УДК 519.872

Т.А. Карлыханова, С.П. Моисеева, А.А. Назаров

ИССЛЕДОВАНИЕ СИСТЕМЫ $MAP/M/\infty$ МЕТОДОМ МОМЕНТОВ

Для марковской системы обслуживания $MAP/M/\infty$ предложена рекуррентная процедура нахождения последовательности моментов различных порядков числа занятых приборов. Приведены явные выражения для первых четырех начальных моментов.

Введение

Бесконечнолинейные системы массового обслуживания (СМО) рассматриваются в качестве математических моделей широкого класса реальных систем в различных предметных областях: связь, транспорт, экономика и т.д. [1], в частности для исследования числа клиентов в страховых компаниях, кредитно-депозитных организациях, пенсионных и социальных фондах.

Структура бесконечнолинейной СМО $A/GI/\infty$ выглядит следующим образом (рис. 1).

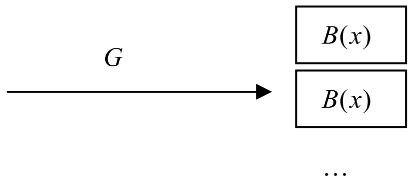

Рис. 1

Здесь A – математическая модель входящего потока, $B(x)$ – функция распределения времени обслуживания.

Постановка задачи

Рассмотрим систему с неограниченным числом приборов (рис. 2), в котором время обслуживания каждой заявки имеет экспоненциальное распределение [2]:

$$B(x) = 1 - \mathrm{e}^{-\mu x}.$$

Рис. 2

На вход системы поступает MAP-поток заявок, определяемый цепью Маркова $k(t)$, заданной матрицей Q инфинитезимальных характеристик $q_{k_1k_2}$ [3]:

$$q_{k_1k_2} = \lim_{\Delta t\to 0}\left[\frac{1}{\Delta t}P(k(t+\Delta t)=k_2 \mid P(t)=k_1)\right],$$

где $k_1 \neq k_2$, набором неотрицательных величин $\lambda_k \geq 0$ и набором вероятностей $d_{k_1k_2}$ для всех $k_1 \neq k_2$, того что в момент перехода цепи Маркова $k(t)$ из состояния k_1 в состояние k_2 в потоке наступает событие – заявка поступает на обслуживание, а с вероятностью $\left(1-d_{k_1k_2}\right)$ событие не наступает.

На интервалах между моментами изменения состояний цепи Маркова события потока наступают с интенсивностями λ_k, если значение цепи $k(t)$ на этом интервале составляет $k(t)=k$.

Вывод уравнений для характеристик системы $MAP/M/\infty$

Очевидно, случайный процесс $\{k(t), i(t)\}$, где $i(t)$ – число приборов, занятых в момент времени t в рассматриваемой системе $MAP/M/\infty$, является двумерной цепью Маркова [3], поэтому для её распределения вероятностей

$$P(k,i,t) = P\{k(t)=k, i(t)=i\}$$

можно записать следующие равенства [4]:

$$\begin{aligned}
&P(k,i,t+\Delta t) = P(k,i,t)(1-\lambda_k\Delta t)(1-i\mu\Delta t)(1+q_{kk}\Delta t) + \\
&+ P(k,i+1,t)(i+1)\mu\Delta t + P(k,i-1,t)\lambda_k\Delta t + \\
&+ \sum_{k_1\neq k} P(k_1,i,t)q_{k_1k}\Delta t(1-d_{k_1k}) + \\
&+ \sum_{k_1\neq k} P(k_1,i-1,t)q_{k_1k}\Delta t d_{k_1k} + o(\Delta t),
\end{aligned}$$

из которых нетрудно получить систему дифференциальных уравнений Колмогорова [5]:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial P(k,i,t)}{\partial t} &= -\lambda_k P(k,i,t) - i\mu P(k,i,t) + \\
&+ q_{kk}P(k,i,t) + \lambda_k P(k,i-1,t) + \\
&+ (i+1,t)\mu P(k,i+1,t) + \\
&+ \sum_{k_1\neq k} P(k_1,i,t)q_{k_1k}(1-d_{k_1k}) + \\
&+ \sum_{k_1\neq k} P(k_1,i-1,t)q_{k_1k}d_{k_1k}. \qquad (1)
\end{aligned}$$

В (1) выполнив некоторые преобразования и полагая, что СМО функционирует в стационарном режиме [6], обозначив

$$P(k,i,t) = P(k,i),$$

получим

$$\lambda_k P(k,i) + i\mu P(k,i) =$$
$$= \lambda_k P(k,i-1) + (i+1)\mu P(k,i+1) +$$
$$+\sum_{k_1} P(k_1,i) q_{k_1 k} (1 - d_{k_1 k}) +$$
$$+\sum_{k_1} P(k_1,i-1) q_{k_1 k} d_{k_1 k} \ , \tag{2}$$

где $d_{kk} = 0$.

Решением системы (2) является двумерное распределение $P(k,i)$, из которого очевидно следует, что распределение $\Pi(i)$ вероятностей того, что в системе массового обслуживания занято i приборов, определяется равенством

$$\Pi(i) = \sum_k P(k,i) \ . \tag{3}$$

Используя систему (2), нетрудно составить системы для нахождения и других характеристик системы $MAP/M/\infty$, таких как: моменты, производящую, а также характеристическую функцию числа занятых приборов.

В частности, обозначим

$$H(k,u) = \sum_{i=0}^{\infty} e^{iuj} P(k,i) \ . \tag{4}$$

Можно получить систему для этих функций.

Действительно,

$$\frac{\partial H(k,u)}{\partial u} = \sum_{i=0}^{\infty} ije^{iuj} P(k,i) = j\sum_{i=0}^{\infty} ie^{iuj} P(k,i) \ ,$$

поэтому

$$\sum_{i=0}^{\infty} ie^{iuj} P(k,i) = -j\frac{\partial H(k,u)}{\partial u} \ ,$$

следовательно, из (2) получим систему

$$j\mu\left(e^{-ju} - 1\right)\frac{\partial H(k,u)}{\partial u} = \lambda_k \left(e^{ju} - 1\right) H(k,u) +$$
$$+\sum_{k_1} H(k_1,u)\left\{q_{k_1 k} + \left(e^{ju} - 1\right) q_{k_1 k} d_{k_1 k}\right\} . \tag{5}$$

Систему (5) удобнее записать в векторной форме, обозначив вектор-строку

$$H(u) = \{H(1,u),\ H(2,u),\ ...\}$$

и следующие матрицы:

Q – матрица инфинитезимальных характеристик $q_{k_1 k_2}$,

A – матрица элементов $q_{k_1 k_2} d_{k_1 k_2}$,

Λ – диагональная матрица с элементами λ_k по главной диагонали, тогда систему (5) перепишем в виде

$$\mu j\left(e^{-ju} - 1\right)\frac{\partial H(u)}{\partial u} =$$
$$= \left(e^{ju} - 1\right) H(u)\Lambda +$$
$$+ H(u)\left\{Q + \left(e^{ju} - 1\right)A\right\} ,$$

поэтому, обозначив $A + \Lambda = B$ для $H(u)$, получим уравнение

$$\mu j\left(e^{-ju} - 1\right)\frac{\partial H(u)}{\partial u} =$$
$$= H(u)\left(Q + \left(e^{ju} - 1\right)B\right) . \tag{6}$$

Найдя решение $H(u)$ этого уравнения, характеристическую функцию числа занятых приборов, можно записать в виде

$$Me^{jui(t)} = H(u)E \ , \tag{7}$$

где E – единичный вектор-столбец.

Уравнение (6) позволяет находить и другие характеристики рассматриваемой системы обслуживания, в частности моменты любого порядка для числа занятых приборов [7].

Нахождение последовательности моментов различных порядков числа занятых приборов системы $MAP/M/\infty$

Обозначив

$$H(0) = R \ ,$$

из уравнения (6) получим однородную систему линейных алгебраических уравнений

$$RQ = 0 \ , \tag{8}$$

решение R которой, удовлетворяющее условию нормировки

$$RE = 1 \ , \tag{9}$$

является стационарным распределением вероятностей значений цепи Маркова $k(t)$.

Известно, что производная ν-го порядка в нуле от характеристической функции равна моменту ν-го порядка, умноженному на ν-ю степень мнимой единицы [8].

Используя этот факт, найдем моменты числа занятых приборов.

Момент первого порядка

Продифференцируем по u тождество (6) [9], получим

$$\mu j\left(-je^{-ju}\right)\frac{\partial H(u)}{\partial u}+\mu j\left(e^{-ju}-1\right)\frac{\partial^2 H(u)}{\partial u^2}=$$
$$=\frac{\partial H(u)}{\partial u}\left(Q+\left(e^{ju}-1\right)B\right)+H(u)je^{ju}B\,. \qquad (10)$$

Обозначив

$$\left.\frac{\partial H(u)}{\partial u}\right|_{u=0}=jm_1\,,$$

из (10) получим неоднородную систему линейных алгебраических уравнений

$$j\mu m_1=jm_1Q+jRB\,,$$

которую перепишем в виде

$$m_1(Q-\mu I)+RB=0\,. \qquad (11)$$

Решение m_1 этой системы имеет вид

$$m_1=-RB(Q-\mu I)^{-1}\,. \qquad (12)$$

Отметим, что из (12) нетрудно получить значение среднего числа занятых приборов в рассматриваемой системе, так как

$$Mi(t)=m_1E=-RB(Q-\mu I)^{-1}E\,. \qquad (13)$$

Из (11) также имеем

$$0=m_1(Q-\mu I)E+RBB=-\mu m_1E+RBE\,,$$

следовательно,

$$\mu m_1E=RBE\,,$$
$$Mi(t)=m_1E=\frac{1}{\mu}RBE\,. \qquad (14)$$

Момент второго порядка

Для нахождения момента второго порядка числа занятых приборов продифференцируем равенство (10):

$$\mu j\left(j^2e^{-ju}\right)\frac{\partial H(u)}{\partial u}+2\mu j\left(-je^{-ju}\right)\frac{\partial^2 H(u)}{\partial u^2}+$$
$$+\mu j\left(e^{-ju}-1\right)\frac{\partial^3 H(u)}{\partial u^3}=$$
$$=\frac{\partial^2 H(u)}{\partial u^2}\left\{Q+\left(e^{ju}-1\right)B\right\}+2\frac{\partial H(u)}{\partial u}je^{ju}B+$$
$$+H(u)j^2e^{ju}B\,. \qquad (15)$$

Обозначив

$$\left.\frac{\partial^2 H(u)}{\partial u^2}\right|_{u=0}=j^2m_2\,,$$

из (15) получим равенство

$$j\mu j^2jm_1+2j\mu(-j)j^2m_2=$$
$$=j^2m_2Q+2jm_1jB+Rj^2B\,,$$

которое перепишем в виде неоднородной системы линейных алгебраических уравнений для вектора m_2:

$$m_2(Q-2\mu I)+m_1(2B+\mu I)+RB=0\,. \qquad (16)$$

Подставляя сюда m_1 из (12), получим систему

$$m_2(Q-2\mu I)=$$
$$=RB(Q-\mu I)^{-1}(2B+\mu I)-RB\,,$$
$$m_2(Q-2\mu I)=$$
$$=RB\left\{(Q-\mu I)^{-1}(2B+\mu I)-I\right\},$$

решение m_2 которой имеет вид

$$m_2=RB\left\{(Q-\mu I)^{-1}(2B+\mu I)-\right.$$
$$\left.-I\right\}(Q-2\mu I)^{-1}\,. \qquad (17)$$

Следовательно, второй момент числа занятых приборов [10] составляет

$$Mi^2(t)=m_2E=$$
$$=RB\left\{(Q-\mu I)^{-1}(2B+\mu I)-I\right\}(Q-2\mu I)^{-1}E\,. \qquad (18)$$

Из (16) также имеем

$$0=m_2\left(Q-2\mu I\right)E+m_1\left(2B+\mu I\right)E+$$
$$+RBE=-2\mu m_2E+$$
$$+m_1\left(2B+\mu I\right)E+RBE\,.$$

Следовательно, принимая во внимание (12), получим

$$Mi^2(t)=m_2E=$$
$$=\frac{1}{2\mu}RB\left\{-(Q-\mu I)^{-1}(2B+\mu I)E+E\right\}. \qquad (19)$$

Момент третьего порядка

Для нахождения момента третьего порядка числа занятых приборов продифференцируем равенство (15), получим

$$\mu j\left(-j^3e^{-ju}\right)\frac{\partial H(u)}{\partial u}+$$
$$+3\mu j\left(j^2e^{-ju}\right)\frac{\partial^2 H(u)}{\partial u^2}+3\mu j\left(-je^{-ju}\right)\frac{\partial^3 H(u)}{\partial u^3}+$$

$$+\mu j\left(e^{-ju}-1\right)\frac{\partial^4 H(u)}{\partial u^4}=$$
$$=\frac{\partial^3 H(u)}{\partial u^3}\left\{Q+\left(e^{ju}-1\right)B\right\}+$$
$$+3\frac{\partial^2 H(u)}{\partial u^2}je^{ju}B+3\frac{\partial H(u)}{\partial u}j^2e^{ju}B+$$
$$+H(u)j^3e^{ju}B\,. \qquad (20)$$

Обозначив

$$\left.\frac{\partial^3 H(u)}{\partial u^3}\right|_{u=0}=j^3m_3\,,$$

из (20) получим равенство

$$j\mu\left(-j^3\right)jm_1+3j\mu j^2j^2m_2+$$
$$+3j\mu(-j)j^3m_3=j^3m_3Q+$$
$$+3j^2m_2jB+3jm_1j^2B+Rj^3B\,,$$

которое перепишем в виде неоднородной системы линейных алгебраических уравнений для вектора m_3:

$$m_3(Q-3\mu I)+m_2(3B+3\mu I)+$$
$$+m_1(3B-\mu I)+RB=0\,. \qquad (21)$$

Подставляя сюда m_1 из (12) и m_2 из (17), получим систему

$$m_3(Q-3\mu I)=$$
$$=-RB\left\{(Q-\mu I)^{-1}(2B+\mu I)-\right.$$
$$\left.-I\right\}(Q-2\mu I)^{-1}(3B+3\mu I)+$$
$$+RB(Q-\mu I)^{-1}(3B-\mu I)-RB\,,$$
$$m_3(Q-3\mu I)=$$
$$=RB\left\{(Q-2\mu I)^{-1}(3B+3\mu I)-\right.$$
$$-(Q-\mu I)^{-1}(2B+\mu I)(Q-2\mu I)^{-1}(3B+3\mu I)+$$
$$\left.+(Q-\mu I)^{-1}(3B-\mu I)-I\right\},$$

решение m_3 которой имеет вид

$$m_3=RB\left\{(Q-2\mu I)^{-1}(3B+3\mu I)-\right.$$
$$-(Q-\mu I)^{-1}(2B+\mu I)(Q-2\mu I)^{-1}(3B+3\mu I)+$$
$$\left.+(Q-\mu I)^{-1}(3B-\mu I)-I\right\}(Q-3\mu I)^{-1}\,. \qquad (22)$$

Следовательно, третий момент числа занятых приборов составляет

$$Mi^3(t)=m_3E=$$
$$=\left[RB\left\{(Q-2\mu I)^{-1}(3B+3\mu I)-\right.\right.$$
$$-(Q-\mu I)^{-1}(2B+\mu I)(Q-2\mu I)^{-1}(3B+3\mu I)+$$
$$\left.\left.+(Q-\mu I)^{-1}(3B-\mu I)-I\right\}(Q-3\mu I)^{-1}\right]E\,. \qquad (23)$$

Из (21) также имеем

$$0=m_3(Q-3\mu I)E+m_2(3B+3\mu I)E+$$
$$+m_1(3B-\mu I)E+RBE=$$
$$=-3\mu m_3E+m_2(3B+3\mu I)E+$$
$$+m_1(3B-\mu I)E+RBE\,.$$

Следовательно, принимая во внимание (12) и (17),

$$Mi^3(t)=m_3E=$$
$$=\frac{1}{3\mu}RB\left[\left\{(Q-\mu I)^{-1}(2B+\mu I)-\right.\right.$$
$$\left.-I\right\}(Q-2\mu I)^{-1}(3B+3\mu I)E-$$
$$\left.-(Q-\mu I)^{-1}(3B-\mu I)E+E\right]. \qquad (24)$$

Момент четвертого порядка

Для нахождения момента четвертого порядка числа занятых приборов продифференцируем равенство (20) [11]:

$$\mu j\left(j^4e^{-ju}\right)\frac{\partial H(u)}{\partial u}+$$
$$+4\mu j\left(-j^3e^{-ju}\right)\frac{\partial^2 H(u)}{\partial u^2}+$$
$$+6\mu j\left(j^2e^{-ju}\right)\frac{\partial^3 H(u)}{\partial u^3}+$$
$$+4\mu j\left(-je^{-ju}\right)\frac{\partial^4 H(u)}{\partial u^4}+$$
$$+\mu j\left(e^{-ju}-1\right)\frac{\partial^5 H(u)}{\partial u^5}=$$
$$=\frac{\partial^4 H(u)}{\partial u^4}\left\{Q+\left(e^{ju}-1\right)B\right\}+4\frac{\partial^3 H(u)}{\partial u^3}\left(je^{ju}\right)B+$$
$$+6\frac{\partial^2 H(u)}{\partial u^2}j^2e^{ju}B+4\frac{\partial H(u)}{\partial u}j^3e^{ju}B+$$
$$+H(u)j^4e^{ju}B\,. \qquad (25)$$

Обозначив

$$\left.\frac{\partial^4 H(u)}{\partial u^4}\right|_{u=0}=j^4m_4\,,$$

из (25) получим равенство

$$j\mu\left(j^4\right)jm_1+4j\mu\left(-j^3\right)j^2m_2+$$
$$+6j\mu\left(j^2\right)j^3m_3+4j\mu(-j)j^4m_4=$$
$$=j^4m_4Q+4j^3m_3jB+$$
$$+6j^2m_2j^2B+4jm_1j^3B+Rj^4B\,,$$

которое перепишем в виде неоднородной системы линейных алгебраических уравнений для вектора m_4:

$$m_4(Q-4\mu I)+m_3(4B+6\mu I)+$$
$$+m_2(6B-4\mu I)+m_1(4B+\mu I)+RB=0\,. \qquad (26)$$

Подставляя сюда m_1 из (12), m_2 из (17) и m_3 из (22), получим систему

$$m_4(Q-4\mu I)=-RB\{(Q-2\mu I)^{-1}(3B+3\mu I)-$$
$$-(Q-\mu I)^{-1}(2B+\mu I)(Q-2\mu I)^{-1}(3B+3\mu I)+$$
$$+(Q-\mu I)^{-1}(3B-\mu I)-I\}(Q-3\mu I)^{-1}(4B+6\mu I)-$$
$$-RB\{(Q-\mu I)^{-1}(2B+\mu I)-$$
$$-I\}(Q-2\mu I)^{-1}(6B-4\mu I)+$$
$$+RB(Q-\mu I)^{-1}(4B+\mu I)-RB\,,$$
$$m_4(Q-4\mu I)=RB[-\{(Q-2\mu I)^{-1}(3B+3\mu I)-$$
$$-(Q-\mu I)^{-1}(2B+\mu I)(Q-2\mu I)^{-1}(3B+3\mu I)+$$
$$+(Q-\mu I)^{-1}(3B-\mu I)-I\}(Q-3\mu I)^{-1}(4B+6\mu I)-$$
$$-\{(Q-\mu I)^{-1}(2B+\mu I)-$$
$$-I\}(Q-2\mu I)^{-1}(6B-4\mu I)+$$
$$+(Q-\mu I)^{-1}(4B+\mu I)-I],$$

решение m_4 которой имеет вид

$$m_4=RB[-\{(Q-2\mu I)^{-1}(3B+3\mu I)-$$
$$-(Q-\mu I)^{-1}(2B+\mu I)(Q-2\mu I)^{-1}(3B+3\mu I)+$$
$$+(Q-\mu I)^{-1}(3B-\mu I)-I\}(Q-3\mu I)^{-1}(4B+6\mu I)-$$
$$-\{(Q-\mu I)^{-1}(2B+\mu I)-$$
$$-I\}(Q-2\mu I)^{-1}(6B-4\mu I)+$$
$$+(Q-\mu I)^{-1}(4B+\mu I)-I](Q-4\mu I)^{-1}\,. \qquad (27)$$

Следовательно, четвертый момент числа занятых приборов составляет

$$Mi^4(t)=m_4E=$$
$$=RB[-\{(Q-2\mu I)^{-1}(3B+3\mu I)-$$
$$-(Q-\mu I)^{-1}(2B+\mu I)(Q-2\mu I)^{-1}(3B+3\mu I)+$$
$$+(Q-\mu I)^{-1}(3B-\mu I)-I\}(Q-3\mu I)^{-1}(4B+6\mu I)-$$
$$-\{(Q-\mu I)^{-1}(2B+\mu I)-$$
$$-I\}(Q-2\mu I)^{-1}(6B-4\mu I)+$$
$$+(Q-\mu I)^{-1}(4B+\mu I)-I](Q-4\mu I)^{-1}E\,. \qquad (28)$$

Из (26) также имеем

$$0=m_4(Q-4\mu I)E+m_3(4B+6\mu I)E+$$
$$+m_2(6B-4\mu I)E+m_1(4B+\mu I)E+RBE=$$
$$=-4\mu m_4E+m_3(4B+6\mu I)E+$$
$$+m_2(6B-4\mu I)E+m_1(4B+\mu I)E+RBE\,.$$

Следовательно, принимая во внимание (12), (17) и (22), получим

$$Mi^4(t)=m_4E=$$
$$=\frac{1}{4\mu}RB[-\{(Q-2\mu I)^{-1}(3B+3\mu I)-$$
$$-(Q-\mu I)^{-1}(2B+\mu I)(Q-2\mu I)^{-1}(3B+3\mu I)+$$
$$+(Q-\mu I)^{-1}(3B-\mu I)-I\}(Q-3\mu I)^{-1}(4B+6\mu I)E-$$
$$-\{(Q-\mu I)^{-1}(2B+\mu I)-$$
$$-I\}(Q-2\mu I)^{-1}(6B-4\mu I)E+$$
$$+(Q-\mu I)^{-1}(4B+\mu I)E-E]. \qquad (29)$$

Аналогично нетрудно найти моменты более высокого порядка.

Процедура нахождения моментов

Матрицы Q, Λ и A выберем следующим образом:

$$Q=\begin{pmatrix}-1 & 1 & 0 & 0 & 0\\ 1 & -2 & 0 & 0 & 1\\ 1 & 0 & -2 & 0 & 1\\ 0 & 2 & 2 & -4 & 0\\ 1 & 1 & 2 & 1 & -5\end{pmatrix},\quad \Lambda=\begin{pmatrix}1 & 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 2 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 3 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 4 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 5\end{pmatrix},$$
$$A=\begin{pmatrix}0 & 1 & 0 & 0 & 0\\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1\\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1\\ 0 & 2 & 2 & 0 & 0\\ 1 & 1 & 2 & 1 & 0\end{pmatrix}.$$

Подставим их в (14), (19), (24) и определим значения нормированных моментов μm_1, $\mu^2 m_2$, $\mu^3 m_3$. Графики изменения значений в зависимости от μ приведены на рис. 3–5.

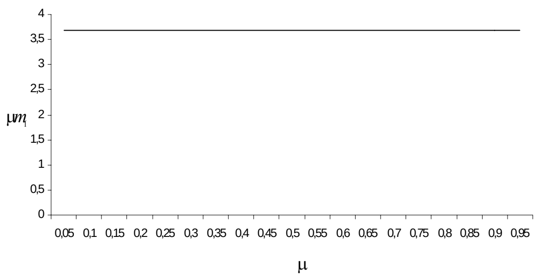

Рис. 3

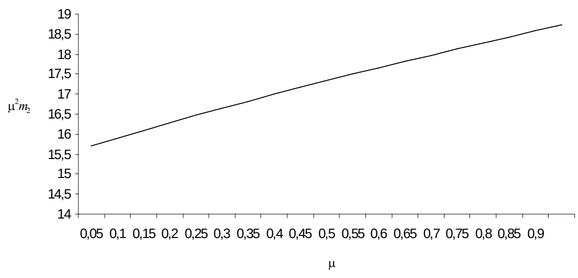

Рис. 4

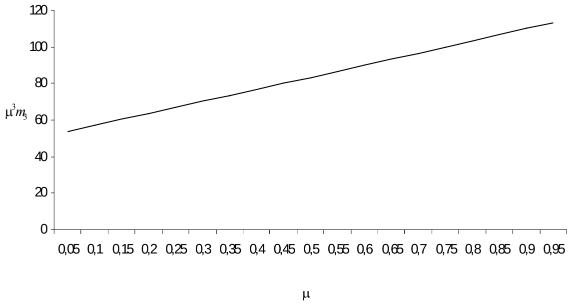

Рис. 5

Заключение

Таким образом, в работе найдены моменты первого, второго, третьего и четвертого порядка числа занятых приборов для бесконечнолинейной системы массового обслуживания с экспоненциальным временем обслуживания и MAP -входящим потоком заявок.

Нами показано, что момент первого порядка числа занятых приборов есть константа, моменты второго, третьего порядков числа занятых приборов – это монотонно возрастающие прямые.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Назаров А.А., Терпугов А.Ф.* Теория массового обслуживания: Учебное пособие. Томск: Изд-во НТЛ, 2004.
2. *Радюк Л.Е., Терпугов А.Ф.* Теория вероятностей и случайных процессов. Томск: Изд-во Том. ун-та. 1988. 174 с.
3. *Карлин С.* Основы теории случайных процессов. М., 1971.
4. *Гнеденко Б.В., Коваленко И.Н.* Введение в теорию массового обслуживания. М.: Наука, 1987. 336 с.
5. *Тихонов А.Н., Васильева А.Б., Свешников А.Г.* Дифференциальные уравнения. М.: Наука, 1980. 232 с.
6. *Эльсгольц Л.Э.* Дифференциальные уравнения и вариационное исчисление. М.: Наука, 1969.
7. *Гихман И.И., Скороход. А.В.* Введение в теорию случайных процессов. М.: Наука, 1977.
8. *Гнеденко Б.В.* Курс теории вероятностей. М.: Наука, 1969.
9. *Ивченко Г.И., Каштанов В.А., Коваленко И.Н.* Теория массового обслуживания. М.: Высшая школа, 1982. 256 с.
10. *Кофман А., Крюон Р.* Массовое обслуживание. Теория и приложения. М.: Мир, 1965. 304 с.
11. *Саати Т.Л.* Элементы теории массового обслуживания и ее приложения. М.: Сов. радио, 1971.

Статья представлена кафедрой теории вероятностей и математической статистики факультета прикладной математики и кибернетики Томского государственного университета, поступила в научную редакцию «Кибернетика» 25 мая 2006 г.