

МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ РФ
РОССИЙСКИЙ ФОНД ФУНДАМЕНТАЛЬНЫХ ИССЛЕДОВАНИЙ
НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ ТОМСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
НИИ ПРИКЛАДНОЙ МАТЕМАТИКИ И МЕХАНИКИ ТОМСКОГО УНИВЕРСИТЕТА
ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ФАКУЛЬТЕТ
МЕХАНИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИЙ ФАКУЛЬТЕТ
СОВЕТ МОЛОДЫХ УЧЁНЫХ ТГУ



Актуальные проблемы современной механики сплошных сред и небесной механики

Международная молодежная научная конференция

17–19 ноября 2014 г., Томск



Издательство Томского университета
2015

ЧИСЛЕННОЕ ИССЛЕДОВАНИЕ АППРОКСИМАЦИОННОЙ СХОДИМОСТИ НЕПРЯМОГО МЕТОДА ГРАНИЧНЫХ ЭЛЕМЕНТОВ ПРИ МОДЕЛИРОВАНИИ ОСЕСИММЕТРИЧНЫХ ТЕЧЕНИЙ ВЯЗКОЙ ЖИДКОСТИ

А.Е. Кузнецова, М.А. Пономарева, В.А. Якутенок

Работа посвящена исследованию аппроксимационной сходимости непрямого метода граничных элементов для осесимметричного течения вязкой жидкости. Численно решается задача об установившемся течении в круглой трубе, имеющая аналитическое решение. Математическая формулировка включает смешанные краевые условия: на одной части границы заданы компоненты вектора скорости, на другой – компоненты вектора усилий. Численное интегрирование осуществляется с использованием стандартных квадратур без выделения особенностей. Используются постоянные элементы.

STUDY OF AN APPROXIMATION CONVERGENCE OF THE INDIRECT BOUNDARY ELEMENT METHOD FOR AN AXISYMMETRIC VISCOUS FLUID FLOWS MODELING

А.Е. Kuznetsova, М.А. Ponomareva, V.A. Yakutenok

The work is devoted to the study of an approximation convergence on the indirect boundary element method for an axisymmetric viscous fluid flow. The problem of the steady flow of viscous fluid in cylindrical tube with exact solution is solved numerically. Problem formulation includes mixed boundary conditions. At the one part of the boundary velocity vector components are specified and tractions component are specified on another one. Numerical integration is realized using standard quadratures without singularity extraction. Constant elements are used.

Рассматривается установившееся течение вязкой жидкости в круглой трубе. Краевая задача формулируется в безразмерных переменных. В качестве характерного масштаба скорости выбрана средняя скорость течения U , давления – $\mu U / R$, где μ – коэффициент динамической вязкости, R – радиус трубы. На границах задаются как компоненты вектора скорости \mathbf{u} , так и компоненты вектора усилий \mathbf{t} (рис. 1).

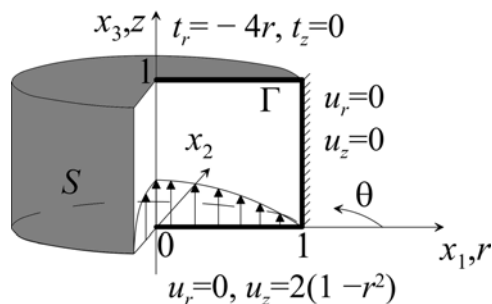


Рис. 1. Область решения. Декартова (x_1, x_2, x_3) и цилиндрическая (r, θ, z) системы координат

Уравнения Стокса и уравнение неразрывности, описывающие течение вязкой жидкости в приближении ползущего течения, в декартовой системе координат имеют вид:

$$\Delta \mathbf{u} = \nabla p, \quad (1)$$

$$\nabla \mathbf{u} = 0, \quad (2)$$

где p – давление.

В соответствии с основными положениями непрямого метода считается, что по поверхности рассматриваемой области распределены фиктивные источники с плотностью на единицу площади, равной $\varphi(\xi)$, $\mathbf{o} \in S$. Тогда для точек \mathbf{x}_0 , принадлежащих образующей Γ :

$$\begin{aligned} u_r(\mathbf{x}_0) &= \int_{\Gamma} \left[\varphi_r(\mathbf{o}) r_{\xi}^r \int_0^{2\pi} u_r^r(\mathbf{x}_0, \mathbf{o}) d\theta_{\xi} + \varphi_z(\mathbf{o}) r_{\xi}^z \int_0^{2\pi} u_r^z(\mathbf{x}_0, \mathbf{o}) d\theta_{\xi} \right] d\Gamma(\mathbf{o}), \\ u_z(\mathbf{x}_0) &= \int_{\Gamma} \left[\varphi_r(\mathbf{o}) r_{\xi}^r \int_0^{2\pi} u_z^r(\mathbf{x}_0, \mathbf{o}) d\theta_{\xi} + \varphi_z(\mathbf{o}) r_{\xi}^z \int_0^{2\pi} u_z^z(\mathbf{x}_0, \mathbf{o}) d\theta_{\xi} \right] d\Gamma(\mathbf{o}), \\ t_r(\mathbf{x}_0) &= \int_{\Gamma} \left[\varphi_r(\mathbf{o}) r_{\xi}^r \int_0^{2\pi} t_r^r(\mathbf{x}_0, \mathbf{o}) d\theta_{\xi} + \varphi_z(\mathbf{o}) r_{\xi}^z \int_0^{2\pi} t_r^z(\mathbf{x}_0, \mathbf{o}) d\theta_{\xi} \right] d\Gamma(\mathbf{o}), \\ t_z(\mathbf{x}_0) &= \int_{\Gamma} \left[\varphi_r(\mathbf{o}) r_{\xi}^r \int_0^{2\pi} t_z^r(\mathbf{x}_0, \mathbf{o}) d\theta_{\xi} + \varphi_z(\mathbf{o}) r_{\xi}^z \int_0^{2\pi} t_z^z(\mathbf{x}_0, \mathbf{o}) d\theta_{\xi} \right] d\Gamma(\mathbf{o}), \end{aligned} \quad (3)$$

где u_r^r , u_r^z , u_z^r , u_z^z , t_r^r , t_r^z , t_z^r , t_z^z – фундаментальные сингулярные решения для скоростей и напряжений, полученные для осесимметричного случая в (1).

Система гранично-интегральных уравнений (3) эквивалентна исходной системе дифференциальных уравнений (1)–(2).

Для получения численного решения (3) граница области разбивается на N прямолинейных отрезков – элементов, вдоль которых искомая функция φ считается постоянной. Тогда система (3) принимает вид

$$\begin{aligned} u_i^p(\mathbf{x}_0^p) &= \sum_{q=1}^{N_1} \int_{\Delta\Gamma^q} \varphi_j^q(\mathbf{o}) r_{\xi}^q \int_0^{2\pi} u_i^j(\mathbf{x}_0^p, \mathbf{o}) d\theta_{\xi} d\Gamma_{\xi}, \\ t_i^p(\mathbf{x}_0^p) &= \sum_{q=1}^{N-N_1} \int_{\Delta\Gamma^q} \varphi_j^q(\mathbf{o}) r_{\xi}^q \int_0^{2\pi} t_i^j(\mathbf{x}_0^p, \mathbf{o}) d\theta_{\xi} d\Gamma_{\xi}, \end{aligned} \quad (4)$$

где $i, j = r, z$ означают радиальную или аксиальную составляющие, $p \in [1, N]$, $q \in [1, N]$ – номера узлов наблюдения и приложения нагрузки, соответственно.

Полученная система линейных алгебраических уравнений (4) решается стандартным методом Гаусса с выбором главного элемента. Интегралы в (4) вычисляются численно методом прямоугольников со средней точкой. В результате решения системы (4) находятся значения интенсивности фиктивных источников, которые в свою очередь используются для расчета аксиальной составляющей вектора скорости на выходной границе по формулам, аналогичным (4). Точность решения определяют значения трех параметров – количества граничных элементов N , количества интервалов интегрирования по элементу $n_{d\Gamma}$ и количества интервалов интегрирования по угловой координате $n_{d\theta}$. Значение аксиальной составляющей вектора скорости для количества элементов и интервалов интегрирования, обеспечивающих приемлемую точность, показано на рис. 2.

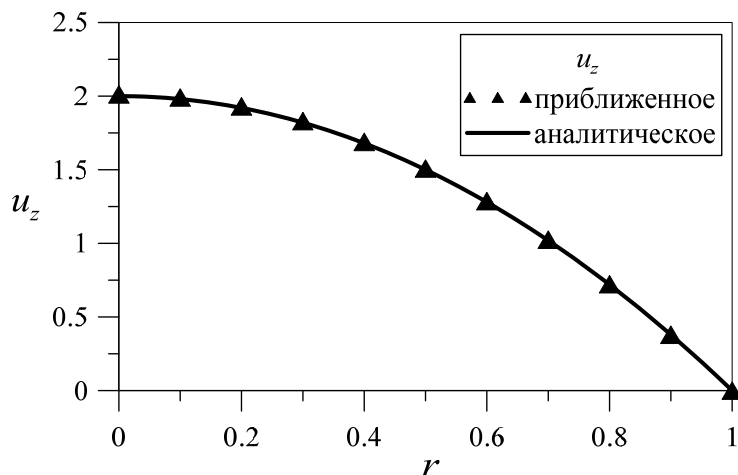


Рис. 2. Значение аксиальной составляющей скорости при $N=60$, $n_{d\Gamma}=20$, $n_{d\theta}=1000$

Аппроксимационная сходимость оценивалась в норме L_2 . Из рис. 3 видно, что с ростом количества элементов и интервалов интегрирования ошибка уменьшается. Можно заметить, что для угловой координаты требуется достаточно большое количество интервалов интегрирования – на порядок больше, чем по элементу. Так, начиная с определенного значения $n_{d\Gamma}$, его увеличение уже не приводит к повышению точности решения, которая тогда определяется заданным значением $n_{d\theta}$. Представленные результаты позволяют осуществить необходимый выбор значений N , $n_{d\Gamma}$ и $n_{d\theta}$ для получения требуемой точности без дополнительных вычислительных затрат.

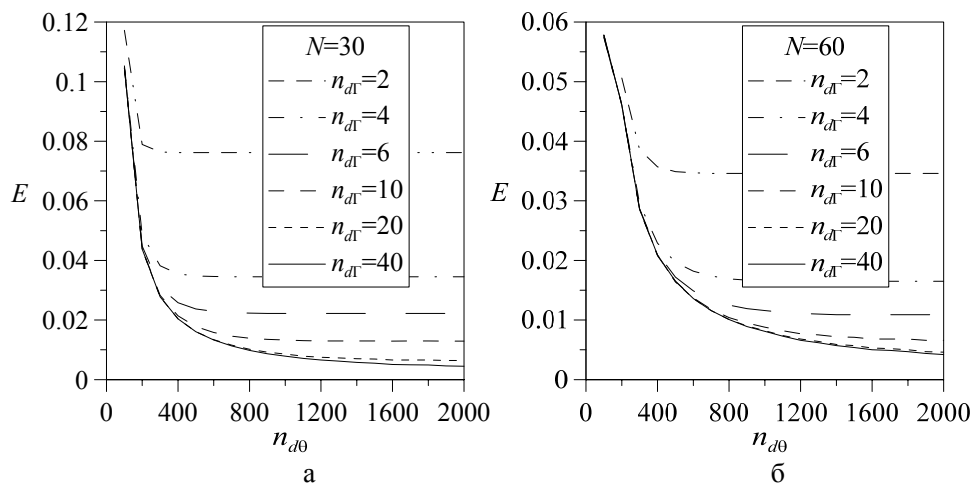


Рис. 3. Зависимость среднеквадратичного отклонения E от количества интервалов интегрирования по углу $n_{d\theta}$ и количества интервалов интегрирования по элементу $n_{d\Gamma}$: a – количество граничных элементов $N=30$; b – количество граничных элементов $N=60$

Таким образом, полученные результаты свидетельствуют о работоспособности используемого варианта непрямого метода граничных элементов и подтверждают правильность записи фундаментальных сингулярных решений для скоростей и напряжений для осесимметричного случая, приведенные в (1). Полученные кривые для среднеквадратичного отклонения позволяют выбрать количество интервалов

интегрирования для угловой координаты и количество интервалов интегрирования по элементу, необходимые для достижения приемлемой точности расчетов.

Исследование выполнено при финансовой поддержке гранта Президента РФ (МК-3687.2014.1) и РФФИ в рамках научного проекта № 14-08-31579 мол_а.

Литература

1. Якутенок В.А., Пономарева М.А., Кузнецова А.Е. Моделирование осесимметричных течений вязкой несжимаемой жидкости непрямым методом граничных элементов // Вестник Томского государственного университета. 2014. №5(31). С. 114–123.

ПРЯМОЙ МЕТОД РЕШЕНИЯ УРАВНЕНИЯ ПУАССОНА

И.Б. Липунов

Обычно для численного решения задач математической физики эллиптического типа используются методы итераций. В статье показывается, что в ряде случаев для этой цели больше подходит непосредственное получение точного решения соответствующей системы линейных алгебраических уравнений высокого порядка, так как при этом применяется технология разреженных матриц.

DIRECT METHOD DECISION OF THE POISSON'S EQUATION

I.B. Lipunov

Usually for the numerical decision of problems of mathematical physics of elliptic type methods of iterations are used. In article it is shown, that in some cases it is more convenient to apply exact decisions of corresponding system of the linear algebraic equations of a high order as the technology of the sparse matrixes is thus applied.

Оператор Лапласа входит во многие линейные уравнения математической физики, и поэтому связанные с ним математические операции сохраняют свою актуальность и в настоящее время. Известно множество различных способов решения уравнения Пуассона, которые хорошо работают при соответствующих условиях. Обычно используются итерационные способы, потому что считается, что из-за большого числа искомых величин прямые методы работают неэффективно. Но современные технологии позволяют применять непосредственно прямые методы решений алгебраических уравнений высокого порядка. В дифференциальной форме уравнение Пуассона записывается в виде

$$\frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} = P(x, y). \quad (1)$$

Если расчетная сетка имеет размеры $m \times n$, то неизвестные величины U_{mn} образуют прямоугольную матрицу, состоящую из mn чисел. Такую же матрицу образует и известная правая часть P_{mn} . Чтобы записать конечно-разностное представление уравнения (1), введем квадратную матрицу T_m порядка m :