МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ РФ
РОССИЙСКИЙ ФОНД ФУНДАМЕНТАЛЬНЫХ ИССЛЕДОВАНИЙ
НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ ТОМСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
НИИ ПРИКЛАДНОЙ МАТЕМАТИКИ И МЕХАНИКИ ТОМСКОГО УНИВЕРСИТЕТА
ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ФАКУЛЬТЕТ
МЕХАНИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИЙ ФАКУЛЬТЕТ
СОВЕТ МОЛОДЫХ УЧЁНЫХ ТГУ

Актуальные проблемы современной механики сплошных сред и небесной механики

Международная молодежная научная конференция

17–19 ноября 2014 г., Томск

Издательство Томского университета
2015

ОСОБЕННОСТИ ИСПОЛЬЗОВАНИЯ МЕТОДА ПРОСТОЙ ИТЕРАЦИИ ДЛЯ РЕШЕНИЯ СИСТЕМЫ НЕЛИНЕЙНЫХ АЛГЕБРАИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ ПРИ МОДЕЛИРОВАНИИ ТЕЧЕНИЙ СТЕПЕННОЙ ЖИДКОСТИ НЕПРЯМЫМ МЕТОДОМ ГРАНИЧНЫХ ЭЛЕМЕНТОВ

М.А. Пономарева, М.П. Филина, В.А. Якутенок

Рассматриваются особенности использования метода простой итерации для решения системы нелинейных алгебраических уравнений при реализации непрямого метода граничных элементов для моделирования двумерных ползущих течений неньютоновской жидкости. Показано, что в случае течения степенной жидкости необходимо использование процедуры релаксации при малых значениях показателя нелинейности.

AN EFFECTIVE SIMPLE ITERATION SCHEME OF NONLINEAR ALGEBRAIC EQUATIONS SYSTEM SOLVING FOR POWER LAW FLUID FLOW SIMULATION BY INDIRECT BOUNDARY ELEMENT METHOD

M.A. Ponomareva, M.P. Filina, V.A. Yakutenok

An effective iterative scheme for a nonlinear system of algebraic equations solving is considered in the case of numerical simulation of plane Stokes flows of a non-Newtonian fluid by the indirect boundary element method. It is shown that in the case of power-law fluid flow using of a relaxation procedure is necessary at small values of a power-law index.

Численно решается задача об установившемся течении степенной жидкости в плоском канале с известным аналитическим решением. Задача формулируется в безразмерных переменных. Математическая постановка включает систему уравнений Стокса и уравнение неразрывности:

$$\frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_j} = 0,\ i, j = 1, 2,$$

$$\frac{\partial u_i}{\partial x_i} = 0,$$

где $\sigma_{ij} = -p\delta_{ij} + \tau_{ij}$ – компоненты тензора напряжений, p – давление, δ_{ij} – символ Кронекера, а компоненты тензора вязких напряжений определяются выражением

$$\tau_{ij} = 2k\dot{\gamma}^{n-1}\dot{e}_{ij},$$

где k – коэффициент консистенции, n – показатель нелинейности, $\dot{e}_{ij}$ – компоненты тензора скоростей деформаций. В качестве характерного размера длины выбрана ширина канала L, скорости – средняя скорость U, характерный масштаб давления – $k(U/L)^n$.

На входной границе заданы компоненты вектора скорости в соответствии с аналитическим решением для степенного закона:

$$u_1(x_1) = 0,\ \ u_2(x_1) = \frac{2n+1}{n+1}\left(1 - \left|2x_1\right|^{\frac{n+1}{2}}\right), \quad -0,5 < x_1 < 0,5,\ x_2 = 0.$$

На твердых стенках заданы условия прилипания:

$$u_i(x_2) = 0, \quad x_1 = -0,5,\, x_1 = 0,5.$$

На выходной границе заданы значения компонент линейной части вектора усилий:

$$t_1^N(x_1) = \sigma_{12}^N = 2\dot{e}_{12} = \frac{\partial u_2}{\partial x_1} = -\frac{2n+1}{n}\left(2|x_1|\right)^{\frac{1}{n}}\frac{x_1}{|x_1|}, \quad -0,5 < x_1 < 0,5,\, x_2 = 0,$$

$$t_2^N(x_1) = \sigma_{22}^N = -p + 2\frac{\partial u_2}{\partial x_2} = 0, \quad -0,5 < x_1 < 0,5,\, x_2 = 0,$$

где σ_{ij}^N – линейная часть тензора напряжений.

В результате решения поставленной краевой задачи со смешанными краевыми условиями на выходной границе должен получаться профиль скорости, близкий к аналитическому.

В соответствии с основными принципами непрямого метода граничных элементов вместо исходной системы дифференциальных уравнений решается эквивалентная система гранично-интегральных уравнений, которая включает интегралы по границе области решения от фундаментальных сингулярных решений – стокслетов и фиктивных источников, распределенных по границе области. В случае присутствия нелинейных слагаемых система также содержит интегралы по области от стокслетов и фиктивных источников, распределенных по области течения. В результате дискретизации гранично-интегральных уравнений с использованием N постоянных элементов на границе и $N \times N$ постоянных ячеек в области получается система нелинейных алгебраических уравнений. Данная система может быть записана в матричной форме следующим образом:

$$\mathbf{AX} = \mathbf{B}(\mathbf{X}), \tag{1}$$

где $\mathbf{A}$ – матрица коэффициентов (интегралов от фундаментальных решений по элементам, вычисленных аналитически с выделением особенностей), $\mathbf{X}$ – вектор неизвестных граничных источников, $\mathbf{B}(\mathbf{X})$ – вектор нелинейной правой части, содержащий граничные условия и интеграл по области от внутренних источников Ψ_j, для вычисления которых необходимо знать поле скорости в области течения [1]. Результаты решения данной системы методом простой итерации в случае значительной нелинейности (n = 0,2) представлены на рис. 1, *а*. При этом наблюдаются осцилляции решения в области малых скоростей сдвига. На рис. 1, *б* результаты решения, полученные методом простой итерации с использованием процедуры релаксации с динамическим выбором коэффициента релаксации, исходя из условия непрерывного уменьшения Евклидовой нормы вектора невязки [1]:

$$r = \left\| \mathbf{AX} - \mathbf{B}(\mathbf{X}) \right\|. \tag{2}$$

В качестве условия сходимости итерационного процесса принято $r < N^2 \cdot 10^{-6}$.

Для решения системы линейных алгебраических уравнений (1) для заданной правой части в ходе итераций использовались процедуры sgetrf, sgetrs модуля линейной алгебры LAPACK из параллельной версии библиотеки Intel Math Kernel Library. Процедура sgemv применялась для вычисления невязки (2). Для вычисления внутренних источников эффективным оказалось использование конечно-разностных аппроксимаций для производных скорости, а для вычисления интеграла по области – численных квадратур Гаусса. Для формирования матрицы и правой части системы в программной реализации использована технология OpenMP, что совместно с применением процедур оптимизированной библиотеки позволило значительно ускорить работу вычислительного алгоритма.

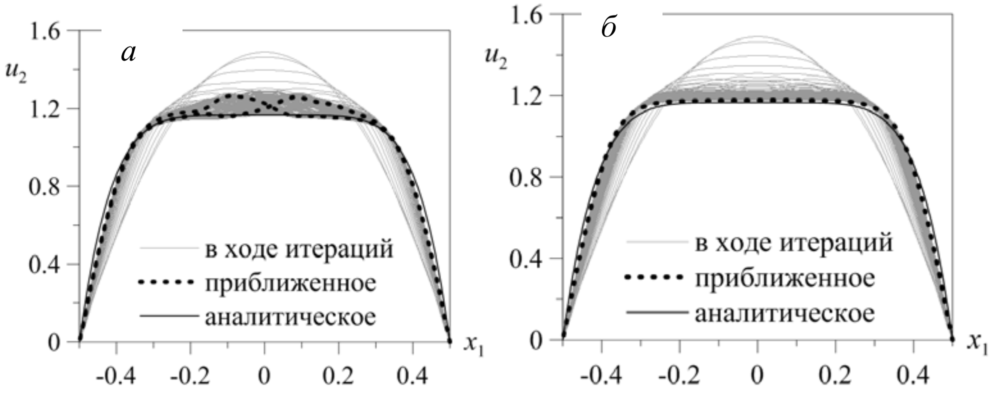

Рис. 1. Значения продольной составляющей вектора скорости при $n = 0{,}2$; $N = 256$:
а – без релаксации; *б* – с релаксацией

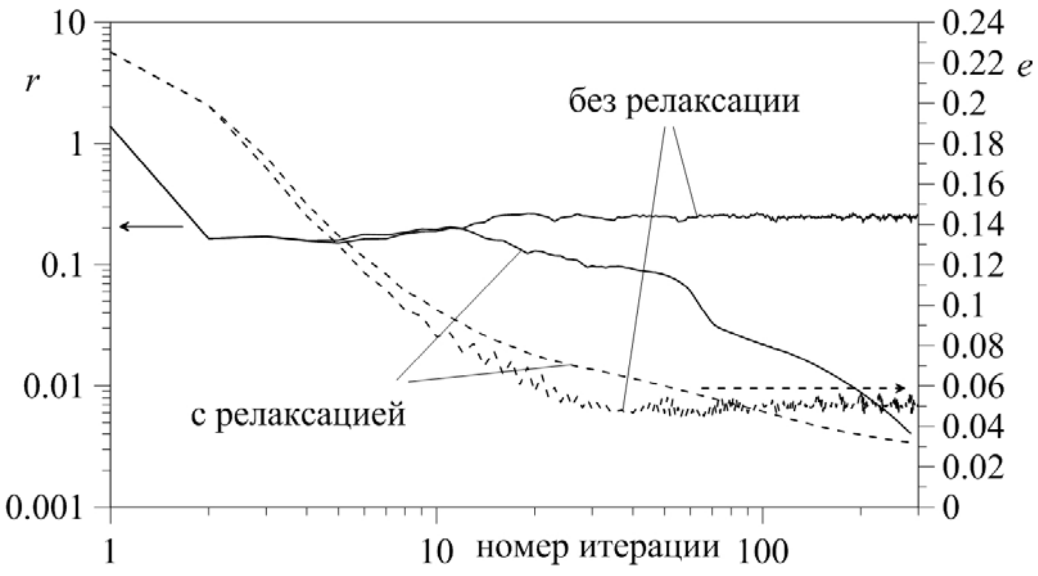

Рис. 2. Изменение невязки *r* (сплошные линии) и среднеквадратичного отклонения от аналитического решения *e* (пунктирные линии) в ходе итераций при $n = 0{,}2$; $N = 256$

Такой вариант метода простой итерации оказался эффективным в широком диапазоне изменения n и был использован для моделирования течения вязкой жидкости со свободной поверхностью в [1].

Исследование выполнено при финансовой поддержке гранта Президента РФ (МК-3687.2014.1) и РФФИ в рамках научного проекта № 14-08-31579 мол_а.

Литература

1. *Ponomareva M.A., Filina M.P., Yakutenok V.A.* The indirect boundary element method for the two-dimensional pressure- and gravity-driven free surface Stokes flow // WIT Transactions on Modelling and Simulation. 2014. Vol. 57. P. 289–304.

РАСЧЕТ ТЕЧЕНИЯ СЛОИСТОЙ ЖИДКОСТИ В ПОЛОСЕ

Е.Ю. Мищарина, Ю.П. Худобина

Численным методом изучаются свойства нелинейного дифференциального уравнения в частных производных, которым описываются стационарные течения неоднородной несжимаемой жидкости в криволинейной полосе. Задача имеет приложения в метеорологии и в океанографии.

CALCULATION OF A CURRENT OF A LAYERED IQUID IN A STRIP

Ye.Yu. Mishcharina, Ju.P. Khudobina

By means of a numerical method properties of the nonlinear differential equation in private derivatives by which stationary currents of a non-uniform incompressible liquid in a curvilinear strip are described are investigated. This problem finds application in meteorology and in oceanography.

В работе [1] показано, что в стационарных течениях плотность несжимаемой жидкости должна зависеть только от значения функции тока в данной точке и не зависеть явно от координат. Следовательно, линии тока являются одновременно и линиями одинаковой плотности. Зависимость $\rho = \rho(\psi)$ может быть произвольной, и должна задаваться при решении задачи. Она характеризует неоднородность среды и представляет собой закон расслоения неоднородной жидкости. Само течение жидкости при этом описывается единственной функцией тока $\psi(x, y)$. Эта функция должна удовлетворять дифференциальному уравнению, которое принадлежит M.L. Dubriel-Jacotin [1]:

$$\Delta\psi + \frac{\rho_\psi}{\rho}\left[gy + \frac{(\nabla\psi)^2}{2}\right] = 0\,. \qquad (1)$$

В статье [2] получено решение уравнения (1) для случая обтекания диполя потоком жидкости, в которой плотность $\rho(\psi)$ распределена по показательному закону. Недостатком такого решения в безграничной области было то, что обтекаемый контур изменялся вместе с параметрами течениями, такими как скорость на бесконечности U_∞ и закон распределения плотности. В настоящей статье рассматривается численное решение уравнения (1) для потока с фиксированными границами, вдоль которых функция тока принимает постоянные значения. Областью решения является криволинейная полоса $Z(x, y)$ в физической области. Но поскольку численные методы удобнее применять в прямолинейной полосе, то введем также параметрическую область – $\Omega = \xi + i\eta, \quad -\infty < \xi < \infty, \quad 0 < \eta < H$ в виде горизонтальной полосы с