УДК 519.95

Е.В. Чаусова

ДИНАМИЧЕСКАЯ СЕТЕВАЯ МОДЕЛЬ УПРАВЛЕНИЯ ЗАПАСАМИ С ИНТЕРВАЛЬНО ЗАДАННЫМ НЕСТАЦИОНАРНЫМ СПРОСОМ И ИНТЕРВАЛЬНЫМИ КОЭФФИЦИЕНТАМИ ПОТЕРЬ ЗАПАСА

Работа выполнена при финансовой поддержке гранта Президента РФ № МК-3097.2005.8

Рассматривается динамическая сетевая модель системы управления запасами с неопределенностью в данных. Неизвестные параметры системы (спрос и коэффициенты потерь запаса) задаются в виде интервалов, в границах которых они произвольным образом принимают свои значения. Предполагается, что спрос имеет нестационарный характер и интервал его возможных значений меняется во времени. Для анализа и расчета оптимальной стратегии управления применяется аппарат интервальной математики, в том числе полная интервальная арифметика Каухера. Получены необходимые и достаточные условия существования допустимого управления, доказана теорема об оптимальном допустимом уровне запаса, определены достаточные условия существования оптимальной допустимой стратегии управления и разработан вычислительный алгоритм ее построения. Проведены численные исследования.

Проблема управления запасами является одной из наиболее важных и актуальных в экономике, поскольку к ней сводятся многие задачи оптимального планирования складских, производственных, транспортных, финансовых, водохозяйственных, энергетических и других систем. Широкий класс систем управления запасами, в том числе системы снабжения и производства-распределения, описывается динамическими сетевыми моделями. Структура систем управления запасами представляется в виде динамической сети, узлы которой задают виды и размеры управляемых запасов, а дуги – управляемые и неуправляемые потоки в сети. Под запасом здесь понимается не только наличие некоторого товара или продукции на складе, но и любые другие виды ресурсов (производственные, трудовые, транспортные, финансовые и др.). Управляемые потоки перераспределяют ресурсы (запасы) между узлами сети, возможно перерабатывая их, и планируют поставки извне. Неуправляемые потоки описывают спрос на ресурсы в узлах сети, который формируется как со стороны других узлов, так и внешнего окружения. Задача управления запасами формулируется как задача поиска минимального по стоимости динамического потока в сети. Достаточно полный обзор о постановках сетевых задач и методах их решения приведен в [1, 2].

Наиболее востребованными на практике являются модели управления запасами с неопределенностью в данных. В классической теории управления запасами принято считать, что априорная неопределенность, свойственная реальным системам управления запасами, имеет стохастический характер [3–5]. Однако практическое применение стохастических моделей во многих случаях затрудняется из-за отсутствия информации о вероятностных характеристиках системы. В работах [6–11] предлагаются интервальные модели управления запасами, основанные на предположении о нестохастической природе неопределенности, присутствующей в системе. Неизвестные параметры системы описываются интервалами, в границах которых они произвольным образом принимают свои значения. На практике такое описание неопределенности по сравнению с вероятностным является более простым и доступным, поскольку границы интервалов неопределенности оценить проще, чем вероятностные характеристики. Для анализа и расчета оптимальной стратегии управления применяется аппарат интервальной математики [12–15], в том числе полная интервальная арифметика Каухера [14, 15]. В [8–10] рассматриваются динамические сетевые модели систем управления запасами с интервальной неопределенностью спроса. Неизвестный спрос задается в виде интервала с постоянными (стационарный спрос) или переменными (нестационарный спрос) границами. В работе [11] в модель со стационарным спросом вводится дополнительная неопределенность, источником которой являются коэффициенты потерь запаса, учитывающие естественные изменения в его количестве и свойствах (порча, убыль, устаревание и т.д.). Это обусловлено тем, что в большинстве случаях на практике известными бывают не сами значения коэффициентов потерь, а интервалы их возможных значений.

В данной работе рассматривается динамическая сетевая модель управления запасами с интервально заданным нестационарным спросом и интервальными коэффициентами потерь запаса. Получены необходимые и достаточные условия существования допустимого управления, доказана теорема об оптимальном допустимом уровне запаса, определены достаточные условия существования оптимальной допустимой стратегии управления, гарантирующей асимптотическую сходимость к оптимальному запасу, и разработан вычислительный алгоритм построения этой стратегии. Приведены результаты численного моделирования, подтверждающие работоспособность и эффективность предложенного алгоритма.

Описание модели и постановка задачи

Рассмотрим динамическую систему управления запасами с периодическим контролем уровня запасов и бесконечным горизонтом планирования. Структуру системы представим в виде динамической сети, эволюция которой описывается многомерной моделью в пространстве состояний:

$$x(t+1) = A(t)x(t) + Bu(t) + Ed(t), \quad t \geq 0\,, \tag{1}$$

где $x(t) \in R^n$ – вектор состояний системы, i-я компонента которого задает уровень запаса в i-м узле сети (на i-м складе) в момент времени t ($x(0)$ считается известным); $u(t) \in R^q$ – вектор управляющих воздействий (управление), компоненты которого представляют управляемые потоки в сети в момент времени t; $d(t) \in R^m$ – вектор неуправляемых воздействий (спрос), компоненты которого описывают неуправляемые потоки в сети в момент времени t. Структура сети определяется структурой матриц $B \in R^{n\times q}$, $E \in R^{n\times m}$; диагональная матрица $A(t) = Diag(\alpha_1(t), \ldots, \alpha_n(t)) \in R^{n\times n}$ учитывает возможные потери запаса в узлах сети в момент времени t.

Спрос $d(t)$ имеет нестационарный характер (например, сезонный) и точно не известен, но задан интервал его возможных значений, границы которого меняются во времени:

$$d(t) \in \boldsymbol{D}(t) \subseteq \boldsymbol{D}, \quad t \geq 0\,, \tag{2}$$

где $\boldsymbol{D}(t), \boldsymbol{D} \in IR^m$, $\boldsymbol{D}(t) = [\underline{D}(t), \overline{D}(t)]$, $\boldsymbol{D} = [\underline{D}, \overline{D}]$, $\boldsymbol{D} \geq 0$; $IR = \{\boldsymbol{x} = [\underline{x}, \overline{x}] \mid \underline{x} \leq \overline{x}, \quad \underline{x}, \overline{x} \in R\}$ – множество правильных интервалов [12, 13]. В ряде случаев с нестационарным спросом такое (более точное) задание интервала неопределенности спроса позволяет уменьшить уровень запаса в системе и, как следствие, затраты на его хранение.

На состояния $x(t)$ и управления $u(t)$ накладываются ограничения, обусловленные возможностями системы:

$$x(t) \in \boldsymbol{X}, \quad t \geq 0\,, \tag{3}$$

$$u(t) \in \boldsymbol{U}, \quad t \geq 0\,, \tag{4}$$

где $\boldsymbol{X} \in IR^n$, $\boldsymbol{X} = [0, \overline{X}]$; $\boldsymbol{U} \in IR^q$, $\boldsymbol{U} = [0, \overline{U}]$.

Коэффициенты потерь запаса $\alpha_1(t)$, …, $\alpha_n(t)$ заданы в виде интервалов

$$A(t) \in \boldsymbol{A}, \quad t \geq 0\,, \tag{5}$$

где $\mathrm{A} = Diag(\mathrm{a}_1, \ \ldots, \ \mathrm{a}_n) \in IR^{n\times n}$, $\mathrm{A} = [\underline{A}, \overline{A}]$, $\mathrm{a}_i = [\underline{\alpha}_i, \overline{\alpha}_i]$, $0 \leq \boldsymbol{a}_i \leq 1$, $\mathrm{wid}\,\boldsymbol{a}_i < 1$, $i = \overline{1,n}$; $\mathrm{wid}\,\boldsymbol{x} = \overline{x} - \underline{x}$ – ширина интервала $\boldsymbol{x}$, $\mathrm{wid}\,\boldsymbol{x} \geq 0$.

Для системы (1) необходимо найти оптимальную (с точки зрения минимума затрат) стратегию управления, гарантирующую полное и своевременное удовлетворение спроса (2) на бесконечном периоде планирования с учетом возможных потерь запаса (5) и ограничений (3), (4).

Определение 1. Будем называть функцию $u(t)=U(x(t),t)$, $u(t) \in \boldsymbol{U}$, допустимым на интервале $\boldsymbol{X}$ управлением для состояния $x(t)$ в момент времени t, $t \geq 0$, если при любых потерях запаса $A(t) \in \boldsymbol{A}$ для любого значения спроса $d(t) \in \boldsymbol{D}(t)$ выполнено включение $x(t+1) \in \boldsymbol{X}$, где $x(t)$ определяется рекуррентным соотношением (1).

Определение 2. Будем называть стратегию $\Phi=\{u(t), t \geq 0\}$ допустимой на интервале $\boldsymbol{X}$ стратегией управления для начального состояния $x(0) \in \boldsymbol{X}$, если все управления, составляющие эту стратегию, являются допустимыми на интервале $\boldsymbol{X}$. Множество стратегий, допустимых на интервале $\boldsymbol{X}$ при начальном запасе $x(0) \in \boldsymbol{X}$ будем обозначать $\Phi(x(0))$.

Определение 3. Будем называть $\hat{x}$, $\hat{x} \in \mathrm{X}$, допустимым уровнем запаса в системе, если для любого начального запаса $x(0) \in \boldsymbol{X}(0, \hat{x})$ существует допустимая на интервале $\boldsymbol{X}(0, \hat{x})$ стратегия управления, где $\boldsymbol{X}(a,b) = [a,b]$ – интервальнозначная вектор-функция, которая определена для любых $a, b \in R^n$, $a \leq b$.

Определим затраты системы на хранение запаса в виде функции

$$C(\hat{x}) = h^{\mathrm{T}} \hat{x}\,, \tag{6}$$

где $\hat{x} \in \boldsymbol{X}$ – допустимый уровень запаса; $h \in R^n$ – вектор затрат, $h \geq 0$, $h \neq 0$, i-я компонента которого представляет затраты на хранение единицы запаса в i-м узле сети; символ T означает транспонирование. Понятно, что если для любого начального состояния $x(0) \in \boldsymbol{X}$ существует стратегия управления $\Phi \in \Phi(x(0))$, то $\overline{X}$ является допустимым уровнем запаса и, следовательно, затраты системы меньше либо равны $C(\overline{X})$ при любых потерях запаса $A(t) \in \boldsymbol{A}$ и спросе $d(t) \in \boldsymbol{D}(t)$ для всех $t \geq 0$. Чтобы минимизировать затраты системы, необходимо найти оптимальный допустимый уровень запаса $\hat{x}^*$, минимизирующий функцию затрат (6), и стратегию управления запасами $\Phi^* \in \Phi(x(0))$, гарантирующую условие

$$x(t) \in \boldsymbol{X}(0, \hat{x}^*), \quad t \geq \tau^* \geq 0\,, \tag{7}$$

при любых потерях запаса $A(t) \in \boldsymbol{A}$ и любом спросе $d(t) \in \boldsymbol{D}(t)$. Стратегию $\Phi^* \in \Phi(x(0))$ будем называть оптимальной допустимой стратегией управления для начального состояния $x(0) \in \boldsymbol{X}$, а время τ^* – скоростью сходимости системы к оптимальному допустимому запасу $\hat{x}^*$.

Определение оптимального допустимого уровня запаса

Теорема 1 (о существовании допустимого управления). Для любого состояния системы $x(t) \in \boldsymbol{X}$ в момент времени t, $t \geq 0$, допустимое на интервале $\boldsymbol{X}$ управление с обратной связью $u(t)=U(x(t), t)$, $u(t) \in \boldsymbol{U}$, существует и определяется из включения

$$\underline{A}x(t) + Bu(t) \in (I - \mathrm{wid}\,\boldsymbol{A})\boldsymbol{X} + \mathrm{opp}\,\boldsymbol{ED}(t)\,, \tag{8}$$

если и только если выполнены условия

$$\mathrm{wid}\,\boldsymbol{ED}(t) \leq (I - \mathrm{wid}\,\boldsymbol{A})\overline{X}\,, \tag{9}$$

$$\boldsymbol{ED}(t) \subseteq (I - \overline{A})\boldsymbol{X} + \{-BU\}\,, \tag{10}$$

где интервальный вектор $\boldsymbol{ED}(t) \in IR^n$, $\boldsymbol{ED}(t) = [\underline{ED}(t), \overline{ED}(t)]$, получен умножением матрицы E на интервальный вектор $\boldsymbol{D}(t)$; $\mathrm{opp}\,\boldsymbol{x} = [-\underline{x}, -\overline{x}]$ – интервал, обратный по сложению к интервалу $\boldsymbol{x}$ в полной интервальной арифметике Каухера, $\boldsymbol{x}$ + opp $\boldsymbol{x}$ = 0; множество $\{-BU\} = \{x \in R^n \mid x = -Bu, u \in \boldsymbol{U}\}$; $I \in R^{n\times n}$ – единичная матрица.

Доказательство. Для состояния системы $x(t) \in \boldsymbol{X}$ построим управление $u(t)$ в виде (8). Включение (8) имеет смысл, если и только если выполнено (9). Действительно, интервал $(I - \mathrm{wid}\,\boldsymbol{A})\boldsymbol{X} + \mathrm{opp}\,\boldsymbol{ED}(t)$ является правильным, если и только если

$$\underline{(I - \mathrm{wid}\,\boldsymbol{A})\boldsymbol{X} + \mathrm{opp}\boldsymbol{ED}(t)} \leq \overline{(I - \mathrm{wid}\,\boldsymbol{A})\boldsymbol{X} + \mathrm{opp}\boldsymbol{ED}(t)} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (I - \mathrm{wid}\,\boldsymbol{A})\underline{X} - \underline{ED}(t) \leq (I - \mathrm{wid}\,\boldsymbol{A})\overline{X} - \overline{ED}(t) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \overline{ED}(t) - \underline{ED}(t) \leq (I - \mathrm{wid}\,\boldsymbol{A})(\overline{X} - \underline{X}) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \mathrm{wid}\,\boldsymbol{ED}(t) \leq (I - \mathrm{wid}\,\boldsymbol{A})\,\mathrm{wid}\,\boldsymbol{X} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \mathrm{wid}\,\boldsymbol{ED}(t) \leq (I - \mathrm{wid}\,\boldsymbol{A})\overline{X},$$

так как $\underline{X}=0$ по условию (3). Покажем, что такое управление существует для любого $x(t)\in \boldsymbol{X}$, если и только если выполнено условие (10). Имеем

$$\begin{gathered}\forall x(t)\in \boldsymbol{X}\ \exists u(t)\in \boldsymbol{U} \mid \underline{A}x(t)+Bu(t)\in (I-\mathrm{wid}\boldsymbol{A})\boldsymbol{X}+\mathrm{opp}\boldsymbol{ED}(t)\Leftrightarrow\\ \Leftrightarrow \forall x(t)\in \boldsymbol{X}\ \exists u(t)\in \boldsymbol{U} \mid \underline{A}x(t)+\boldsymbol{ED}(t)\subseteq (I-\mathrm{wid}\boldsymbol{A})\boldsymbol{X}-Bu(t)\Leftrightarrow\\ \Leftrightarrow \forall x(t)\in \boldsymbol{X} \mid \underline{A}x(t)+\boldsymbol{ED}(t)\subseteq (I-(\overline{A}-\underline{A}))\boldsymbol{X}+\{-BU\}\Leftrightarrow\\ \Leftrightarrow \underline{A}\boldsymbol{X}+\boldsymbol{ED}(t)\subseteq (I-\overline{A})\boldsymbol{X}+\underline{A}\boldsymbol{X}+\{-BU\}\Leftrightarrow\\ \Leftrightarrow \boldsymbol{ED}(t)\subseteq (I-\overline{A})\boldsymbol{X}+\{-BU\}.\end{gathered}$$

Покажем, что управление вида (8) является допустимым на интервале $\boldsymbol{X}$ для состояния $x(t)\in\boldsymbol{X}$, т.е. $\forall A(t)\in \boldsymbol{A}\ \ \forall d(t)\in \boldsymbol{D}(t)\mid x(t+1)\in \boldsymbol{X}$. Действительно,

$$\begin{gathered}\forall A(t)\in \boldsymbol{A}\ \forall d(t)\in \boldsymbol{D}(t)\mid x(t+1)=A(t)x(t)+Bu(t)+\\ +Ed(t)\in \boldsymbol{A}x(t)+Bu(t)+\boldsymbol{ED}(t)=\underline{A}x(t)+Bu(t)+\\ +\boldsymbol{X}(0,\mathrm{wid}\,\boldsymbol{A})x(t)+\boldsymbol{ED}(t)\subseteq (I-\mathrm{wid}\,\boldsymbol{A})\boldsymbol{X}+\mathrm{opp}\boldsymbol{ED}(t)+\\ +\boldsymbol{X}(0,\mathrm{wid}\,\boldsymbol{A})\boldsymbol{X}+\boldsymbol{ED}(t)=\boldsymbol{X},\end{gathered}$$

так как $\boldsymbol{X}(0,\mathrm{wid}\boldsymbol{A})\cdot\boldsymbol{X}=\boldsymbol{X}(0,\mathrm{wid}\boldsymbol{A}\cdot\overline{X})=\mathrm{wid}\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{X}$. Теорема доказана.

Следствие 1. Для любого начального состояния $x(0)\in\boldsymbol{X}$ допустимая на интервале $\boldsymbol{X}$ стратегия управления $\Phi\in\Phi(x(0))$ существует, если и только если для всех $t\geq 0$ выполнены условия (9), (10). Управления, составляющие эту стратегию, определяются из включения (8). (Доказательство легко получить с учетом определения 2.)

Замечание 1. Интервал $(I-\mathrm{wid}\boldsymbol{A})\boldsymbol{X}+\mathrm{opp}\boldsymbol{ED}(t)$ определяет уровень запаса, гарантирующий полное и своевременное удовлетворение спроса, и должен быть неотрицательным для всех $t\geq 0$. Это условие выполняется, когда $\underline{ED}(t)\leq 0$ для всех $t\geq 0$.

Будем считать далее, что условия теоремы 1 выполнены для всех $t\geq 0$ и для любого начального состояния $x(0)\in\boldsymbol{X}$ существует допустимая на интервале $\boldsymbol{X}$ стратегия управления $\Phi\in\Phi(x(0))$, т.е. $\overline{X}$ является допустимым уровнем запаса.

Теорема 2 (об оптимальном допустимом уровне запаса). Оптимальный допустимый уровень запаса $\hat{x}^*$ является решением задачи

$$C(\hat{x})=h^{\mathrm{T}}\hat{x}\Rightarrow\min_{\hat{x}} \tag{11}$$

при ограничениях

$$(I-\mathrm{wid}\,\boldsymbol{A})^{-1}\max_{t\geq 0}\{\mathrm{wid}\,\boldsymbol{ED}(t)\}\leq\hat{x}\leq\overline{X}, \tag{12}$$

$$\boldsymbol{ED}(t)\subseteq (I-\overline{A})\boldsymbol{X}(0,\hat{x})+\{-BU\}\quad \text{для}\quad \forall t\geq 0. \tag{13}$$

Доказательство. По определению 3 уровень запаса $\hat{x}$ является допустимым, если

$$\hat{x}\in\boldsymbol{X}\ \ (\text{или }0\leq\hat{x}\leq\overline{X}), \tag{14}$$

и для любого начального состояния $x(0)\in\boldsymbol{X}(0,\hat{x})$ существует допустимая на интервале $\boldsymbol{X}(0,\hat{x})$ стратегия управления. По следствию 1 такая стратегия существует, если и только если выполнены условия

$$\mathrm{wid}\,\boldsymbol{ED}(t)\leq (I-\mathrm{wid}\,\boldsymbol{A})\hat{x}\quad\text{для}\quad\forall t\geq 0, \tag{15}$$

$$\boldsymbol{ED}(t)\subseteq (I-\overline{A})\boldsymbol{X}(0,\hat{x})+\{-BU\}\quad\text{для}\quad\forall t\geq 0. \tag{16}$$

Условие (16) совпадает с (13). Условие (15) равносильно неравенству $\max\limits_{t\geq 0}\{\mathrm{wid}\boldsymbol{ED}(t)\}\leq (I-\mathrm{wid}\boldsymbol{A})\hat{x}$, следовательно, $(I-\mathrm{wid}\boldsymbol{A})^{-1}\max\limits_{t\geq 0}\{\mathrm{wid}\boldsymbol{ED}(t)\}\leq\hat{x}$. В силу того, что $\max\limits_{t\geq 0}\{\mathrm{wid}\boldsymbol{ED}(t)\}\leq (I-\mathrm{wid}\boldsymbol{A})\overline{X}$ (так как (9) выполнено для всех $t\geq 0$), имеем $0\leq (I-\mathrm{wid}\,\boldsymbol{A})^{-1}\max\limits_{t\geq 0}\{\mathrm{wid}\,\boldsymbol{ED}(t)\}\leq\overline{X}$, значит, множество решений системы неравенств (14) и (15) имеет вид (12). Теорема доказана.

Следствие 2. Если для некоторого вектора затрат $h\geq 0$, $h\neq 0$, оптимальный допустимый уровень запаса равен $\hat{x}^*=(I-\mathrm{wid}\,\boldsymbol{A})^{-1}\max\limits_{t\geq 0}\{\mathrm{wid}\,\boldsymbol{ED}(t)\}$, то он будет таким же и для любого другого $h\geq 0$, $h\neq 0$. (Доказательство основывается на том, что функция $C(\hat{x})$ возрастает по $\hat{x}$.)

Допустим, что в некоторый момент времени $\tau^*\geq 0$ состояние системы попадет в интервал $\boldsymbol{X}(0,\hat{x}^*)$. По теореме 1 для любого $x(t)\in\boldsymbol{X}(0,\hat{x}^*)$ в момент времени $t\geq\tau^*$ допустимое на интервале $\boldsymbol{X}(0,\hat{x}^*)$ управление $u(t)=U(x(t),t)$, $u(t)\in\boldsymbol{U}$, можно определить из включения

$$\underline{A}x(t)+Bu(t)\in (I-\mathrm{wid}\,\boldsymbol{A})\boldsymbol{X}(0,\hat{x}^*)+\mathrm{opp}\,\boldsymbol{ED}(t). \tag{17}$$

Управления $u(t)$, удовлетворяющие (4) и (17), гарантируют условие (7) и составляют оптимальную стратегию управления.

Замечание 2. Включение (17) обращается в равенство

$$\underline{A}x(t)+Bu(t)=-\underline{ED}(t),$$

если $\hat{x}^*=(I-\mathrm{wid}\,\boldsymbol{A})^{-1}\max\limits_{t\geq 0}\{\mathrm{wid}\,\boldsymbol{ED}(t)\}$ и ширина интервала возможных значений неизвестного спроса постоянна ($\mathrm{wid}\,\boldsymbol{ED}(t)=\mathrm{const}$ для всех $t\geq 0$).

Замечание 3. Начиная с момента времени τ^*, управления $u(t)$ логично выбирать, минимизируя затраты на управления (транспортные расходы, затраты на производство и т.д.) при ограничениях (4) и (17), поскольку любое управление, удовлетворяющее этим ограничениям, является оптимальным в смысле (7).

Построение оптимальной допустимой стратегии управления

Проблема существования оптимальной допустимой стратегии управления не возникает в двух случаях:

1) если оптимальный допустимый уровень запаса $\hat{x}^*=\overline{X}$, то любая допустимая на интервале $\boldsymbol{X}$ стратегия управления является оптимальной;

2) если оптимальный допустимый уровень запаса $\hat{x}^*\leq\overline{X}$, $\hat{x}^*\neq\overline{X}$, и начальный запас $x(0)\in\boldsymbol{X}(0,\hat{x}^*)$, то

любая допустимая на интервале $\boldsymbol{X}(0,\hat{x}^*)$ стратегия управления является оптимальной.

В этих двух случаях управления, составляющие оптимальную стратегию $\Phi^* \in \Phi(x(0))$, определяются из включения (17) для всех $t \geq 0$ и скорость сходимости системы к оптимальному запасу $\tau^* = 0$. В тех случаях, когда хотя бы в одном из узлов начальный запас больше оптимального уровня запаса ($\exists i \mid \hat{x}_i^* < x_i(0) \leq \overline{X}_i$), требуется определить условия существования оптимальной допустимой стратегии $\Phi^* \in \Phi(x(0))$, гарантирующей сходимость к оптимальному запасу $\hat{x}^*$, и оценить скорость сходимости системы.

В работе [10] показано, что если потери запаса отсутствуют, либо коэффициенты потерь запаса точно известны, то система с интервально заданным нестационарным спросом сходится к оптимальному запасу за конечное число шагов при любом начальном состоянии $x(0) \in \boldsymbol{X}$ и найдена оценка скорости сходимости. Для случая с интервально заданными коэффициентами удалось доказать лишь асимптотическую сходимость системы и получить стратегию управления, гарантирующую

$$x(t) \in \boldsymbol{X}(0,\hat{x}^*) \quad \text{при} \quad t \to \infty \tag{18}$$

для любого $x(0) \in \boldsymbol{X}$. Достаточные условия существования такой стратегии приведены в теореме 3.

Теорема 3 (о существовании оптимальной допустимой стратегии). Если для всех $t \geq 0$ выполнены условия (9), (10), для всех $t \geq 1$ выполнено условие

$$(I - \underline{A})r(t-1) \leq r(t), \tag{19}$$

где $r(t) = (I - \operatorname{wid}\boldsymbol{A})\hat{x}^* - \operatorname{wid}\boldsymbol{ED}(t) \in R^n, r(t) \geq 0$, и существует число $\varepsilon > -\min\limits_{i=1,n}\{(1-\underline{\alpha}_i)\operatorname{wid}\boldsymbol{a}_i\}$ такое, что

$$\boldsymbol{ED} + (\varepsilon I + \operatorname{wid}\boldsymbol{A})\boldsymbol{X}(0,\theta) \subseteq (I - \overline{A})\boldsymbol{X}(0,\hat{x}^*) + \{-BU\}, \tag{20}$$

где $\boldsymbol{ED} = E \cdot \boldsymbol{D} \in IR^n$, $\boldsymbol{ED} = [\underline{ED}, \overline{ED}]$, $\theta = \overline{X} - \hat{x}^* \in R^n, \theta \geq 0$, $\theta \neq 0$, то для любого начального состояния $x(0) \in \boldsymbol{X}$ существует допустимая на интервале $\boldsymbol{X}$ стратегия управления $\Phi^* \in \Phi(x(0))$, гарантирующая утверждение (18).

Доказательство. Введем вектор

$$\tilde{x}(t+1) = \underline{A}x(t) + Bu(t), \quad t \geq 0,$$

который определяет минимальный возможный уровень запаса после поставки в момент времени t, но до очередного предъявления спроса. Тогда

$$\begin{aligned} x(t+1) &= A(t)x(t) + Bu(t) + Ed(t) = \\ &= \tilde{x}(t+1) + (A(t) - \underline{A})x(t) + Ed(t), \quad t \geq 0. \end{aligned}$$

Покажем по индукции, что для любого начального состояния $x(0) \in \boldsymbol{X}$ существует допустимая на интервале **X** стратегия $\Phi \in \Phi(x(0))$, такая, что

$$\begin{aligned} \tilde{x}(t) \in \big[&-\underline{ED}(t-1), \max\{(I - \operatorname{wid}\boldsymbol{A})\hat{x}^* - \overline{ED}(t-1), (I - \operatorname{wid}\boldsymbol{A})\overline{X} - \\ &- \overline{ED}(t-1) - (I - \underline{A} + \varepsilon I)(I + \underline{A} + \ldots + \underline{A}^{t-2})\theta\}\big], \quad t \geq 1. \end{aligned} \tag{21}$$

Так как для всех $t \geq 0$ выполнены условия (9), (10), то по теореме 1 для любого начального состояния $x(0) \in \boldsymbol{X}$ существует допустимое на интервале $\boldsymbol{X}$ управление такое, что

$$\begin{aligned} \tilde{x}(1) &\in (I - \operatorname{wid}\boldsymbol{A})\boldsymbol{X} + \operatorname{opp}\boldsymbol{ED}(0) = \\ &= [-\underline{ED}(0), (I - \operatorname{wid}\boldsymbol{A})\overline{X} - \overline{ED}(0)]. \end{aligned}$$

Так как $\hat{x}^* \leq \overline{X}$, включение (21) справедливо для $t = 1$. Пусть (21) справедливо для некоторого $t \geq 2$. Покажем, что оно справедливо для $t + 1$. Для этого, используя разложения

$$I = \underline{A} + (I - \underline{A}), \quad I - \overline{A} = (I - \underline{A})(I - \operatorname{wid}\boldsymbol{A}) - \underline{A}\operatorname{wid}\boldsymbol{A}$$

и свойства интервально-арифметических операций

$$\begin{gathered} (a+b)\boldsymbol{x} = a\boldsymbol{x} + b\boldsymbol{x}, \quad \forall a,b \geq 0,\ a,b \in R, \\ (a-b)\boldsymbol{x} = a\boldsymbol{x} + b \cdot \operatorname{opp}\boldsymbol{x}, \quad \forall a \geq b \geq 0,\ a,b \in R, \\ \operatorname{opp}(c\boldsymbol{x}) = c \cdot \operatorname{opp}\boldsymbol{x}, \quad c(\boldsymbol{x} + \boldsymbol{y}) = c\boldsymbol{x} + c\boldsymbol{y}, \quad \forall c \in R, \end{gathered}$$

представим (20) в виде эквивалентного включения

$$\begin{gathered} \underline{A}\boldsymbol{ED}(t) + (I - \underline{A})\boldsymbol{ED}(t) + \boldsymbol{ED} + \operatorname{opp}\boldsymbol{ED}(t) + \\ + (\varepsilon I + (I - \underline{A})\operatorname{wid}\boldsymbol{A})\boldsymbol{X}(0,\theta) + \underline{A}\operatorname{wid}(\boldsymbol{A})\boldsymbol{X}(0,\theta) \subseteq \\ \subseteq (I - \underline{A})(I - \operatorname{wid}\boldsymbol{A})\boldsymbol{X}(0,\hat{x}^*) + \\ + \underline{A}\operatorname{wid}(\boldsymbol{A})\operatorname{opp}\boldsymbol{X}(0,\hat{x}^*) + \{-BU\}, \end{gathered}$$

откуда имеем

$$\begin{gathered} \underline{A}\boldsymbol{ED}(t) + (\varepsilon I + (I - \underline{A})\operatorname{wid}\boldsymbol{A})\boldsymbol{X}(0,\theta) + \\ + \boldsymbol{ED} + \operatorname{opp}\boldsymbol{ED}(t) + \underline{A}\operatorname{wid}\boldsymbol{A}(\boldsymbol{X}(0,\theta) + \boldsymbol{X}(0,\hat{x}^*)) \subseteq \\ \subseteq (I - \underline{A})(I - \operatorname{wid}\boldsymbol{A})\boldsymbol{X}(0,\hat{x}^*) + (I - \underline{A})\operatorname{opp}\boldsymbol{ED}(t) + \{-BU\} \end{gathered}$$

и, так как $\operatorname{wid}\boldsymbol{A}(\boldsymbol{X}(0,\theta) + \boldsymbol{X}(0,\hat{x}^*)) = \operatorname{wid}(\boldsymbol{A})\boldsymbol{X} =$ $= \boldsymbol{X}(0, \operatorname{wid}(\boldsymbol{A})\overline{X}) = \boldsymbol{X}(0, \operatorname{wid}\boldsymbol{A})\boldsymbol{X} = (\boldsymbol{A} - \underline{A})\boldsymbol{X}$, получаем

$$\begin{gathered} \underline{A}\boldsymbol{ED}(t) + (\varepsilon I + (I - \underline{A})\operatorname{wid}\boldsymbol{A})\boldsymbol{X}(0,\theta) + \\ + \boldsymbol{ED} + \operatorname{opp}\boldsymbol{ED}(t) + \underline{A}(\boldsymbol{A} - \underline{A})\boldsymbol{X} \subseteq \\ \subseteq (I - \underline{A})((I - \operatorname{wid}\boldsymbol{A})\boldsymbol{X}(0,\hat{x}^*) + \operatorname{opp}\boldsymbol{ED}(t)) + \{-BU\}. \end{gathered} \tag{22}$$

Рассмотрим $\tilde{x}(t+1) = \underline{A}x(t) + Bu(t) = \underline{A}(\tilde{x}(t) + Ed(t-1) + (A(t-1) - \underline{A})x(t-1)) + Bu(t) \pm (\varepsilon I + (I - \underline{A})\operatorname{wid}\boldsymbol{A})\theta(t) \pm \tilde{\theta}(t)$, где $\theta(t) \in \boldsymbol{X}(0,\theta)$, $\tilde{\theta}(t) \in \boldsymbol{ED} + \operatorname{opp}\boldsymbol{ED}(t-1)$. По условию (22) для любых значений $d(t-1) \in \boldsymbol{D}(t-1)$, $A(t-1) \in \boldsymbol{A}$, $x(t-1) \in \boldsymbol{X}$, $\theta(t) \in \boldsymbol{X}(0,\theta)$ и $\tilde{\theta}(t) \in \boldsymbol{ED} + \operatorname{opp}\boldsymbol{ED}(t-1)$ найдется такое $u(t) \in \boldsymbol{U}$, для которого

$$\begin{gathered} \underline{A}Ed(t-1) + (\varepsilon I + (I - \underline{A})\operatorname{wid}\boldsymbol{A})\theta(t) + \\ + \tilde{\theta}(t) + \underline{A}(A(t-1) - \underline{A})x(t-1) + Bu(t) \subseteq \\ \subseteq (I - \underline{A})((I - \operatorname{wid}\boldsymbol{A})\boldsymbol{X}(0,\hat{x}^*) + \operatorname{opp}\boldsymbol{ED}(t-1)). \end{gathered}$$

Следовательно,

$$\widetilde{x}(t+1)=\underline{A}\widetilde{x}(t)-(\varepsilon I+(I-\underline{A})\,\mathrm{wid}\,\boldsymbol{A})\theta(t)-\widetilde{\theta}(t)+\Delta(t)\,, \quad (23)$$

где $\Delta(t)\in(I-\underline{A})((I-\mathrm{wid}\,\boldsymbol{A})\boldsymbol{X}(0,\hat{x}^*)+\mathrm{opp}\,\boldsymbol{ED}(t-1))$.

Будем выбирать компоненты векторов $\theta(t)$ и $\widetilde{\theta}(t)$ в момент времени t по следующему правилу:
Если выполнено условие

$$\underline{\alpha}_i\widetilde{x}_i(t)-(\varepsilon+(1-\underline{\alpha}_i)\,\mathrm{wid}\boldsymbol{a}_i)\theta_i-(\overline{ED}_i-\overline{ED}_i(t))\ \geq$$
$$\geq\underline{\alpha}_i((1-\mathrm{wid}\boldsymbol{a}_i)\hat{x}_i^*-\overline{ED}_i(t-1)), \quad (24)$$

то

$$\theta_i(t)=\theta_i\,,\ \widetilde{\theta}_i(t)=\overline{ED}_i-\overline{ED}_i(t-1)\,,$$

иначе

$$\theta_i(t)=\max(0,\theta_i'(t))\,,\ \widetilde{\theta}_i(t)=\widetilde{\theta}_i'(t)\,,$$

где

$$\theta_i'(t)=\frac{\underline{\alpha}_i\widetilde{x}_i(t)-(\overline{ED}_i-\overline{ED}_i(t))-\underline{\alpha}_i((1-\mathrm{wid}\boldsymbol{a}_i)\hat{x}_i^*-\overline{ED}_i(t-1))}{\varepsilon+(1-\underline{\alpha}_i)\mathrm{wid}\boldsymbol{a}_i}\,,$$

$\widetilde{\theta}_i'(t)$ – любое значение из интервала $\boldsymbol{ED}_i+\mathrm{opp}\boldsymbol{ED}_i(t-1)$, такое, что $\widetilde{x}_i(t+1)\in(1-\mathrm{wid}\,\boldsymbol{a}_i)\boldsymbol{X}(0,\hat{x}_i^*)+\mathrm{opp}\,\boldsymbol{ED}_i(t)$ для любого $\Delta_i(t)\in(1-\underline{\alpha}_i)((1-\mathrm{wid}\boldsymbol{a}_i)\boldsymbol{X}(0,\hat{x}_i^*)+\mathrm{opp}\boldsymbol{ED}_i(t-1))$.

Покажем, что $\theta(t)\in\boldsymbol{X}(0,\theta)$, $\widetilde{\theta}(t)\in\boldsymbol{ED}+\mathrm{opp}\boldsymbol{ED}(t-1)$. Согласно принятому правилу, $\theta_i(t)$ либо равна θ_i (верхней границе i-й компоненты вектора $\boldsymbol{X}(0,\theta)$), либо равна нулю (нижней границе i-й компоненты вектора $\boldsymbol{X}(0,\theta)$), либо равна $\theta_i'(t)$, когда $0<\theta_i'(t)<\theta_i$ (в этом случае

$$\underline{\alpha}_i\widetilde{x}_i(t)-(\varepsilon+(1-\underline{\alpha}_i)\,\mathrm{wid}\,\boldsymbol{a}_i)\theta_i-(\overline{ED}_i-\overline{ED}_i(t))\ <$$
$$<\underline{\alpha}_i((1-\mathrm{wid}\,\boldsymbol{a}_i)\hat{x}_i^*-\overline{ED}_i(t-1)),$$

откуда получаем $\theta_i'(t)<\theta_i$, так как по условию теоремы $\varepsilon+(1-\underline{\alpha}_i)\mathrm{wid}\boldsymbol{a}_i>0$ для $\forall i=\overline{1,n}$). Значит, $\theta(t)\in\boldsymbol{X}(0,\theta)$. $\widetilde{\theta}_i(t)$ либо равна $\overline{ED}_i-\overline{ED}_i(t-1)$ (верхней границе вектора $\boldsymbol{ED}_i+\mathrm{opp}\boldsymbol{ED}_i(t-1)$), либо $\widetilde{\theta}_i'(t)\in\boldsymbol{ED}_i+\mathrm{opp}\boldsymbol{ED}_i(t-1)$.

Значит, $\widetilde{\theta}(t)\in\boldsymbol{ED}+\mathrm{opp}\boldsymbol{ED}(t-1)$.

Пусть условие (24) выполнено. Если $\underline{\alpha}_i\neq0$, то $\widetilde{x}_i(t)\geq(1-\mathrm{wid}\,\boldsymbol{a}_i)\hat{x}_i^*-\overline{ED}_i(t-1)+((\varepsilon+(1-\underline{\alpha}_i)\,\mathrm{wid}\,\boldsymbol{a}_i)\theta_i+\overline{ED}_i-\overline{ED}_i(t))/\underline{\alpha}_i\geq(1-\mathrm{wid}\,\boldsymbol{a}_i)\hat{x}_i^*-\overline{ED}_i(t-1)$, тогда из (21) получаем $\widetilde{x}_i(t)\leq(1-\mathrm{wid}\,\boldsymbol{a}_i)\overline{X}_i-\overline{ED}_i(t-1)-(1-\underline{\alpha}_i+\varepsilon)(1+\underline{\alpha}_i+\ldots+\underline{\alpha}_i^{t-2})\theta_i$. Выбирая $\theta_i(t)=\theta_i$, $\widetilde{\theta}_i(t)=\overline{ED}_i-\overline{ED}_i(t-1)$, имеем

$$\widetilde{x}_i(t+1)=\underline{\alpha}_i\widetilde{x}_i(t)-(\varepsilon+(1-\underline{\alpha}_i)\mathrm{wid}\boldsymbol{a}_i)\theta_i-$$
$$-(\overline{ED}_i-\overline{ED}_i(t-1))+\Delta_i(t)\leq\underline{\alpha}_i\big((1-\mathrm{wid}\boldsymbol{a}_i)\overline{X}_i-\overline{ED}_i(t-1)-$$
$$-(1-\underline{\alpha}_i+\varepsilon)(1+\underline{\alpha}_i+\ldots+\underline{\alpha}_i^{t-2})\theta_i\big)-(\varepsilon+(1-\underline{\alpha}_i)\mathrm{wid}\boldsymbol{a}_i)\theta_i-$$
$$-(\overline{ED}_i-\overline{ED}_i(t-1))+(1-\underline{\alpha}_i)((1-\mathrm{wid}\boldsymbol{a}_i)\hat{x}_i^*-\overline{ED}_i(t-1))=$$
$$=(1-\mathrm{wid}\boldsymbol{a}_i)\overline{X}_i-\overline{ED}_i-\underline{\alpha}_i(1-\underline{\alpha}_i+\varepsilon)(1+\underline{\alpha}_i+\ldots+\underline{\alpha}_i^{t-2})\theta_i-$$
$$-(\varepsilon+(1-\underline{\alpha}_i)\mathrm{wid}\boldsymbol{a}_i)\theta_i-(1-\underline{\alpha}_i)(1-\mathrm{wid}\boldsymbol{a}_i)(\underbrace{\overline{X}_i-\hat{x}_i^*}_{=\theta_i})\leq$$
$$\leq(1-\mathrm{wid}\boldsymbol{a}_i)\overline{X}_i-\overline{ED}_i(t)-(1-\underline{\alpha}_i+\varepsilon)(1+\underline{\alpha}_i+\ldots+\underline{\alpha}_i^{t-1})\theta_i$$

для $\forall\Delta_i(t)\in(1-\underline{\alpha}_i)((1-\mathrm{wid}\,\boldsymbol{a}_i)\boldsymbol{X}(0,\hat{x}_i^*)+\mathrm{opp}\,\boldsymbol{ED}_i(t-1))$.

Чтобы оценить нижнюю границу $\widetilde{x}_i(t+1)$, рассмотрим два случая: 1) если

$$\underline{\alpha}_i\widetilde{x}_i(t)-(\varepsilon+(1-\underline{\alpha}_i)\,\mathrm{wid}\,\boldsymbol{a}_i)\theta_i-(\overline{ED}_i-$$
$$-\overline{ED}_i(t-1))-(1-\underline{\alpha}_i)\underline{ED}_i(t-1)\geq(I-\mathrm{wid}\,\boldsymbol{a}_i)\hat{x}_i^*-\overline{ED}_i(t)\,,$$

то

$$\widetilde{x}_i(t+1)=\underline{\alpha}_i\widetilde{x}_i(t)-(\varepsilon+(1-\underline{\alpha}_i)\,\mathrm{wid}\,\boldsymbol{a}_i)\theta_i-$$
$$-(\overline{ED}_i-\overline{ED}_i(t-1))+\Delta_i(t)\geq(1-\mathrm{wid}\,\boldsymbol{a}_i)\hat{x}_i^*-\overline{ED}_i(t)$$

для $\forall\Delta_i(t)\in(1-\underline{\alpha}_i)((1-\mathrm{wid}\,\boldsymbol{a}_i)\boldsymbol{X}(0,\hat{x}_i^*)+\mathrm{opp}\,\boldsymbol{ED}_i(t-1))$;
2) если

$$\underline{\alpha}_i\widetilde{x}_i(t)-(\varepsilon+(1-\underline{\alpha}_i)\,\mathrm{wid}\,\boldsymbol{a}_i)\theta_i-(\overline{ED}_i-\overline{ED}_i(t-1))-$$
$$-(1-\underline{\alpha}_i)\underline{ED}_i(t-1)<(I-\mathrm{wid}\,\boldsymbol{a}_i)\hat{x}_i^*-\overline{ED}_i(t)\,,\text{ то}$$

$$\widetilde{x}_i(t+1)=\underline{\alpha}_i\widetilde{x}_i(t)-(\varepsilon+(1-\underline{\alpha}_i)\,\mathrm{wid}\boldsymbol{a}_i)\theta_i-(\overline{ED}_i-$$
$$-\overline{ED}_i(t-1))+\Delta_i(t)\geq\underline{\alpha}_i((1-\mathrm{wid}\boldsymbol{a}_i)\hat{x}_i^*-\overline{ED}_i(t-1))-$$
$$-\overline{ED}_i(t)+\overline{ED}_i(t-1)-(1-\underline{\alpha}_i)\underline{ED}_i(t-1)=-\underline{ED}_i(t)+r_i(t)-$$
$$-(1-\underline{\alpha}_i)r_i(t-1)\geq\langle\text{по условию}(19)\rangle\geq-\underline{ED}_i(t)$$

для $\forall\Delta_i(t)\in(1-\underline{\alpha}_i)((1-\mathrm{wid}\,\boldsymbol{a}_i)\boldsymbol{X}(0,\hat{x}_i^*)+\mathrm{opp}\,\boldsymbol{ED}_i(t-1))$.

Если $\underline{\alpha}_i=0$, то $\theta_i=0$ ($\hat{x}_i^*=\overline{X}_i$) и $\overline{ED}_i=\overline{ED}_i(t)$ (иначе (24) не выполнено). Выбирая $\theta_i(t)=0$, $\widetilde{\theta}_i(t)=\overline{ED}_i(t)-\overline{ED}_i(t-1)$, имеем

$$\widetilde{x}_i(t+1)=-(\overline{ED}_i(t)-\overline{ED}_i(t-1))+\Delta_i(t)\in[-\overline{ED}_i(t)+$$
$$+\overline{ED}_i(t-1)-\underline{ED}_i(t-1),(1-\mathrm{wid}\,\boldsymbol{a}_i)\hat{x}_i^*-\overline{ED}_i(t)]\subseteq$$
$$\subseteq(1-\mathrm{wid}\,\boldsymbol{a}_i)\boldsymbol{X}(0,\hat{x}_i^*)-\boldsymbol{ED}_i(t),$$

так как по условию (19) $r_i(t-1)\leq r_i(t)$, а значит, $\mathrm{wid}\,\boldsymbol{ED}_i(t)\leq\mathrm{wid}\,\boldsymbol{ED}_i(t-1)$.

Таким образом, если (24) выполнено, то

$$\widetilde{x}_i(t+1)\in\big[-\underline{ED}_i(t),(1-\mathrm{wid}\,\boldsymbol{a}_i)\overline{X}_i-\overline{ED}_i(t)-$$
$$-(1-\underline{\alpha}_i+\varepsilon)(1+\underline{\alpha}_i+\ldots+\underline{\alpha}_i^{t-1})\theta_i\big].$$

Пусть условие (24) не выполнено. Рассмотрим два случая: 1) $\theta_i'(t)\leq0$, при этом $\underline{\alpha}_i\widetilde{x}_i(t)\leq\underline{\alpha}_i((1-\mathrm{wid}\boldsymbol{a}_i)\hat{x}_i^*-\overline{ED}_i(t-1))+(\overline{ED}_i-\overline{ED}_i(t))$, тогда $\theta_i(t)=0$ и $\widetilde{x}_i(t+1)=\underline{\alpha}_i\widetilde{x}_i(t)-\widetilde{\theta}'(t)+\Delta(t)$. Если $\underline{\alpha}_i\neq0$, то, с учетом предположения индукции (21), имеем $-\underline{ED}_i(t-1)\leq\widetilde{x}_i(t)\leq$ $\leq(1-\mathrm{wid}\boldsymbol{a}_i)\hat{x}_i^*-\overline{ED}_i(t-1)+(\overline{ED}_i-\overline{ED}_i(t))/\underline{\alpha}_i$. Покажем, что для $\forall\widetilde{x}_i(t)\in[-\underline{ED}_i(t-1),(1-\mathrm{wid}\,\boldsymbol{a}_i)\hat{x}_i^*-\overline{ED}_i(t-1)+(\overline{ED}_i-\overline{ED}_i(t))/\underline{\alpha}_i]$ $\exists\widetilde{\theta}_i'(t)\in\boldsymbol{ED}_i+\mathrm{opp}\,\boldsymbol{ED}_i(t-1)$

$$\forall\Delta_i(t)\in(1-\underline{\alpha}_i)((1-\mathrm{wid}\,\boldsymbol{a}_i)\boldsymbol{X}(0,\hat{x}_i^*)+\mathrm{opp}\,\boldsymbol{ED}_i(t-1))\ |$$
$$\widetilde{x}_i(t+1)\in(1-\mathrm{wid}\,\boldsymbol{a}_i)\boldsymbol{X}(0,\hat{x}_i^*)+\mathrm{opp}\,\boldsymbol{ED}_i(t)\,.$$

Воспользуемся следующим свойством:

$$\forall x\in\boldsymbol{x}\ \exists b\in\boldsymbol{b}\ \forall c\in\boldsymbol{c}\ |\ x-b+c\in\boldsymbol{d}\Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow\boldsymbol{x}\subseteq\boldsymbol{d}+\mathrm{opp}\,\boldsymbol{c}+\boldsymbol{b},\ \mathrm{wid}\,\boldsymbol{c}\leq\mathrm{wid}\,\boldsymbol{d}, \quad (25)$$

где $\boldsymbol{x},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c},\boldsymbol{d}\in IR$. В нашем случае имеем

$$\mathrm{x}=[-\underline{\alpha}_i\underline{ED}_i(t-1),\underline{\alpha}_i((1-\mathrm{wid}\,\mathrm{a}_i)\hat{x}_i^*-$$
$$-\overline{ED}_i(t-1))+\overline{ED}_i-\overline{ED}_i(t)],$$
$$\boldsymbol{b}=\boldsymbol{ED}_i+\mathrm{opp}\,\boldsymbol{ED}_i(t-1)\,,$$
$$\boldsymbol{c}=(1-\underline{\alpha}_i)((1-\mathrm{wid}\,\boldsymbol{a}_i)\boldsymbol{X}(0,\hat{x}_i^*)+\mathrm{opp}\,\boldsymbol{ED}_i(t-1))\,,$$

$$\boldsymbol{d} = (1-\operatorname{wid}\boldsymbol{a}_i)\boldsymbol{X}(0,\hat{x}_i^*) + \operatorname{opp}\boldsymbol{ED}_i(t),$$

$$\begin{aligned}\boldsymbol{d} + \operatorname{opp}\boldsymbol{c} + \boldsymbol{b} &= \underline{\alpha}_i((1-\operatorname{wid}\boldsymbol{a}_i)\boldsymbol{X}(0,\hat{x}_i^*) + \operatorname{opp}\boldsymbol{ED}_i(t-1)) + \\ &+ \boldsymbol{ED}_i + \operatorname{opp}\boldsymbol{ED}_i(t) = [-\underline{\alpha}_i\underline{ED}_i(t-1) + \underline{ED}_i - \underline{ED}_i(t), \\ &\underline{\alpha}_i((1-\operatorname{wid}\boldsymbol{a}_i)\hat{x}_i^* + \overline{ED}_i(t-1)) + \overline{ED}_i - \overline{ED}_i(t)].\end{aligned}$$

Условие $\operatorname{wid}\boldsymbol{c} \le \operatorname{wid}\boldsymbol{d}$ выполнено в силу (19), так как $\operatorname{wid}\boldsymbol{c} = (1-\underline{\alpha}_i)((1-\operatorname{wid}\boldsymbol{a}_i)\hat{x}_i^* - \operatorname{wid}\boldsymbol{ED}_i(t-1)) = (1-\underline{\alpha}_i)r_i(t-1)$, $\operatorname{wid}\boldsymbol{d} = (1-\operatorname{wid}\boldsymbol{a}_i)\hat{x}_i^* - \operatorname{wid}\boldsymbol{ED}_i(t) = r_i(t)$.

Интервал $\boldsymbol{x} \subseteq \boldsymbol{d} + \operatorname{opp}\boldsymbol{c} + \boldsymbol{b}$, так как $\underline{x} \ge \underline{\boldsymbol{d} + \operatorname{opp}\boldsymbol{c} + \boldsymbol{b}}$ (в силу (2) $\underline{ED}_i - \underline{ED}_i(t) \le 0$ для $\forall i = \overline{1,n}$), а $\overline{x} = \overline{\boldsymbol{d} + \operatorname{opp}\boldsymbol{c} + \boldsymbol{b}}$.

Если $\underline{\alpha}_i = 0$ (в этом случае $\theta'_i(t) \le 0$ автоматически), то $\tilde{x}_i(t+1) = -\tilde{\theta}'(t) + \Delta(t)$. Покажем, что $\exists\tilde{\theta}'_i(t) \in \boldsymbol{ED}_i + \operatorname{opp}\boldsymbol{ED}_i(t-1)$ $\forall\Delta_i(t) \in (1-\underline{\alpha}_i)((1-\operatorname{wid}\boldsymbol{a}_i)\boldsymbol{X}(0,\hat{x}_i^*) + \operatorname{opp}\boldsymbol{ED}_i(t-1))$ | $\tilde{x}_i(t+1) \in (1-\operatorname{wid}\boldsymbol{a}_i)\boldsymbol{X}(0,\hat{x}_i^*) + \operatorname{opp}\boldsymbol{ED}_i(t)$. Имеем: $\boldsymbol{x} = 0$ – вырожденный интервал (число), $x \in \boldsymbol{d} + \operatorname{opp}\boldsymbol{c} + \boldsymbol{b} = \boldsymbol{ED}_i + \operatorname{opp}\boldsymbol{ED}_i(t)$ в силу (2). Следовательно, по свойству (25) $\tilde{\theta}'_i(t)$ существует;

2) $\underline{\theta'_i(t) > 0}$ (при этом $\underline{\alpha}_i \ne 0$), тогда $\theta_i(t) = \theta'_i(t)$ и $\tilde{x}_i(t+1) = \overline{ED}_i - \overline{ED}_i(t) + \underline{\alpha}_i((1-\operatorname{wid}\boldsymbol{a}_i)\hat{x}_i^* - \overline{ED}_i(t-1)) - \tilde{\theta}'(t) + \Delta(t)$. Имеем: вырожденный интервал

$$\boldsymbol{x} = x = \overline{ED}_i - \overline{ED}_i(t) + \underline{\alpha}_i((1-\operatorname{wid}\boldsymbol{a}_i)\hat{x}_i^* - \overline{ED}_i(t-1)),$$

интервалы $\boldsymbol{b}$, $\boldsymbol{c}$, $\boldsymbol{d}$ – такие же, как в предыдущем случае. Условие $x \in \boldsymbol{d} + \operatorname{opp}\boldsymbol{c} + \boldsymbol{b}$ выполнено, так как x равен верхней границе этого интервала. Следовательно, по свойству (25) $\tilde{\theta}'_i(t)$ существует (можно показать, что $\tilde{\theta}'_i(t) = \overline{ED}_i - \overline{ED}_i(t-1)$).

Таким образом, если (24) не выполнено, то

$$\tilde{x}_i(t+1) \in \left[-\underline{ED}_i(t), (1-\operatorname{wid}\boldsymbol{a}_i)\hat{x}_i^* - \overline{ED}_i(t)\right].$$

Следовательно,

$$\begin{aligned}\tilde{x}(t+1) \in \big[&-\underline{ED}(t), \max\big\{(I-\operatorname{wid}\boldsymbol{A})\hat{x}^* - \overline{ED}(t), (I-\operatorname{wid}\boldsymbol{A})\overline{X} - \\ &- \overline{ED}(t) - (I-\underline{A}+\varepsilon I)(I+\underline{A}+\ldots+\underline{A}^{t-1})\theta\big\}\big]. \quad (26)\end{aligned}$$

Покажем, что управление $u(t)$, удовлетворяющее (26), является допустимым на интервале $\boldsymbol{X}$ в момент времени t. Действительно, из (26) видно, что

$$\begin{aligned}\tilde{x}(t+1) &\in [-\underline{ED}(t), (I-\operatorname{wid}\boldsymbol{A})\overline{X} - \overline{ED}(t)] = \\ &= (I-\operatorname{wid}\boldsymbol{A})\boldsymbol{X} + \operatorname{opp}\boldsymbol{ED}(t),\end{aligned}$$

так как $1-\underline{\alpha}_i + \varepsilon > (1-\underline{\alpha}_i)\operatorname{wid}\boldsymbol{a}_i + \varepsilon > 0$ $\forall i = \overline{1,n}$.

По предположению индукции $x(t) \in \boldsymbol{X}$, следовательно,

$$\begin{aligned}\forall A(t) \in \boldsymbol{A}\ \forall d(t) \in \boldsymbol{D}(t) |\ x(t+1) &= \tilde{x}(t+1) + (A(t)-\underline{A})x(t) + \\ + Ed(t) &\in \tilde{x}(t+1) + (\boldsymbol{A}-\underline{A})x(t) + \boldsymbol{ED}(t) \subseteq \\ \subseteq (I-\operatorname{wid}\boldsymbol{A})\boldsymbol{X} &+ \operatorname{opp}\boldsymbol{ED}(t) + \operatorname{wid}(\boldsymbol{A})\boldsymbol{X} + \boldsymbol{ED}(t) = \boldsymbol{X}.\end{aligned}$$

Таким образом, утверждение (21) имеет силу для всех $t \ge 1$.

Покажем далее, что стратегия $\Phi \in \Phi(x(0))$, удовлетворяющая (21), гарантирует включение (18). Для этого представим включение (21) в виде

$$\begin{aligned}\tilde{x}_i(t) \in \big[&-\underline{ED}_i(t-1), \max\big\{(1-\operatorname{wid}\boldsymbol{a}_i)\hat{x}_i^* - \overline{ED}_i(t-1), \\ &(1-\operatorname{wid}\boldsymbol{a}_i)\hat{x}_i^* - \overline{ED}_i(t-1) - \lambda_i(t)\theta_i\big\}\big], \quad t \ge 1, \quad (27)\end{aligned}$$

где $\lambda_i(t) = 1 - \operatorname{wid}\boldsymbol{a}_i - (1-\underline{\alpha}_i+\varepsilon)(1+\underline{\alpha}_i+\ldots+\underline{\alpha}_i^{t-2})$, $i = \overline{1,n}$, и для каждого i найдем момент времени T_i такой, что

$$\begin{aligned}\tilde{x}_i(t) &\in \left[-\underline{ED}_i(t-1), (1-\operatorname{wid}\boldsymbol{a}_i)\hat{x}_i^* - \overline{ED}_i(t-1)\right] = \\ &= (1-\operatorname{wid}\boldsymbol{a}_i)\boldsymbol{X}(0,\hat{x}_i^*) + \operatorname{opp}\boldsymbol{ED}_i(t-1), \quad t \ge T_i, \quad (28)\end{aligned}$$

т.е. $\lambda_i(t)\theta_i \le 0$.

Очевидно, что если $\theta_i = 0$, то $T_i = 1$. Если $\theta_i > 0$, рассмотрим три случая: 1) если $\underline{\alpha}_i = 1, \operatorname{wid}\boldsymbol{a}_i = 0$ (потерь запаса в i-м узле нет), то $\lambda_i(t) = 1 - \varepsilon(t-1)$. Имеем $\lambda_i(t) \le 0 \Leftrightarrow 1 - \varepsilon(t-1) \le 0 \Leftrightarrow t \ge 1/\varepsilon + 1$. Учитывая то, что система наблюдается в дискретные моменты времени $t = 0, 1, 2, \ldots$, $T_i = \lceil 1/\varepsilon \rceil + 1$, где $\lceil x \rceil$ – округление вверх до ближайшего целого числа; 2) если $0 < \underline{\alpha}_i < 1$ (потери запаса в i-м узле есть), то

$$\lambda_i(t) = 1 - \operatorname{wid}\boldsymbol{a}_i - (1-\underline{\alpha}_i+\varepsilon)(1-\underline{\alpha}_i^{t-1})/(1-\underline{\alpha}_i).$$

Учитывая то, что $1-\underline{\alpha}_i+\varepsilon > 0$ $\forall i = \overline{1,n}$, имеем

$$\begin{aligned}\lambda_i(t) \le 0 &\Leftrightarrow 1 - \operatorname{wid}\boldsymbol{a}_i - (1-\underline{\alpha}_i+\varepsilon)(1-\underline{\alpha}_i^{t-1})/(1-\underline{\alpha}_i) \le 0 \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow \underbrace{\underline{\alpha}_i^{t-1}}_{>0} \le \underbrace{(\varepsilon+(1-\underline{\alpha}_i)\operatorname{wid}\boldsymbol{a}_i)/(1-\underline{\alpha}_i+\varepsilon)}_{>0} \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow \ln\underline{\alpha}_i^{t-1} \le \ln((\varepsilon+(1-\underline{\alpha}_i)\operatorname{wid}\boldsymbol{a}_i)/(1-\underline{\alpha}_i+\varepsilon)) \overset{\ln\underline{\alpha}_i<0}{\Leftrightarrow} \\ &\Leftrightarrow t-1 \ge \ln((\varepsilon+(1-\underline{\alpha}_i)\operatorname{wid}\boldsymbol{a}_i)/(1-\underline{\alpha}_i+\varepsilon))/\ln\underline{\alpha}_i,\end{aligned}$$

отсюда $T_i = \left\lceil \dfrac{\ln((\varepsilon+(1-\underline{\alpha}_i)\operatorname{wid}\boldsymbol{a}_i)/(1-\underline{\alpha}_i+\varepsilon))}{\ln\underline{\alpha}_i} \right\rceil + 1$;

3) если $\underline{\alpha}_i = 0, \operatorname{wid}\boldsymbol{a}_i = \overline{\alpha}_i$ (весь запас в i-м узле может быть потерян), $\lambda_i(1) = 1 - \operatorname{wid}\boldsymbol{a}_i > 0$, $\lambda_i(t) = -(\operatorname{wid}\boldsymbol{a}_i + \varepsilon) < 0$, $t \ge 2$, ($\operatorname{wid}\boldsymbol{a}_i + \varepsilon > (1-\underline{\alpha}_i)\operatorname{wid}\boldsymbol{a}_i + \varepsilon > 0$ $\forall i = \overline{1,n}$), значит, $T_i = 2$.

Покажем по индукции, что для $\forall i = \overline{1,n}$ (28) гарантирует

$$x_i(t) \in \boldsymbol{X}(0,\hat{x}_i^*) + (\operatorname{wid}\boldsymbol{a}_i)^{t+1-T_i}\boldsymbol{X}(0,\theta_i), \quad t \ge T_i. \quad (29)$$

Действительно, если в момент времени $t = T_i$

$$\tilde{x}_i(t) \in (1-\operatorname{wid}\boldsymbol{a}_i)\boldsymbol{X}(0,\hat{x}_i^*) + \operatorname{opp}\boldsymbol{ED}_i(t-1),$$

то, с учетом того, что $x_i(t-1) \in \boldsymbol{X}_i$,

$$\begin{aligned}&\forall\alpha_i(t-1) \in \boldsymbol{a}_i\ \forall d_i(t-1) \in \boldsymbol{D}_i(t-1) |\ x_i(t) = \tilde{x}_i(t) + \\ &+(\alpha_i(t-1)-\underline{a}_i)x_i(t-1) + (Ed(t-1))_i \in \tilde{x}_i(t) + (\boldsymbol{a}_i - \underline{a}_i)x(t) + \\ &+\boldsymbol{ED}_i(t-1) \subseteq (1-\operatorname{wid}\boldsymbol{a}_i)\boldsymbol{X}(0,\hat{x}_i^*) + \operatorname{opp}\boldsymbol{ED}_i(t-1) + \\ &+\operatorname{wid}(\boldsymbol{a}_i)\boldsymbol{X}_i + \boldsymbol{ED}_i(t-1) = \boldsymbol{X}(0,\hat{x}_i^*) + \operatorname{wid}(\boldsymbol{a}_i)\boldsymbol{X}(0,\theta_i),\end{aligned}$$

значит, (29) справедливо для $t = T_i$. Допустим, что (29) выполняется для некоторого $t \ge T_i+1$, тогда

$$\begin{aligned}&\forall\alpha_i(t) \in \boldsymbol{a}_i\ \forall d_i(t) \in \boldsymbol{D}_i(t) |\ x_i(t+1) = \tilde{x}_i(t+1) + \\ &+(\alpha_i(t)-\underline{a}_i)x_i(t) + (Ed(t))_i \in \tilde{x}_i(t+1) + (\boldsymbol{a}_i - \underline{a}_i)x(t) + \\ &+\boldsymbol{ED}_i(t) \subseteq (1-\operatorname{wid}\boldsymbol{a}_i)\boldsymbol{X}(0,\hat{x}_i^*) + \operatorname{opp}\boldsymbol{ED}_i(t) + \\ &+\operatorname{wid}\boldsymbol{a}_i\left(\boldsymbol{X}(0,\hat{x}_i^*) + (\operatorname{wid}\boldsymbol{a}_i)^{t+1-T_i}\boldsymbol{X}(0,\theta_i)\right) + \boldsymbol{ED}_i(t) = \\ &= \boldsymbol{X}(0,\hat{x}_i^*) + (\operatorname{wid}\boldsymbol{a}_i)^{t+2-T_i}\boldsymbol{X}(0,\theta_i).\end{aligned}$$

Следовательно, (29) имеет силу для любого $t \ge T_i$.

Согласно (29), если $\theta_i = 0$, то $x_i(t) \in \boldsymbol{X}(0,\hat{x}_i^*)$, $t \ge 0$, так как $x_i(0) \in \boldsymbol{X}(0,\hat{x}_i^*)$. Если $\theta_i > 0$, но $\operatorname{wid}\boldsymbol{a}_i = 0$ ($\alpha_i(t) = \alpha_i$, $t \ge 0$), то $x_i(t) \in \boldsymbol{X}(0,\hat{x}_i^*)$ для $t \ge T_i$, в противном случае

$x_i(t) \in \boldsymbol{X}(0, \hat{x}_i^*)$ при $t \to \infty$, так как wid $\boldsymbol{a}_i < 1$. Таким образом, стратегия $\Phi \in \Phi(x(0))$, удовлетворяющая (21), гарантирует асимптотическую сходимость к оптимальному допустимому уровню запаса $\hat{x}^*$. Теорема доказана.

Замечание 4. Если $\underline{\alpha}_i = 1$ или ширина интервала возможных значений спроса в i-м узле постоянна (wid $\boldsymbol{ED}_i(t)$ = const для всех $t \geq 0$), то условие (19) выполняется автоматически.

Замечание 5. Если коэффициенты потерь запаса $\alpha_i(t) \in \boldsymbol{a}_i = [0, 1]$, wid $\boldsymbol{a}_i = 1$, $i = 1, \ldots, n$, то wid $\boldsymbol{ED}(t) = 0$ (иначе условие (9) не выполняется). Это значит, что для существования допустимой стратегии управления спрос должен быть точно известным. Оптимальный уровень запаса в этом случае $\hat{x}^* \in [0, \overline{X}]$, но, как следует из (29), сходимость системы к оптимальному запасу возможна только при $\theta = 0$, при этом $\tau^* = 0$.

Из доказательства теоремы 3 следует, что управления, составляющие оптимальную стратегию, надо выбирать так, чтобы было выполнено (27). Будем определять управления $u^*(t)$ из решения следующей задачи:

$$\operatorname{Sp} \Lambda = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \Rightarrow \min_{u(t), \lambda_1, \ldots, \lambda_n} \tag{30}$$

при ограничениях

$$-\underline{ED}(t) \leq \underline{A}x(t) + Bu(t) \leq (I - \operatorname{wid} \boldsymbol{A})\hat{x}^* - \overline{ED}(t) + \Lambda\theta,$$
$$u(t) \in \boldsymbol{U},$$
$$0 \leq \lambda_i \leq 1 - \operatorname{wid} \boldsymbol{a}_i, \; i = \overline{1, n},$$

где $x(t)$ определяется рекуррентным соотношением (1), $\Lambda = Diag(\lambda_1, \ldots, \lambda_n) \in R^{n \times n}$, $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ – вспомогательные параметры, Sp Λ – след матрицы Λ. Момент времени τ^*, начиная с которого Sp $\Lambda = 0$, определит скорость сходимости системы.

Частные случаи

Модель с детерминированными коэффициентами потерь. Предположим, что коэффициенты потерь запаса $\alpha_i(t)$ точно известны и постоянны во времени, т.е.

$$A(t) = A, t \geq 0,$$

где $A = Diag(\alpha_1, \ldots, \alpha_n) \in R^{n \times n}$, $0 \leq \alpha_i < 1$, $i = \overline{1, n}$. В этом случае wid $\boldsymbol{a}_i = 0$. Тогда теоремы 1, 2, 3 примут следующий вид.

Теорема 1. Для любого состояния системы $x(t) \in \boldsymbol{X}$ в момент времени t, $t \geq 0$, допустимое на интервале $\boldsymbol{X}$ управление с обратной связью $u(t) = U(x(t), t)$, $u(t) \in \boldsymbol{U}$, существует и определяется из включения

$$Ax(t) + Bu(t) \in \boldsymbol{X} + \operatorname{opp} \boldsymbol{ED}(t),$$

если и только если выполнены условия

$$\operatorname{wid} \boldsymbol{ED}(t) \leq \overline{X}, \tag{31}$$

$$\boldsymbol{ED}(t) \subseteq (I - A)\boldsymbol{X} + \{-BU\}. \tag{32}$$

Теорема 2. Оптимальный допустимый уровень запаса $\hat{x}^*$ является решением задачи

$$C(\hat{x}) = h^{\mathrm{T}} \hat{x} \Rightarrow \min_{\hat{x}}$$

при ограничениях

$$\max_{t \geq 0} \{\operatorname{wid} \boldsymbol{ED}(t)\} \leq \hat{x} \leq \overline{X},$$

$$\boldsymbol{ED}(t) \subseteq (I - A)\boldsymbol{X}(0, \hat{x}) + \{-BU\} \quad \text{для} \quad \forall t \geq 0.$$

Видно, что при интервально заданных коэффициентах потерь уровень оптимального запаса увеличивается, $\hat{x}^* = (I - \operatorname{wid} \boldsymbol{A})^{-1} \max_{t \geq 0} \{\operatorname{wid} \boldsymbol{ED}(t)\} \geq \max_{t \geq 0} \{\operatorname{wid} \boldsymbol{ED}(t)\}$. Это повышение следует рассматривать как вынужденную плату за работу в условиях дополнительной неопределенности, источником которой являются коэффициенты потерь запаса.

Теорема 3. Если для всех $t \geq 0$ выполнены условия (31), (32), для всех $t \geq 1$ выполнено условие

$$(I - A)r(t-1) \leq r(t), \tag{33}$$

где $r(t) = \hat{x}^* - \operatorname{wid} \boldsymbol{ED}(t) \in R^n$, $r(t) \geq 0$, и существует число $\varepsilon > 0$, такое, что

$$\boldsymbol{ED} + \varepsilon \boldsymbol{X}(0, \theta) \subseteq (I - A)\boldsymbol{X}(0, \hat{x}^*) + \{-BU\},$$

где $\theta = \overline{X} - \hat{x}^* \in R^n$, $\theta \geq 0$, $\theta \neq 0$, то для любого начального состояния $x(0) \in \boldsymbol{X}$ существует допустимая на интервале $\boldsymbol{X}$ стратегия управления $\Phi^* \in \Phi(x(0))$, гарантирующая утверждение (18). Причем сходимость к оптимальному допустимому уровню запаса $\hat{x}^*$ достигается не более чем за конечное число шагов

$$T = \max_{i=\overline{1,n}:\, \theta_i > 0} \left\lceil \frac{\ln(\varepsilon / (1 - \alpha_i + \varepsilon))}{\ln \alpha_i} \right\rceil + 1. \tag{34}$$

(Доказательство формулы (34) следует из утверждения (29), так как wid $\boldsymbol{a}_i = 0$.)

Управления $u^*(t)$ определяются из решения задачи

$$\operatorname{Sp} \Lambda = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \Rightarrow \min_{u(t), \lambda_1, \ldots, \lambda_n}$$

при ограничениях

$$-\underline{ED}(t) \leq Ax(t) + Bu(t) \leq \hat{x}^* - \overline{ED}(t) + \Lambda\theta,$$
$$u(t) \in \boldsymbol{U},$$
$$0 \leq \lambda_i \leq 1, \; i = \overline{1, n},$$

Когда $\alpha_i = 0$, $i = \overline{1, n}$, система сходится не более, чем за 2 шага (это можно показать, выполнив предельный переход при $\alpha_i \to 0$ в формуле (34)).

Модель при отсутствии потерь запаса. При отсутствии потерь запаса $\alpha_i(t) = 1$, $i = 1, \ldots, n$, т.е.

$$A(t) = I, \quad t \geq 0.$$

Теоремы 1, 2, 3 имеют следующий вид.

Теорема 1. Для любого состояния системы $x(t) \in \boldsymbol{X}$ в момент времени t, $t \geq 0$, допустимое на интервале $\boldsymbol{X}$ управление с обратной связью $u(t) = U(x(t), t)$, $u(t) \in \boldsymbol{U}$, существует и определяется из включения

$$x(t) + Bu(t) \in \boldsymbol{X} + \operatorname{opp} \boldsymbol{ED}(t),$$

если и только если выполнены условия

$$\operatorname{wid} \boldsymbol{ED}(t) \leq \overline{X}, \tag{35}$$

$$\boldsymbol{ED}(t) \subseteq \{-BU\}. \tag{36}$$

Теорема 2. Оптимальный допустимый уровень запаса $\hat{x}^*$ имеет вид

$$\hat{x}^* = \max_{t \ge 0}\{\operatorname{wid} \boldsymbol{ED}(t)\}. \qquad (37)$$

(Доказательство основывается на том, что функция затрат $C(\hat{x})$ возрастает по $\hat{x}$ для любого вектора $h \ge 0$, $h \ne 0$.)

Теорема 3. Если для всех $t \ge 0$ выполнены условия (35), (36) и существует число $\varepsilon > 0$, такое, что

$$\boldsymbol{ED} + \varepsilon \boldsymbol{X}(0, \theta) \subseteq \{-BU\},$$

где $\theta = \overline{X} - \hat{x}^* \in R^n$, $\theta \ge 0$, $\theta \ne 0$, то для любого начального состояния $x(0) \in \boldsymbol{X}$ существует допустимая на интервале $\boldsymbol{X}$ стратегия управления $\Phi^* \in \Phi(x(0))$, гарантирующая утверждение (18). Причем сходимость к оптимальному допустимому уровню запаса $\hat{x}^*$ достигается не более чем за конечное число шагов

$$T = \lceil 1/\varepsilon \rceil + 1. \qquad (38)$$

(Условие (33) в этом случае имеет вид $r(t) \ge 0$ и выполняется автоматически. Формулу (38) можно получить, выполнив предельный переход при $\alpha_i \to 1$ в формуле (34).)

Управления $u^*(t)$ определяются из решения оптимизационной задачи

$$\lambda \Rightarrow \min_{u(t), \lambda}$$

при ограничениях

$$-\underline{ED}(t) \le Ax(t) + Bu(t) \le -\underline{ED}(t) + \lambda\theta,$$
$$u(t) \in \boldsymbol{U},$$
$$0 \le \lambda \le 1.$$

Численный пример

Рассмотрим в качестве примера систему производства-распределения (рис. 1), которая описывается динамической сетевой моделью (1) со структурными матрицами

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad E = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Сеть состоит из трех узлов: узлы 1, 2 производят продукцию A и B, которая используется для производства продукции AB в 3-м узле.

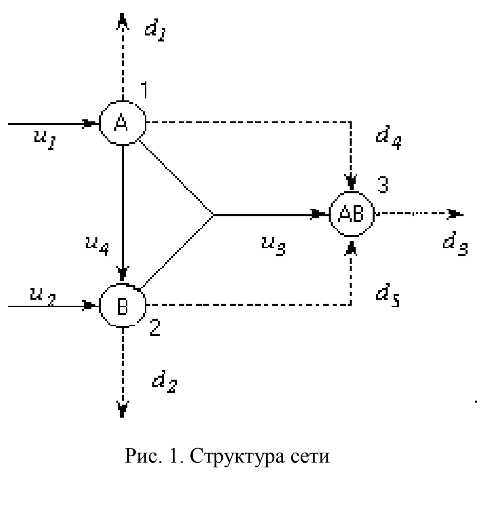

Рис. 1. Структура сети

Управляемые потоки u_1, u_2 определяют интенсивность производства продукции A и B соответственно; u_4 перераспределяет дополнительные производственные возможности системы между производственными линиями A и B (если $u_4 = 0$, то все дополнительные возможности системы направлены на производство продукции A); u_3 описывает производственную линию, которая из A и B производит продукцию AB. Неуправляемые потоки d_1, d_2, d_3 определяют спрос в узлах сети на продукцию A, B и AB соответственно; d_4, d_5 представляют спрос в 3-м узле на продукцию A и B.

Спрос имеет сезонный характер и задан интервальным вектором с переменными границами:

$$\mathrm{D}_i(t) = [\underline{D}_i + 2(1 + \sin t), \overline{D}_i - 2(1 - \sin t)], \; i = \overline{1,5}, \qquad (39)$$

где $\boldsymbol{D} = \left([5, 25] \;\; [20, 30] \;\; [60, 80] \;\; [0, 20] \;\; [0, 30]\right)^{\mathrm{T}}$.

Коэффициенты потерь запаса в узлах сети заданы в виде интервалов:

$$\mathrm{A} = \begin{pmatrix} [0,6;\, 0,75] & 0 & 0 \\ 0 & [0,5;\, 0,6] & 0 \\ 0 & 0 & [0,75;\, 0,8] \end{pmatrix}.$$

Состояния системы и управления ограничены интервалами

$$\boldsymbol{X} = \begin{pmatrix} [0,130] \\ [0,120] \\ [0,150] \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{U} = \begin{pmatrix} [0,190] \\ [0,55] \\ [0,100] \\ [0,70] \end{pmatrix}.$$

Затраты системы на хранение запаса $h = (70, 80, 30)^{\mathrm{T}}$.

Для данной системы оптимальный допустимый уровень запаса $\hat{x}^* = (37{,}65 \quad 13{,}33 \quad 40)^{\mathrm{T}}$ (решение оптимизационной задачи (11)), $\hat{x}^*$ не зависит от расходов системы на хранения запаса (следствие 2), условия теоремы 3 выполнены (ε = 0,191, условие (19) выполняется автоматически). В каждый момент времени t, решая задачу (24), получаем оптимальное управление $u^*(t)$, $t \ge 0$.

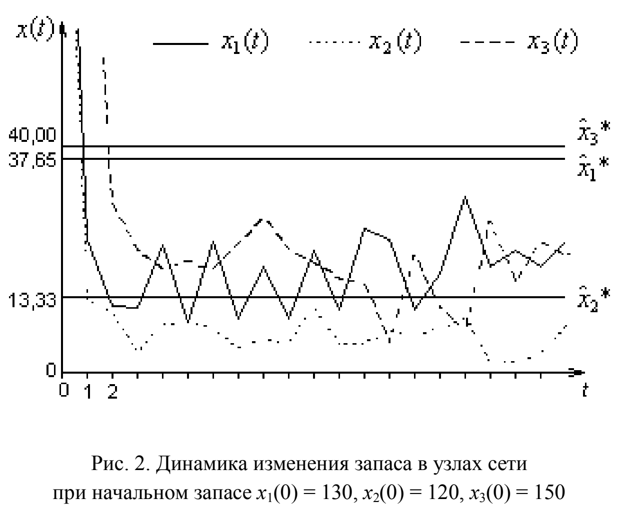

Рис. 2. Динамика изменения запаса в узлах сети при начальном запасе $x_1(0) = 130$, $x_2(0) = 120$, $x_3(0) = 150$

Рис. 2 показывает динамику изменения запаса в узлах сети при стратегии управления $\Phi^*=\{u^*(t),\ t \geq 0\}$ для начального состояния запаса $x(0)=(130\ \ 120\ \ 150)^T$. Из графика видно, что скорость сходимости $\tau^*=2$, так как $x(t) \in \mathbf{X}(0,\hat{x}^*)$ для $t \geq 2$.

При детерминированном задании коэффициентов потерь запаса, когда $A(t) = Diag(0{,}7;\ 0{,}5;\ 0{,}8)$, $t \geq 0$, оптимальный уровень запаса $\hat{x}^* = (32\ \ 12\ \ 38)^T$, ε = = 0,269, максимальная скорость сходимости $T = 4$ (34).

При отсутствии потерь запаса $\hat{x}^* = (32\ \ 12\ \ 38)^T$ (37), ε = 0,198, максимальная скорость сходимости $T = 7$ (38).

Если не учитывать сезонность спроса и описывать его интервалом с постоянными границами, как это сделано в работе [11]: $d(t) \in \boldsymbol{D},\quad t \geq 0$, то оптимальный допустимый уровень запаса увеличивается (в случае с интервально заданными коэффициентами потерь запаса $\hat{x}^* = (47{,}06\ \ 22{,}22\ \ 52{,}63)^T$, при детерминированном задании коэффициентов потерь $\hat{x}^* = (40\ \ 20\ \ 50)^T$), что приводит к соответствующему увеличению затрат.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Ловецкий С.Е., Меламед И.И.* Динамические потоки в сетях // Автоматика и Телемеханика. 1987. № 11. С. 7–29.
2. *Glover F., Klingman D., Phillips N.V.* Network models in optimization and their applications in practice. N.Y.: Wiley, 1992.
3. *Лотоцкий В.А., Мандель А.С.* Модели и методы управления запасами. М.: Наука, 1991.
4. *Рыжиков Ю.И.* Теория очередей и управление запасами. СПб.: Питер, 2001.
5. *Рубальский Г.Б.* Вероятностные и вычислительные методы оптимального управления запасами. М.: Знание, 1987.
6. *Домбровский В.В., Чаусова Е.В.* Применение интервальных методов в управлении запасами // Вычислительные Технологии. 2002. Т. 7, № 2. С. 50–58.
7. *Чаусова Е.В.* Динамическая модель управления запасами с интервальной неопределенностью спроса // Вестник Томского государственного университета. 2002. № 1 (I). С. 195–200.
8. *Домбровский В.В., Чаусова Е.В.* Динамическая сетевая модель управления запасами с интервальной неопределенностью спроса // Вычислительные технологии. 2001. Т. 6, ч. 2. С. 271–274 (Спец. выпуск, CD).
9. *Чаусова Е.В.* Динамическая сетевая модель управления запасами с интервальной неопределенностью спроса и устареванием запаса в узлах сети // Вестник Томского государственного университета. 2004. № 284. С. 103–108.
10. *Chausova E.V.* Dynamic Network Inventory Control Model with Interval Nonstationary Demand Uncertainty // Numerical Algorithms. 2004. Vol. 37. P. 71–84.
11. *Чаусова Е.В.* Динамическая сетевая модель управления запасами с интервальной неопределенностью спроса и потерь запаса // Вестник Томского государственного университета. 2006. № 290. С. 208–215.
12. *Алефельд Г., Херцбергер Ю.* Введение в интервальные вычисления. М.: Мир, 1987.
13. *Moore R.E.* Methods and applications of interval analysis. Philadelphia: SIAM, 1979.
14. *Kaucher E.* Interval analysis in the extended interval space *IR* // Computing Supplement. 1980. Vol. 2. P. 33–49.
15. *Шарый С.П.* Алгебраический подход во «внешней задаче» для интервальных линейных систем // Вычислительные Технологии. 1998. Т. 3, № 2. С. 67–114.

Статья представлена кафедрой математических методов и информационных технологий в экономике экономического факультета Томского государственного университета, поступила в научную редакцию «Кибернетика» 15 июня 2006 г.