечественные эфемериды EPM (<ftp://quasar.ipa.nw.ru/incoming/EPM>). Во всех современных эфемеридах информация о координатах больших планет и Луны хранится в сжатом виде с использованием интерполяционных полиномов Чебышева, причем различные эфемериды строятся по различным рядам наблюдений больших планет и Луны и потому отличаются друг от друга по точности. Для исследования влияния выбора эфемерид на результаты прогнозирования движения астероидов был разработан программный комплекс, позволяющий использовать при учете возмущений основные эфемериды, выпущенные к настоящему времени, а именно DE405, DE408, DE414, DE421, DE422, DE423, DE424, DE425, DE430, DE431, DE432 [1–4] и EPM2011 [5, 6]. Заметим, что в астрономической практике часто используются также эфемериды DE406, которые, однако, являются частью эфемерид DE408, охватывающих больший интервал времени, и поэтому отдельно здесь не рассматриваются. Разработанный программный комплекс предназначен для одновременного прогнозирования двух траекторий, имеющих различные или одинаковые начальные параметры движения, с использованием при учете возмущений разных эфемерид. В комплекс входит основная управляющая программа, разработанная в среде программирования Delphi 7.0, и набор запускаемых с ее помощью исполняемых файлов, полученных путем трансляции исходного фортран-кода разработанной ранее [7] программы прогнозирования движения астероидов. Каждый исполняемый файл соответствует выбранной пользователем разрядной сетке и разрядности операционной системы.

Окно основной программы приведено на рис. 1. В верхней строке задается начальная эпоха параметров движения, которые вводятся в расположенных ниже окнах и могут быть заданы как в виде прямоугольных координат и компонент скорости, отнесенных к экватору и равноденствию 2000.0, так и в виде оскулирующих элементов орбиты, отнесенных к эклиптике и равноденствию 2000.0. Кнопка «Копировать» позволяет скопировать содержимое левого окна в правое, однако для корректного использования каких-либо эфемерид необходимо, чтобы начальные параметры были предварительно улучшены с теми же эфемеридами, с которыми будет выполняться прогнозирование. Для этого может быть применена программа, описанная в [8] и предназначенная для улучшения орбит астероидов с использованием того же набора эфемерид, что и в настоящей работе.

¹ Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ в рамках научного проекта № 12-02-00220-а.

Прогнозирование движения с различными эфемеридами

Начальная эпоха: 2453600.5

Начальные данные 1		Начальные данные 2	
<input checked="" type="radio"/> Координаты (экваатор 2000.0)		<input checked="" type="radio"/> Координаты (экваатор 2000.0)	
<input type="radio"/> Элементы (эклиптика 2000.0)		<input type="radio"/> Элементы (эклиптика 2000.0)	
X (a)	6.487633300172062552348601979222974E-01	X (a)	6.487633304347884550828751683374406E-01
Y (e)	-3.507523244768737734111237775597981E-01	Y (e)	-3.507523237655708836682879694450655E-01
Z (i)	-1.138288393476925008899122661854957E-01	Z (i)	-1.138288398443708283729530014848669E-01
X' (Omega)	1.070573566451513615418753888266869E-02	X' (Omega)	1.070573564744385016191114826785947E-02
Y' (omega)	1.763374329295573095180564413082082E-02	Y' (omega)	1.763374330295496649143952931501366E-02
Z' (M)	6.835292733747310150209113126893539E-03	Z' (M)	6.835292726736910003852586232550273E-03

Интервал прогнозирования, сут: Копировать

Интервал выдачи, сут: Порядок: LL: Начальный шаг, сут:

Выбор первой эфемериды	Выбор второй эфемериды
<input type="radio"/> DE405 (2305424.5-2524624.5)	<input type="radio"/> DE405 (2305424.5-2524624.5)
<input type="radio"/> DE408 (-1938159.5-5376912.5)	<input type="radio"/> DE408 (-1938159.5-5376912.5)
<input type="radio"/> DE414 (2305424.5-2524624.5)	<input type="radio"/> DE414 (2305424.5-2524624.5)
<input type="radio"/> DE421 (2414992.5-2469808.5)	<input type="radio"/> DE421 (2414992.5-2469808.5)
<input type="radio"/> DE422 (625648.5-2816816.5)	<input type="radio"/> DE422 (625648.5-2816816.5)
<input type="radio"/> DE423 (2378480.5-2524624.5) <input checked="" type="checkbox"/> сгл.	<input type="radio"/> DE423 (2378480.5-2524624.5) <input checked="" type="checkbox"/> сгл.
<input type="radio"/> DE424 (625296.5-2780272.5)	<input type="radio"/> DE424 (625296.5-2780272.5) <input checked="" type="checkbox"/> сгл.
<input type="radio"/> DE425 (2305424.5-2524624.5)	<input type="radio"/> DE425 (2305424.5-2524624.5)
<input type="radio"/> DE430 (2287184.5-2688976.5)	<input type="radio"/> DE430 (2287184.5-2688976.5)
<input type="radio"/> DE431 (-3100015.5-7999984.5)	<input type="radio"/> DE431 (-3100015.5-7999984.5)
<input checked="" type="radio"/> DE432 (2287184.5-2688976.5)	<input checked="" type="radio"/> DE432 (2287184.5-2688976.5)
<input type="radio"/> EPM2011 (2374000.5-253000.5)	<input checked="" type="radio"/> EPM2011 (2374000.5-253000.5)

Корректировка шага Корректировка шага

Разрядная сетка, бит	Разрядность ОС, бит	<input type="button" value="Пуск"/> <input type="button" value="График"/>
<input type="radio"/> 64	<input type="radio"/> 32	
<input type="radio"/> 80	<input checked="" type="radio"/> 64	
<input checked="" type="radio"/> 128		

Рис. 1. Окно основной программы разработанного программного комплекса

Далее задаются интервал прогнозирования, шаг выдачи координат в сутках, а также параметры подпрограммы численного интегрирования методом Эверхарта [9,10]: порядок метода (7, 11, 15, 19, 23, 27, 31, 35, 39), параметр LL, определяющий допустимую локальную погрешность 10^{-LL} при выборе переменного шага (задание отрицательного значения LL устанавливает постоянный шаг интегрирования, равный начальному) и начальный шаг интегрирования.

Ниже расположены панели выбора эфемерид для первой и второй траектории (в скобках для каждой эфемериды указан охватываемый ею интервал времени в виде пары юлианских дат), а также переключатели «сгл.», позволяющие вместо исходных эфемерид использовать их сглаженные [11–15] (до первых производных) варианты. Далее для каждой траектории расположены переключатели, позволяющие использовать корректировку [12–15] шага интегрирования в соответствии с границами эфемеридных интервалов интерполирования. Как показано в работах [11–15], использование сглаженных эфемерид позволяет повысить точность численного интегрирования при расчетах на расширенной разрядной сетке (80 или 128 бит), так как в сглаженных вариантах эфемерид устранены скачки координат и их первых производных на границах эфемеридных интервалов интерполирования. Использование корректировки шага также повышает [12–15] точность численного интегрирования, поскольку устраняет влияние скачков производных высшего порядка от координат возмущающих тел, имеющих место на указанных границах.

Внизу формы находятся: переключатель разрядной сетки, задающий размер чисел с плавающей точкой (64, 80 или 128 бит), используемых при выполнении вычислений; переключатель разрядности операционной системы (32 или 64 бита), предусмотренный для возможности использования в 64-разрядной операционной системе 64-разрядного исполняемого кода, который работает значительно быстрее 32-разрядного в случае 80- или 128-битовой разрядной сетки; кнопка «Пуск», запускающая процесс прогнозирования, и кнопка «График», открывающая окно с графиком вычисленных модулей разности векторов положения и скорости.

При нажатии кнопки «Пуск» запускается соответствующий исполняемый файл и открывается консольное окно (рис. 2) с информацией о текущем состоянии процесса прогнозирования: номере прогнозируемой траектории (крайняя слева цифра 1 или 2) и текущем моменте прогнозирования для данной траектории. При успешном выполнении вычислений в этом окне появляется информация о времени счета в секундах (Count time) и текст «Calculation complete. Press Enter to close», предлагающий нажать клавишу «Enter» для закрытия окна.

```

D:\USERS\BAT\2014Papers\Difeph\Program\progn\progn128_64.exe
2  t= 19120.0000000000000000000000000000
2  t= 19160.0000000000000000000000000000
2  t= 19200.0000000000000000000000000000
2  t= 19240.0000000000000000000000000000
2  t= 19280.0000000000000000000000000000
2  t= 19320.0000000000000000000000000000
2  t= 19360.0000000000000000000000000000
2  t= 19400.0000000000000000000000000000
2  t= 19440.0000000000000000000000000000
2  t= 19480.0000000000000000000000000000
2  t= 19520.0000000000000000000000000000
2  t= 19560.0000000000000000000000000000
2  t= 19600.0000000000000000000000000000
2  t= 19640.0000000000000000000000000000
2  t= 19680.0000000000000000000000000000
2  t= 19720.0000000000000000000000000000
2  t= 19760.0000000000000000000000000000
2  t= 19800.0000000000000000000000000000
2  t= 19840.0000000000000000000000000000
2  t= 19880.0000000000000000000000000000
2  t= 19920.0000000000000000000000000000
2  t= 19960.0000000000000000000000000000
Count time (sec): 124.34
Calculation complete. Press Enter to close
    
```

Рис. 2. Окно текущего состояния процесса прогнозирования

Результаты вычислений записываются в три файла: progn1.out, progn2.out и dif.out, расположенные в той же папке, что и основная программа. В файлы progn1.out и progn2.out выдаются прямоугольные координаты и скорости через заданный интервал выдачи для первой и второй траектории соответственно, а в файл dif.out их модули разности в векторе положения Δr (а.е.) и скорости Δv (а.е./сут). При нажатии кнопки «График» открывается окно (рис. 3) с графиками Δr и Δv , построенными по данным, записанным в файл dif.out. Этот текстовый файл может быть использован и для независимого построения графиков с помощью любой внешней графической программы (например, программы Grapher).

Заметим, что каждые эфемериды имеют свой набор связанных с ними констант, таких, например, как значения планетных масс и астрономической единицы. Все эти константы, как правило, приводятся в файлах описания эфемерид, а также присутствуют в заголовочной части файлов самих эфемерид. В разработанном программном комплексе, как и в программе, описанной в работе [8], это различие учитывается, и каждые эфемериды используются вместе с соответствующим им набором констант.

С помощью описанного программного комплекса было выполнено прогнозирование движения астероида Апофис на интервал времени в 20 000 сут (около 55 лет) с использованием различных эфемерид и последующим сравнением результатов. В случае использования эфемерид DE421 прогнозирование выполнялось только на 16 000 сут, поскольку конечной датой этих эфемерид является 2050 г., а эпоха начальных параметров движения астероида находится в 2005 г. Выбранный астероид интересен тем, что имеет в будущем (13 апреля 2029 г.) очень тесное сближение с Землей (0.00026 а.е.), что делает его удобным с точки зрения исследования влияния выбора эфемерид на результаты прогнозируемого движения. С одной стороны, до тесного сближения движение этого астероида мало отличается от движения других околоземных объектов, не имеющих тесных сближений, поэтому возмущения в его движении имеют типичную для такого случая величину. С другой стороны, тесное сближение приводит к резкому скачку ошибок прогнозируемого движения, что позволяет исследовать влияние выбора эфемерид на результаты прогнозирования при наличии тесных сближений с планетами.

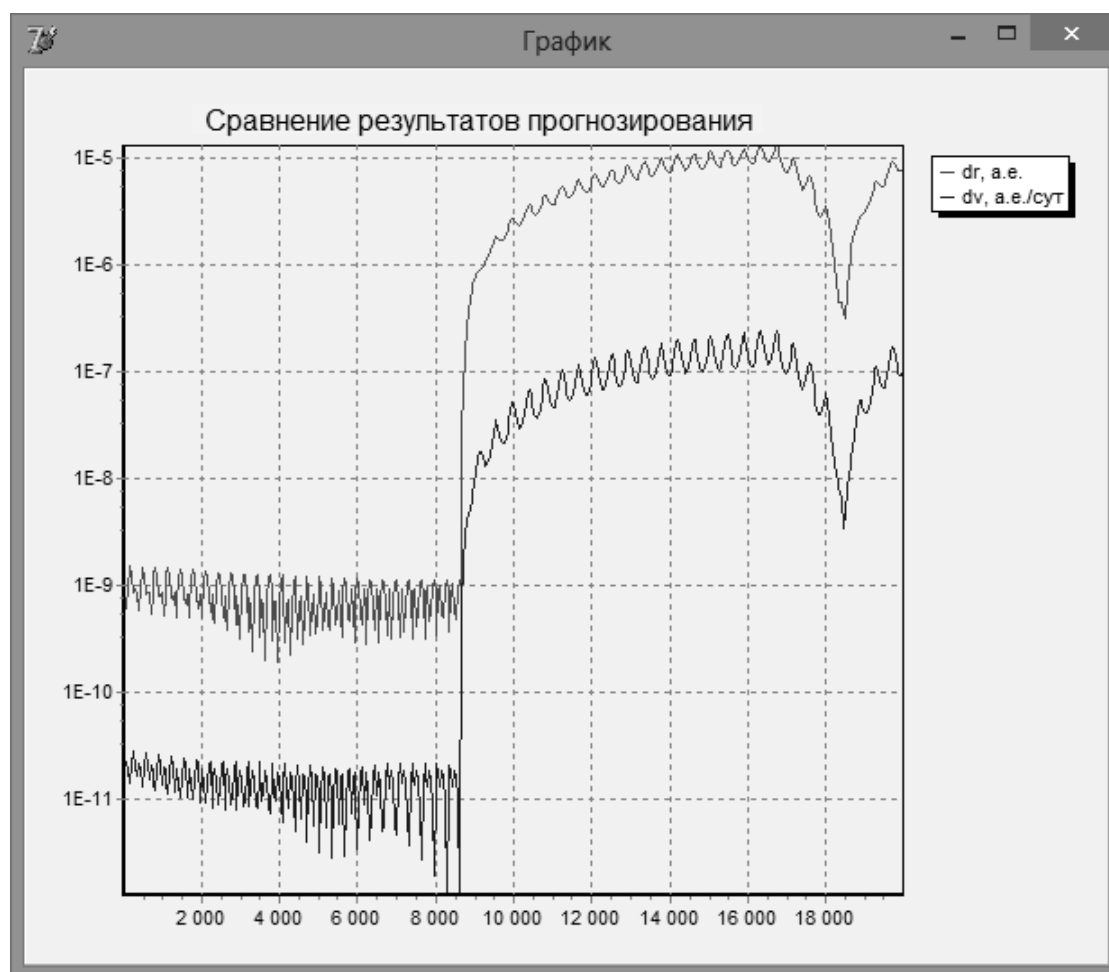


Рис. 3. Окно с графиком модулей разности в векторе положения и скорости

Предварительно для астероида Апофис был выполнен ряд улучшений орбиты с использованием всех рассматриваемых эфемерид, для чего была применена программа, описанная в [8]. Улучшение орбиты выполнялось на 128-битовой разрядной сетке по данным его 4162 астрометрических и 7 радарных наблюдений (2 временных задержек сигнала и 5 доплеровских). Наблюдения были взяты с сайта <http://minorplanetcenter.net> и охватывают около 10 лет (15.03.2004 – 26.02.2014). В результате улучшения орбиты получены следующие среднеквадратические ошибки представления наблюдений (совпадающие до трех значащих цифр при всех используемых эфемеридах): астрометрических – 0.403", временных задержек – 5.72 мкс и доплеровских – 1.05 Гц.

Улучшенные начальные параметры движения были использованы далее при прогнозировании движения с соответствующими им эфемеридами, которое выполнялось на 128-битовой разрядной сетке, причем для метода Эверхарта был задан 31 порядок с параметром LL равным 20. С целью сведения к минимуму ошибок численного интегрирования при прогнозировании были использованы сглаженные варианты эфемерид и корректировка шага интегрирования в соответствии с границами эфемеридных интервалов интерполирования. По результатам прогнозирования были построены графики модулей разности векторов положения, полученных с использованием некоторых эфемерид. На рис. 4 приведены графики в случае использования эфемерид DE405 для одной из траекторий и всех остальных – для другой, на рис. 5 – аналогичные графики в случае использования для одной из траекторий эфемерид DE432 и на рис. 6 – эфемерид EPM2011.

Как видно из рис. 4–6, различия в прогнозируемом движении имеют резкий скачок, соответствующий тесному сближению с Землей в 2029 г. Если до тесного сближения различия в векторе положения Δr , возникающие за счет замены одних эфемерид другими, не превышают 10^{-8} а.е., то после него они резко возрастают на несколько порядков, достигая в некоторых случаях значений, больших чем 10^{-4} а.е.

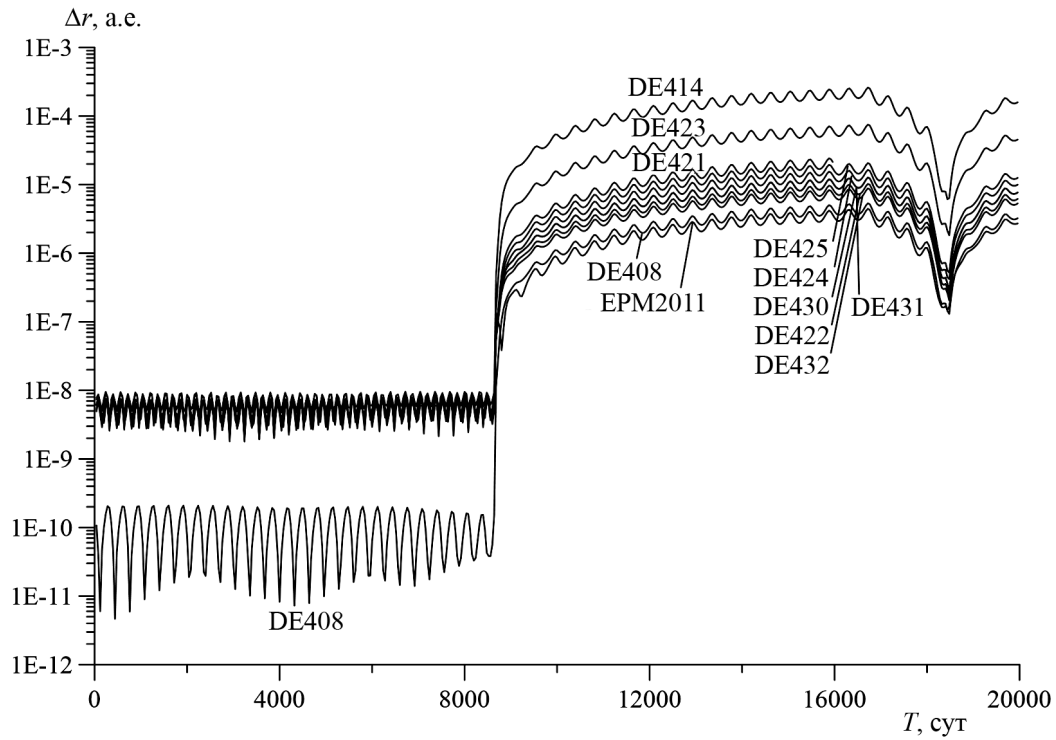


Рис. 4. Сравнение результатов прогнозирования, полученных с использованием эфемерид DE405 и всех остальных эфемерид

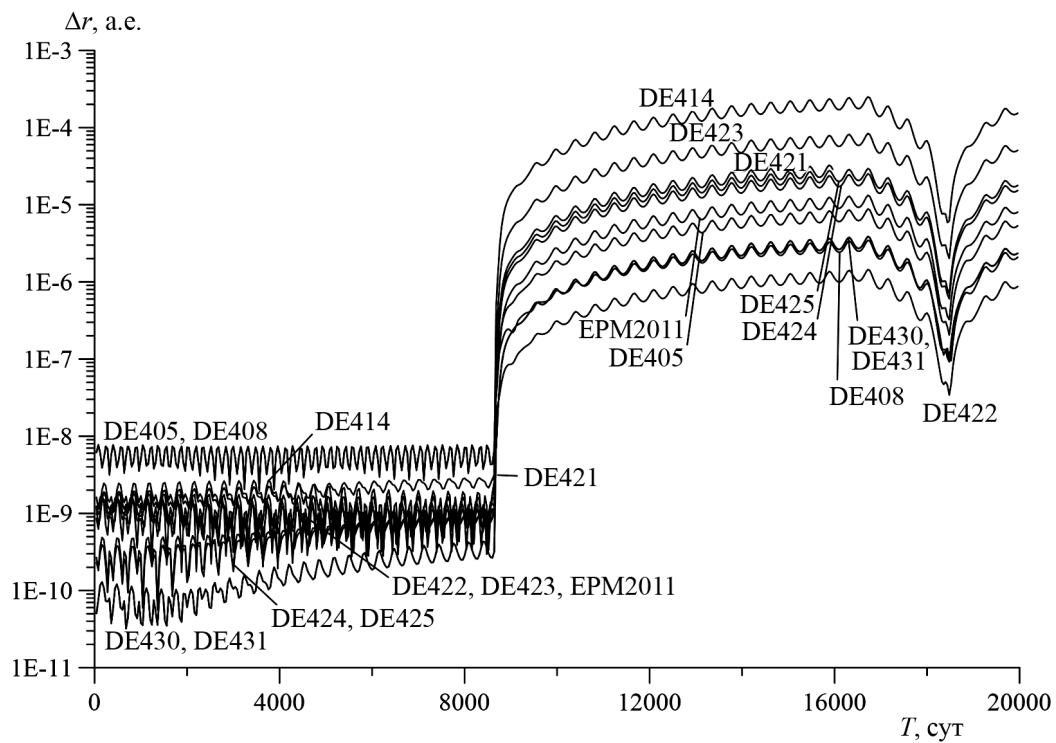


Рис. 5. Сравнение результатов прогнозирования, полученных с использованием эфемерид DE432 и всех остальных эфемерид

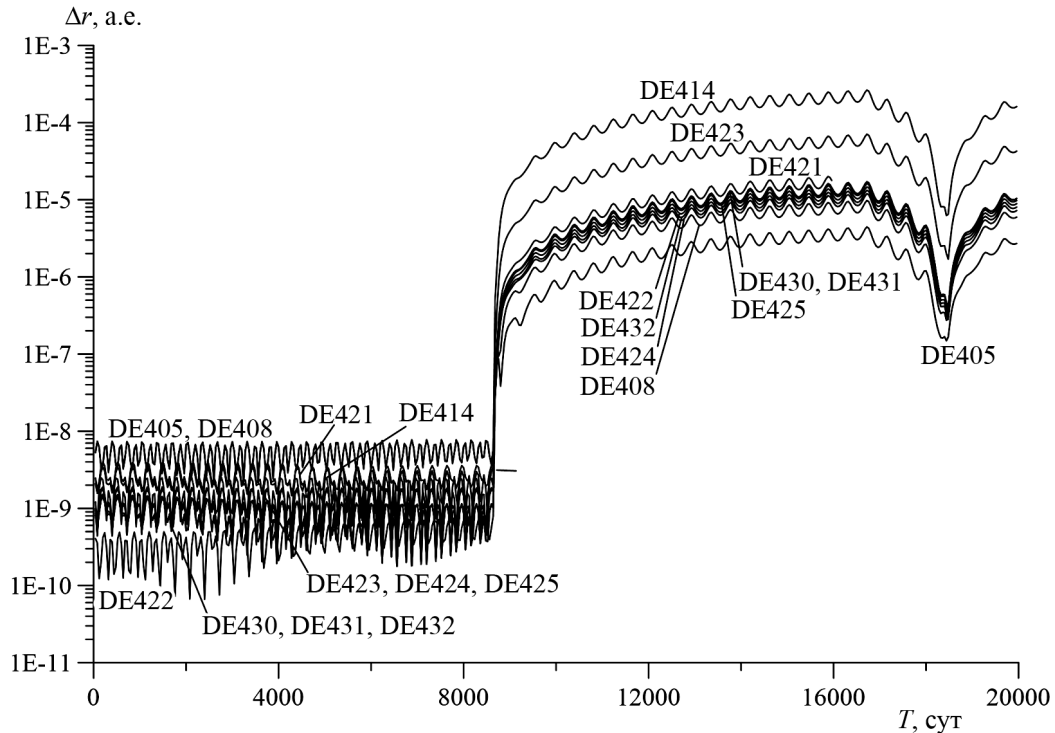


Рис. 6. Сравнение результатов прогнозирования, полученных с использованием эфемерид EPM2011 и всех остальных эфемерид

Кроме того, из рис. 4 видно, что результаты, полученные с эфемеридами DE405, заметно отличаются от всех остальных результатов, за исключением полученных с DE408. Об этом говорят примерно одинаковые значения Δr до тесного сближения (немного меньше 10^{-8} а.е.) для всех эфемерид, кроме DE408, для которых они значительно меньше и составляют около 10^{-11} – 10^{-10} а.е. Последний результат очевиден, так как DE405 и DE408 фактически являются одними и теми же эфемеридами, различающимися лишь величиной охватываемого интервала времени и длиной интервалов интерполирования. Что касается больших отличий результатов прогнозирования, получаемых с эфемеридами DE405, от остальных результатов, то они объясняются, по-видимому, тем, что DE405 являются наиболее старыми эфемеридами из всех рассматриваемых и потому наименее точными. Это подтверждается и результатами, приведенными на рис. 5 и 6, где видно, что практически совпадающие кривые, соответствующие эфемеридам DE405 и DE408, до тесного сближения расположены выше всех остальных кривых и, так же, как на рис. 4, вблизи значения $\Delta r = 10^{-8}$ а.е.

Анализируя рис. 5 и 6, можно видеть, что результаты, полученные с использованием более поздних по сравнению с DE405 и DE408 эфемерид, до тесного сближения отличаются от результатов, полученных с использованием эфемерид DE432 и EPM2011, не более чем на $4 \cdot 10^{-9}$ а.е. Наибольшие различия этих результатов имеют место, как и следовало ожидать, для более старых эфемерид DE414 и DE421. В случае использования более поздних по сравнению с DE414 и DE421 эфемерид различия не превышают $2 \cdot 10^{-9}$ а.е.

Наименьшие различия до тесного сближения имеют результаты, полученные с использованием эфемерид DE430, DE431 и DE432 (не более $3 \cdot 10^{-10}$ а.е. – рис. 5), а также эфемерид DE422 и EPM2011 (не более $5 \cdot 10^{-10}$ а.е. – рис. 6). Не очень большие различия имеют также результаты, полученные с использованием эфемерид DE424, DE425 и DE432 (не более $6 \cdot 10^{-10}$ а.е. – рис. 5), причем кривые для DE424 и DE425 практически совпадают, что говорит о близости этих эфемерид. Такое же совпадение на рис. 4–6 имеет место и для кривых, соответствующих эфемеридам DE430 и DE431, поскольку данные эфемериды также очень близки друг к другу.

Что касается расположения кривых на рис. 4–6 после тесного сближения, то можно видеть, что оно сильно изменяется, однако некоторые его черты сохраняются и в этом случае. Так, например, сохраняется близость кривых для DE424 и DE425, а также практически полное совпадение кривых для DE430 и DE431. Расположение же остальных кривых по отношению друг к другу значительно изменяется, если сравнивать его с их расположением до тесного сближения. Такой ре-

зультат вполне ожидаем, поскольку тесное сближение приводит к скачкообразному росту хаотичности движения. Однако и после тесного сближения есть некоторые особенности расположения кривых, общие для рис. 4–6. Так, кривые для DE414 и DE423 лежат выше всех остальных кривых, демонстрируя для данных эфемерид наибольшие различия с результатами, полученными с эфемеридами DE405, DE432 и EPM2011. В случае эфемерид DE414 эти различия превышают 10^{-4} а.е., в случае эфемерид DE423 – $5 \cdot 10^{-5}$ а.е., в то время как для остальных эфемерид они составляют примерно от 10^{-6} до $2 \cdot 10^{-5}$ а.е.

В результате проведенного исследования можно сделать вывод, что при учете возмущений от больших планет и Луны предпочтительнее использовать их последние выпущенные эфемериды, поскольку их взаимная замена приводит к меньшим различиям в прогнозируемом движении, чем замена ими более старых эфемерид, таких, как DE405, DE408, DE414, DE423. Последними эфемеридами на момент данной публикации являются DE430, DE431 и DE432.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Standish E.M. JPL planetary and lunar ephemerides DE405/LE405, JPL Interoffice Memorandum, Pasadena. – 1998. – V. 312.F-98-048. – 18 p.
2. Folkner W.M., Williams J.G., and Boggs D.H. The Planetary and Lunar Ephemeris DE421, JPL Interoffice Memorandum, Pasadena. – 2008. – V. 343R-08-003. – 31 p.
3. Folkner W.M. et al. The Planetary and Lunar Ephemeris DE430 and DE431, IPN Progress Report 2-196. – February 15. – 2014. – 81 p.
4. Folkner W.M. Planetary ephemeris DE432, JPL Interoffice Memorandum, Pasadena. – 2014. – V. 392R-14-003. – 11 p.
5. Pitjeva E.V. // Solar System Research. – 2013. – V. 47. – Iss. 5. – P. 386–402.
6. Питьева Е.В. // Астрономический вестник. – 2005. – Т. 39. – № 3. – С. 202–213.
7. Батурин А.П. // Изв. вузов. Физика. – 2010. – Т. 53. – № 8/2. – С. 39–46.
8. Батурин А.П., Кинзерский В.В. // Изв. вузов. Физика. – 2014. – Т. 57. – № 10/2. – С. 67–75.
9. Бордовицына Т.В. Современные численные методы в задачах небесной механики. – М.: Наука, 1984. – 136 с.
10. Авдюшев В.А. // Вычислительные технологии. – 2010. – Т. 15. – № 4. – С. 31–46.
11. Батурин А.П. // Изв. вузов. Физика. – 2011. – Т. 54. – № 6/2. – С. 93–102.
12. Батурин А.П. // Изв. вузов. Физика. – 2012. – Т. 55. – № 10/2. – С. 82–88.
13. Батурин А.П., Вотчель И.А. // Изв. вузов. Физика. – 2013. – Т. 56. – № 6/3. – С. 188–190.
14. Батурин А.П., Вотчель И.А. // Изв. вузов. Физика. – 2013. – Т. 56. – № 10/2. – С. 113–118.
15. Батурин А.П. // Изв. вузов. Физика. – 2014. – Т. 57. – № 9. – С. 72–79.

Национальный исследовательский
Томский государственный университет, г. Томск, Россия
E-mail: alexbaturin@sibmail.com

Поступила в редакцию 25.09.14.

Батурин Алексей Павлович, к.ф.-м.н., ст. науч. сотр. НИИ ПММ ТГУ;
Вотчель Иван Александрович, студент.

A.P. BATURIN, I.A. VOTCHEL

THE ASTEROID MOTION SIMULATION CALCULATING THE PERTUBATIONS WITH DIFFERENT PLANETS' EPHEMERIDES

Tomsk State University, Tomsk, Russia

The influence of major planets and the Moon's ephemerides used on the results of asteroid motion simulation has been considered. The computer program of asteroid motion simulation has been developed. The program allows to calculate perturbations from planets and the Moon using their ephemerides DE405, DE408, DE414, DE421, DE422, DE423, DE424, DE425, DE430, DE431, DE432 and EPM2011. The program has convenient windows-interface and is designed for the synchronous simulation of two asteroid orbits using different ephemerides from the list above for each of them. At the end of calculations the graphical comparison of obtained results is automatically produced. The developed program has been applied for the simulation of the motion of the asteroid Apophis using different combinations of these ephemerides. It has been demonstrated that the most differences of the simulated motion are in the cases of replacement of the older ephemerides (DE405, DE408) with the newest ones (DE430, DE431, DE432). So it is preferable to calculate the planet perturbations with the most modern ephemerides of major planets and the Moon.

Keywords: DE405, DE408, DE414, DE421, DE422, DE423, DE424, DE425, DE430, DE431, DE432, EPM2011, Apophis.

REFERENCES

1. Standish E.M. JPL planetary and lunar ephemerides DE405/LE405, JPL Interoffice Memorandum, Pasadena, 1998, vol. 312.F-98-048, 18 p.
2. Folkner W.M., Williams J.G., and Boggs D.H. The Planetary and Lunar Ephemeris DE421, JPL Interoffice Memorandum, Pasadena, 2008, vol. 343R-08-003, 31 p.
3. Folkner W.M. et al. The Planetary and Lunar Ephemeris DE430 and DE431, IPN Progress Report 2-196, February 15, 2014, 81 p.
4. Folkner W.M. Planetary ephemeris DE432, JPL Interoffice Memorandum, Pasadena, 2014, vol. 392R-14-003, 11 p.
5. Pitjeva E.V. *Solar System Research*, 2013, vol. 47, iss. 5, pp. 386–402.
6. Pitjeva E.V. *Solar System Research*, 200, vol. 39, Iss. 3, pp. 176–186.
7. Baturin A.P. *Izv. Vyssh. Uchebn. Zaved. Fiz.*, 2010, vol. 53, no. 8/2, pp. 39–46.
8. Baturin A.P. and Kinzersky V.V. *Vyssh. Uchebn. Zaved. Fiz.*, 2014, vol. 57, no. 10/2, pp. 67–75.
9. Bordovitsyna T.V. *Currently Used Numerical Methods in Celestial Mechanics*. Moscow, Izdatel'stvo Nauka, 1984, 136 p.
10. Avdyushev V.A. *Computational Technologies*, 2010, vol. 15, no. 4, pp 31–46.
11. Baturin A.P. *Izv. Vyssh. Uchebn. Zaved. Fiz.*, 2011, vol. 54, no. 6/2, pp. 93–102.
12. Baturin A.P. *Izv. Vyssh. Uchebn. Zaved. Fiz.* – 2012, vol. 55, no. 10/2, pp 82–88.
13. Baturin A.P. and Votchel I.A. *Izv. Vyssh. Uchebn. Zaved. Fiz.*, 2013, vol. 56, no. 6/3, pp. 188–190.
14. Baturin A.P. and Votchel I.A. *Izv. Vyssh. Uchebn. Zaved. Fiz.*, 2013, vol. 56, no. 10/2, pp. 113–118.
15. Baturin A.P. *Izv. Vyssh. Uchebn. Zaved. Fiz.*, 2014, vol. 57, no. 9, pp. 72–79.