УДК 519.2:621.391

Н.С. Демин, С.В. Рожкова

ИНФОРМАЦИОННЫЙ АНАЛИЗ В СОВМЕСТНОЙ ЗАДАЧЕ ФИЛЬТРАЦИИ, ИНТЕРПОЛЯЦИИ И ЭКСТРАПОЛЯЦИИ ПО НЕПРЕРЫВНО-ДИСКРЕТНЫМ НАБЛЮДЕНИЯМ С ПАМЯТЬЮ

Работа поддержана грантом МД-9509.2006.1

Рассматривается информационный аспект совместной задачи фильтрации, интерполяции и экстраполяции стохастических процессов по непрерывно-дискретным наблюдениям с фиксированной памятью. Исследуется структура количества информации.

В связи с тем что задача оценивания [1] связана с извлечением информации из наблюдений, любая статистическая задача имеет информационный аспект [2]. В [3, 4] рассмотрен информационный аспект задачи фильтрации в случае наблюдений без памяти и с памятью единичной кратности, в [5] – совместной задачи непрерывно-дискретной фильтрации и обобщенной экстраполяции в случае произвольной памяти, в [6] – исследована структура в совместной задаче фильтрации и экстраполяции с произвольной памятью, а в [7, 8] – в совместной задаче фильтрации и интерполяции. В данной работе рассматриваются вопросы нахождения шенноновской меры количества информации в совместной задаче непрерывно-дискретной фильтрации, интерполяции и экстраполяции произвольной памятью и исследована структура этого количества информации. Используемые обозначения: $M\{\cdot\}$ – математическое ожидание; $\mathrm{P}\{\cdot\}$ – вероятность события; $\mathrm{N}\{y;a;B\}$ – гауссовская плотность.

Постановка задачи

На вероятностном пространстве $(\Omega, \mathbf{F}, F=(\mathbf{F}_t)_{t\geq 0}, \mathbf{P})$ ненаблюдаемый n-мерный процесс x_t и наблюдаемый l-мерный процесс z_t определяются стохастическими дифференциальными уравнениями

$$dx_t = f(t,x_t)dt + \Phi_1(t)dw_t,\ t\geq 0, \tag{1}$$

$$dz_t = h\left(t,x_t,x_{\tau_1},\ ...,\ x_{\tau_N},z\right)dt + \Phi_2(t,z)\,dv_t, \tag{2}$$

а наблюдаемый q-мерный процесс $\eta(t_m)$ с дискретным временем имеет вид

$$\eta(t_m) = g\left(t_m,x_{t_m},x_{\tau_1},\ ...,\ x_{\tau_N},z\right) + \Phi_3(t_m,z)\,\xi(t_m),\ m=0,1,\ ..., \tag{3}$$

где $0<\tau_N<\cdots<\tau_1<t_m\leq t$, т.е. память фиксированная [1]. Предполагается: 1) w_t и v_t являются стандартными винеровскими процессами размеров r_1 и r_2, $\xi(t_m)$ – стандартная белая гауссовская последовательность размера r_3; 2) x_0, w_t, v_t, $\xi(t_m)$ – статистически независимы; 3) $f(\cdot)$, $h(\cdot)$, $g(\cdot)$, $\Phi_1(\cdot)$, $\Phi_2(\cdot)$, $\Phi_3(\cdot)$ непрерывны по всем аргументам; 4) $Q(\cdot)=\Phi_1(\cdot)\Phi_1^T(\cdot)>0$, $R(\cdot)=\Phi_2(\cdot)\Phi_2^T(\cdot)>0$, $V(\cdot)=\Phi_3(\cdot)\Phi_3^T(\cdot)>0$; 5) задана начальная плотность $p_0(x)=\partial\mathbf{P}\{x_0\leq x\}/\partial x$.

В целях более компактной записи математических выражений введем оператор

$$\mathbf{L}_{\sigma,y}\left[\varphi_1(\sigma,y);\varphi_2(\sigma,y)\right] = \frac{\varphi_1(\sigma,y)}{\varphi_2(\sigma,y)}L_{\sigma,y}\left[\varphi_2(\sigma,y)\right] - \varphi_2(\sigma,y)\,L^*_{\sigma,y}\left[\frac{\varphi_1(\sigma,y)}{\varphi_2(\sigma,y)}\right], \tag{4}$$

где $L_{\sigma,y}[\varphi(\sigma,y)]$ и $L^*_{\sigma,y}[\varphi(\sigma,y)]$ – прямой и обратный операторы Колмогорова, соответствующие процессу (1), и расширенные переменные

$$\tilde{x}_\tau^N = \begin{bmatrix} x_{\tau_1} \\ \vdots \\ x_{\tau_N}\end{bmatrix},\ \tilde{x}_s^L = \begin{bmatrix} x_{s_1} \\ \vdots \\ x_{s_L}\end{bmatrix},$$

$$\tilde{x}_N = \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_N\end{bmatrix},\ \tilde{x}^L = \begin{bmatrix} x^1 \\ \vdots \\ x^L\end{bmatrix},\ \tilde{x}_{N+L+1} = \begin{bmatrix} x \\ \tilde{x}_N \\ \tilde{x}^L\end{bmatrix}.$$

Ставится задача: найти информационное количество

$$I^t_{\tau,t,s}\left[\tilde{x}_\tau^N, x_t, \tilde{x}_s^L; z_0^t, \eta_0^m\right] = M\left\{\ln\frac{p^t_{t,\tau,s}\left(\tilde{x}_\tau^N; x_t; \tilde{x}_s^L\right)}{p\left(\tilde{\tau}_N, \tilde{x}_\tau^N; t, x_t; \tilde{s}_L, \tilde{x}_s^L\right)}\right\} \tag{5}$$

о текущих x_t, прошлых $\tilde{x}_\tau^N=\left\{x_{\tau_1},x_{\tau_2},\ ...,\ x_{\tau_N}\right\}$ и будущих $\tilde{x}_s^L=\left\{x_{s_1},x_{s_2},\ ...,\ x_{s_L}\right\}$ значениях ненаблюдаемого процесса, которые содержатся в совокупности реализаций $z_0^t=\{z(\sigma);0\leq\sigma\leq t\}$ и $\eta_0^m=\{\eta(t_0),\eta(t_1),\ ...,\ \eta(t_m)\}$ наблюдаемых процессов (2), (3), где

$$p\left(\tilde{\tau}_N, \tilde{x}_N; t, x; \tilde{s}_L, \tilde{x}^L\right) = \partial^{N+L+1}\mathbf{P}\left\{x_t\leq x; \tilde{x}_\tau^N\leq\tilde{x}_N; \tilde{x}_s^L\leq\tilde{x}^L\right\}\big/\partial x\partial\tilde{x}_N\partial\tilde{x}^L, \tag{6}$$

$$p^t_{\tau,t,s}\left(\tilde{x}_N; x; \tilde{x}^L\right) = \partial^{N+L+1}\mathbf{P}\left\{x_t\leq x; \tilde{x}_\tau^N\leq\tilde{x}_N; \tilde{x}_s^L\leq\tilde{x}^L \mid z_0^t, \eta_0^m\right\}\big/\partial x\partial\tilde{x}_N\partial\tilde{x}^L. \tag{7}$$

Общий случай

Утверждение 1. Плотность (7) на интервалах $t_m \le t < t_{m+1}$ определяется уравнением

$$d_t p^t_{\tau,t,s}\left(\tilde{x}_N;x;\tilde{x}^L\right)=$$
$$=\mathbf{L}_{t,x}\left[p^t_{\tau,t,s}\left(\tilde{x}_N;x;\tilde{x}^L\right);p_t\left(x;\tilde{x}_N\right)\right]dt+p^t_{\tau,t,s}\left(\tilde{x}_N;x;\tilde{x}^L\right)\times \tag{8}$$
$$\times\left[h\left(t,x,\tilde{x}_N,z\right)-\overline{h\left(t,z\right)}\right]^T R^{-1}\left(t,z\right)\left[dz_t-\overline{h\left(t,z\right)}\right]$$

с начальным условием

$$p^{t_m}_{\tau,t_m,s}\left(\tilde{x}_N;x;\tilde{x}^L\right)=$$
$$=\left[c\left(x,\tilde{x}_N;\eta\left(t_m\right),z\right)/c\left(\eta\left(t_m,z\right)\right)\right]p^{t_m-0}_{\tau,t_m,s}\left(\tilde{x}_N;x;\tilde{x}^L\right), \tag{9}$$

$$p_t\left(x;\tilde{x}_N\right)=\partial^{N+1}\mathbf{P}\left\{x_t\le x;\tilde{x}^N_\tau\le\tilde{x}_N \mid z^t_0,\eta^m_0\right\}/\partial x\partial\tilde{x}_N,$$
$$\overline{h\left(t,z\right)}=M\left\{h\left(t,x_t,\tilde{x}^N_\tau,z\right)\middle|z^{t_m}_0,\eta^m_0\right\}, \tag{10}$$

$$c\left(x,\tilde{x}_N,\eta\left(t_m\right),z\right)=\exp\left\{-\frac{1}{2}\left[\eta\left(t_m\right)-g\left(t_m,x,\tilde{x}_N,z\right)\right]^T\times\right.$$
$$\left.\times V^{-1}\left(t_m,z\right)\left[\eta\left(t_m\right)-g\left(t_m,x,\tilde{x}_N,z\right)\right]\right\},$$
$$c\left(\eta\left(t_m\right),z\right)=M\left\{c\left(x_{t_m},\tilde{x}^N_\tau,\eta\left(t_m\right),z\right)\middle|z^{t_m}_0,\eta^{m-1}_0\right\},$$

а $p^{t_m-0}_{\tau,t_m,s}\left(\tilde{x}_N;x;\tilde{x}^L\right)=\lim p^t_{\tau,t,s}\left(\tilde{x}_N;x;\tilde{x}^L\right)$ при $t\uparrow t_m$.

Данное утверждение следует из теоремы 1 и следствия 1 в [1].

Теорема. 1. Количество информации (5) на интервалах $t_m\le t<t_{m+1}$ определяется уравнением

$$\frac{dI^t_{\tau,t,s}\left[\tilde{x}^N_\tau,x_t,\tilde{x}^L_s;z^t_0,\eta^m_0\right]}{dt}=$$
$$=\frac{1}{2}tr\left[M\left\{R^{-1}\left(t,z\right)\left[h\left(t,x_t,\tilde{x}^N_\tau,z\right)-\overline{h\left(t,z\right)}\right]\times\right.\right.$$
$$\left.\left.\times\left[h\left(t,x_t,\tilde{x}^N_\tau,z\right)-\overline{h\left(t,z\right)}\right]^T\right\}\right]+$$
$$+tr\left[Q(t)M\left\{\left[\frac{\partial\ln p^t_{\tau,t,s}\left(\tilde{x}^N_\tau;x_t;\tilde{x}^L_s\right)}{\partial x_t}-\frac{\partial\ln p_t\left(x_t;\tilde{x}^N_\tau\right)}{\partial x_t}\right]\times\right.\right.$$
$$\left.\left.\times\left(\frac{\partial\ln p_t\left(x_t;\tilde{x}^N_\tau\right)}{\partial x_t}\right)^T\right\}\right]-$$
$$-tr\left[Q(t)M\left\{\left[\frac{\partial\ln p\left(\tilde{\tau}_N,\tilde{x}^N_\tau;t,x_t;\tilde{s}_L,\tilde{x}^L_s\right)}{\partial x_t}-\right.\right.\right.$$
$$\left.\left.\left.-\frac{\partial\ln p\left(t,x_t;\tilde{\tau}_N,\tilde{x}^N_\tau\right)}{\partial x_t}\right]\left(\frac{\partial\ln p\left(t,x_t;\tilde{\tau}_N,\tilde{x}^N_\tau\right)}{\partial x_t}\right)^T\right\}\right]-$$
$$-\frac{1}{2}tr\left[Q\left(t\right)M\left\{\frac{\partial\ln p^t_{\tau,t,s}\left(\tilde{x}^N_\tau;x_t;\tilde{x}^L_s\right)}{\partial x_t}\times\right.\right.$$
$$\times\left(\frac{\partial\ln p^t_{\tau,t,s}\left(\tilde{x}^N_\tau;x_t;\tilde{x}^L_s\right)}{\partial x_t}\right)^T-$$
$$-\frac{\partial\ln p\left(\tilde{\tau}_N,\tilde{x}^N_\tau;t,x_t;\tilde{s}_L,\tilde{x}^L_s\right)}{\partial x_t}\times \tag{11}$$
$$\left.\left.\times\left(\frac{\partial\ln p\left(\tilde{\tau}_N,\tilde{x}^N_\tau;t,x_t;\tilde{s}_L,\tilde{x}^L_s\right)}{\partial x_t}\right)^T\right\}\right]$$

с начальным условием

$$I^{t_m}_{\tau,t_m,s}\left[\tilde{x}^N_\tau,x_{t_m},\tilde{x}^L_s;z^t_0,\eta^m_0\right]=$$
$$=I^{t_m-0}_{\tau,t_m-0,s}\left[\tilde{x}^N_\tau,x_{t_m},\tilde{x}^L_s;z^{t_m}_0,\eta^{m-1}_0\right]+ \tag{12}$$
$$+\Delta I^{t_m}_{\tau,t_m,s}\left[\tilde{x}^N_\tau,x_{t_m},\tilde{x}^L_s;z^{t_m}_0,\eta\left(t_m\right)\right],$$

где

$$p\left(t,x;\tilde{\tau}_N,\tilde{x}_N\right)=\partial^{N+1}\mathbf{P}\left\{x_t\le x;\tilde{x}^N_\tau\le\tilde{x}_N\right\}/\partial x\partial\tilde{x}_N,$$
$$\Delta I^{t_m}_{\tau,t_m,s}\left[\cdot\right]=M\left\{\frac{c\left(x_{t_m},\tilde{x}^N_\tau,\eta\left(t_m\right),z\right)}{c\left(\eta\left(t_m\right),z\right)}\right\},$$

а $I^{t_m-0}_{\tau,t_m,s}\left[\tilde{x}^N_\tau,x_{t_m},\tilde{x}^L_s;z^{t_m}_0,\eta^{m-1}_0\right]=\lim I^t_{\tau,t,s}\left[\cdot\right]$ при $t\uparrow t_m$.

Доказательство. Совместная априорная плотность (6) определяется уравнением

$$d_t p\left(\tilde{\tau}_N,\tilde{x}_N;t,x;\tilde{s}_L,\tilde{x}^L\right)=$$
$$=\mathbf{L}_{t,x}\left[p\left(\tilde{\tau}_N,\tilde{x}_N;t,x;\tilde{s}_L,\tilde{x}^L\right);p\left(t,x;\tilde{\tau}_N,\tilde{x}_N\right)\right]dt,$$

которое следует из (8). Обновляющий процесс $\tilde{z}_t$, дифференциал которого имеет вид $d\tilde{z}_t=dz_t-\overline{h\left(t,z\right)}dt$, является таким, что $Z_t=\left(\tilde{z}_t,\mathrm{F}^z_t\right)$ есть винеровский процесс с $M\left\{\tilde{z}_t\tilde{z}^T_t\middle|\mathrm{F}^z_t\right\}=\int_0^t R(\tau,z)d\tau$ [9]. Тогда дифференцирование по формуле Ито дает, что

$$d_t\ln\frac{p^t_{\tau,t,s}\left(\tilde{x}_N;x;\tilde{x}^L\right)}{p\left(\tilde{\tau}_N,\tilde{x}_N;t,x;\tilde{s}_L,\tilde{x}^L\right)}=$$
$$=\frac{1}{p^t_{\tau,t,s}\left(\tilde{x}_N;x;\tilde{x}^L\right)}\mathbf{L}_{t,x}\left[p^t_{\tau,t,s}\left(\tilde{x}_N;x;\tilde{x}^L\right);p_t\left(x;\tilde{x}_N\right)\right]dt-$$
$$-\frac{1}{p\left(\tilde{\tau}_N,\tilde{x}_N;t,x;\tilde{s}_L,\tilde{x}^L\right)}\times$$
$$\times\mathbf{L}_{t,x}\left[p\left(\tilde{\tau}_N,\tilde{x}_N;t,x;\tilde{s}_L,\tilde{x}^L\right);p\left(t,x;\tilde{\tau}_N,\tilde{x}_N\right)\right]dt-$$
$$-\frac{1}{2}\left[h\left(t,x,\tilde{x}_N,z\right)-\overline{h\left(t,z\right)}\right]^T R^{-1}\left(t,z\right)\times$$
$$\times\left[h\left(t,x,\tilde{x}_N,z\right)-\overline{h\left(t,z\right)}\right]dt+$$
$$+\left[h\left(t,x,\tilde{x}_N,z\right)-\overline{h\left(t,z\right)}\right]^T R^{-1}\left(t,z\right)\left[dz_t-\overline{h\left(t,z\right)}\right].$$

Применяя к последнему выражению формулу Ито–Вентцеля, получаем аналогично [3, 4, 7], что

$$d_t \ln \frac{p^t_{\tau,t,s}\left(\tilde{x}^N_\tau; x_t; \tilde{x}^L_s\right)}{p\left(\tilde{\tau}_N, \tilde{x}^N_\tau; t, x_t; \tilde{s}_L, \tilde{x}^L_s\right)} =$$
$$= \frac{1}{2}\left[h\left(t, x_t, \tilde{x}^N_\tau, z\right) - \overline{h(t,z)}\right]^T R^{-1}(t,z) \times$$
$$\times \left[h\left(t, x_t, \tilde{x}^N_\tau, z\right) - \overline{h(t,z)}\right] dt +$$
$$+ tr\left[Q(t)\left[\frac{1}{p_t\left(x_t; \tilde{x}^N_\tau\right)} \frac{\partial^2 p_t\left(x_t; \tilde{x}^N_\tau\right)}{\partial x_t^2} - \right.\right.$$
$$\left.\left. - \frac{1}{p\left(t, x_t; \tilde{\tau}_N, \tilde{x}^N_\tau\right)} \frac{\partial^2 p\left(t, x_t; \tilde{\tau}_N, \tilde{x}^N_\tau\right)}{\partial x_t^2}\right]\right] dt +$$
$$+ tr\left[Q(t)\left[\frac{\partial \ln p^t_{\tau,t,s}\left(\tilde{x}^N_\tau; x_t; \tilde{x}^L_s\right)}{\partial x_t} - \right.\right.$$
$$\left.\left. - \frac{\partial \ln p_t\left(x_t; \tilde{x}^N_\tau\right)}{\partial x_t}\right]\left(\frac{\partial \ln p_t\left(x_t; \tilde{x}^N_\tau\right)}{\partial x_t}\right)^T\right] dt -$$
$$- tr\left[Q(t)\left[\frac{\partial \ln p\left(\tilde{\tau}_N, \tilde{x}^N_\tau; t, x_t; \tilde{s}_L, \tilde{x}^L_s\right)}{\partial x_t} - \right.\right.$$
$$\left.\left. - \frac{\partial \ln p\left(t, x_t; \tilde{\tau}_N, \tilde{x}^N_\tau\right)}{\partial x_t}\right]\left(\frac{\partial \ln p\left(t, x_t; \tilde{\tau}_N, \tilde{x}^N_\tau\right)}{\partial x_t}\right)^T\right] dt -$$
$$- \frac{1}{2} tr\left[Q(t)\left[\frac{\partial \ln p^t_{\tau,t,s}\left(\tilde{x}^N_\tau; x_t; \tilde{x}^L_s\right)}{\partial x_t}(\cdot)^T - \right.\right.$$
$$\left.\left. - \frac{\partial \ln p\left(\tilde{\tau}_N, \tilde{x}^N_\tau; t, x_t; \tilde{s}_L, \tilde{x}^L_s\right)}{\partial x_t}(\cdot)^T\right]\right] dt +$$
$$+ \frac{\partial}{\partial x_t} \ln \frac{p^t_{\tau,t,s}\left(\tilde{x}^N_\tau; x_t; \tilde{x}^L_s\right)}{p\left(\tilde{\tau}_N, \tilde{x}^N_\tau; t, x_t; \tilde{s}_L, \tilde{x}^L_s\right)} \Phi_1(t) dw_t +$$
$$+ \left[h\left(t, x_t, \tilde{x}^N_\tau, z\right) - \overline{h(t,z)}\right]^T R^{-1}(t,z) \Phi_2(t,z) dv_t .$$

Дальнейшие преобразования по выводу уравнения (11) повторяют преобразования по выводу уравнения (3.8) в [5], а подстановка (9) в (5) приводит к (12). Теорема доказана.

Теорема 2. Пусть

$$I^t_{\tau,t|s}\left[\tilde{x}^N_\tau, x_t,; z^t_0, \eta^m_0 \left| \tilde{x}^L_s\right.\right] = = M\left\{\ln \frac{p^t_{\tau,t|s}\left(\tilde{x}^N_\tau; x_t \left|\tilde{x}^L_s\right.\right)}{p\left(\tilde{\tau}_N, \tilde{x}^N_\tau; t, x_t \left|\tilde{s}_L, \tilde{x}^L_s\right.\right)}\right\}, \tag{13}$$

$$p\left(\tilde{\tau}_N, \tilde{x}_N; t, x_t \left| \tilde{s}_L, \tilde{x}^L\right.\right) = = \partial^{N+1} P\left\{\tilde{x}^N_\tau \le \tilde{x}_N; x_t \le x \left| \tilde{x}^L_s = \tilde{x}^L\right.\right\} \Big/ \partial \tilde{x}_N \partial x,$$

$$p^t_{\tau,t|s}\left(\tilde{x}_N; x \left| \tilde{x}^L\right.\right) = = \partial^{N+1} P\left\{\tilde{x}^N_\tau \le \tilde{x}_N; x_t \le x \left| \tilde{x}^L_s = \tilde{x}^L, z^t_0, \eta^m_0\right.\right\} \Big/ \partial \tilde{x}_N \partial x$$

есть условное количество информации о прошлых и текущих значениях процесса x_t при фиксированных будущих значениях этого процесса, которое содержится в совокупности реализаций $\left\{z^t_0; \eta^m_0\right\}$,

$$I^t_s\left[\tilde{x}^L_s; z^t_0, \eta^m_0\right] = M\left\{\ln \frac{p^t_s\left(\tilde{x}^L_s\right)}{p\left(\tilde{s}_L, \tilde{x}^L_s\right)}\right\} \tag{14}$$

есть количество информации о будущих значениях процесса x_t, которое содержится в совокупности реализаций $\left\{z^t_0; \eta^m_0\right\}$. Тогда количество информации (5) может быть представлено в виде

$$I^t_{\tau,t,s}\left[\tilde{x}^N_\tau, x_t, \tilde{x}^L_s; z^t_0, \eta^m_0\right] = = I^t_{\tau,t|s}\left[\tilde{x}^N_\tau, x_t; z^t_0, \eta^m_0 \left|\tilde{x}^L_s\right.\right] + I^t_s\left[\tilde{x}^L_s; z^t_0, \eta^m_0\right],$$

где $I^t_{\tau,t|s}\left[\tilde{x}^N_\tau, x_t; z^t_0, \eta^m_0 \left|\tilde{x}^L_s\right.\right]$ и $I^t_s\left[\tilde{x}^L_s; z^t_0, \eta^m_0\right]$ на интервалах $t_m \le t < t_{m+1}$ определяются уравнениями

$$\frac{dI^t_{\tau,t|s}\left[\tilde{x}^N_\tau, x_t; z^t_0, \eta^m_0 \left|\tilde{x}^L_s\right.\right]}{dt} =$$
$$= \frac{1}{2} tr\left[M\left\{R^{-1}(t,z)\left[h\left(t, x_t, \tilde{x}^N_\tau, z\right) - \overline{h\left(\tilde{\tau}_N, t, z \left|\tilde{x}^L_s\right.\right)}\right] \times \right.\right.$$
$$\left.\left. \times \left[h\left(t, x_t, \tilde{x}^N_\tau, z\right) - \overline{h\left(\tilde{\tau}_N, t, z \left|\tilde{x}^L_s\right.\right)}\right]^T\right\}\right] +$$
$$+ tr\left[Q(t) M\left\{\left[\frac{\partial \ln p^t_{\tau,t|s}\left(\tilde{x}^N_\tau; x_t \left|\tilde{x}^L_s\right.\right)}{\partial x_t} - \frac{\partial \ln p_t\left(x_t; \tilde{x}^N_\tau\right)}{\partial x_t}\right] \times \right.\right.$$
$$\left.\left. \times \left(\frac{\partial \ln p_t\left(x_t; \tilde{x}^N_\tau\right)}{\partial x_t}\right)^T\right\}\right] -$$
$$- tr\left[Q(t) M\left\{\left[\frac{\partial \ln p\left(\tilde{\tau}_N, \tilde{x}^N_\tau; t, x_t \left|\tilde{s}_L, \tilde{x}^L_s\right.\right)}{\partial x_t} - \right.\right.\right.$$
$$\left.\left.\left. - \frac{\partial \ln p\left(t, x_t; \tilde{\tau}_N, \tilde{x}^N_\tau\right)}{\partial x_t}\right]\left(\frac{\partial \ln p\left(t, x_t; \tilde{\tau}_N, \tilde{x}^N_\tau\right)}{\partial x_t}\right)^T\right\}\right] -$$
$$- \frac{1}{2} tr\left[Q(t) M\left\{\frac{\partial \ln p^t_{\tau,t|s}\left(\tilde{x}^N_\tau; x_t \left|\tilde{x}^L_s\right.\right)}{\partial x_t}(\cdot)^T - \right.\right.$$
$$\left.\left. - \frac{\partial \ln p\left(\tilde{\tau}_N, \tilde{x}^N_\tau; t, x_t \left|\tilde{s}_L, \tilde{x}^L_s\right.\right)}{\partial x_t}(\cdot)^T\right\}\right], \tag{15}$$

$$\frac{dI^t_s\left[\tilde{x}^L_s; z^t_0, \eta^m_0\right]}{dt} = = \frac{1}{2} tr\left[M\left\{R^{-1}(t,z)\left[\overline{h\left(\tilde{\tau}_N, t, z \left|\tilde{x}^L_s\right.\right)} - \overline{h(t,z)}\right][\cdot]^T\right\}\right] \tag{16}$$

с начальными условиями

$$
\begin{gathered}
I_{\tau,t_m|s}^{t_m}\left[\tilde{x}_\tau^N, x_{t_m}; z_0^{t_m}, \eta_0^m \middle| \tilde{x}_s^L\right]= \\
= I_{\tau,t_m|s}^{t_m-0}\left[\tilde{x}_\tau^N, x_{t_m}; z_0^{t_m}, \eta_0^{m-1} \middle| \tilde{x}_s^L\right]+ \\
+\Delta I_{\tau,t_m|s}^{t_m}\left[\tilde{x}_\tau^N, x_{t_m}; z_0^{t_m}, \eta(t_m) \middle| \tilde{x}_s^L\right],
\end{gathered} \tag{17}
$$

$$
\begin{gathered}
I_s^{t_m}\left[\tilde{x}_s^L; z_0^t, \eta_0^m\right]= \\
= I_s^{t_m-0}\left[\tilde{x}_s^L; z_0^{t_m}, \eta_0^{m-1}\right]+\Delta I_s^{t_m}\left[\tilde{x}_s^L; z_0^{t_m}, \eta(t_m)\right],
\end{gathered} \tag{18}
$$

где

$$
\overline{h\left(\tilde{\tau}_N, t, z \middle| \tilde{x}_s^L\right)} = M\left\{h\left(t, x_t, \tilde{x}_\tau^N, z\right) \middle| \tilde{x}_s^L = \tilde{x}^L, z_0^t, \eta_0^m\right\},
$$

$$
\begin{gathered}
\Delta I_{\tau,t_m|s}^{t_m}\left[\tilde{x}_\tau^N, x_{t_m}; z_0^{t_m}, \eta(t_m) \middle| \tilde{x}_s^L\right]= \\
= M\left\{\ln \frac{c\left(x_{t_m}, \tilde{x}_\tau^N, \eta(t_m), z\right)}{c\left(\eta(t_m), z \middle| \tilde{x}_s^L\right)}\right\},
\end{gathered} \tag{19}
$$

$$
\begin{gathered}
\Delta I_s^{t_m}\left[\tilde{x}_s^L; z_0^{t_m}, \eta(t_m)\right]= \\
= M\left\{\ln \frac{c\left(\eta(t_m), z \middle| \tilde{x}_s^L\right)}{c\left(\eta(t_m), z\right)}\right\},
\end{gathered} \tag{20}
$$

$$
\begin{gathered}
c\left(\eta(t_m), z \middle| \tilde{x}_s^L\right)= \\
= M\left\{c\left(x_{t_m}, \tilde{x}_\tau^N, \eta(t_m), z\right) \middle| \tilde{x}_s^L = \tilde{x}^L, z_0^{t_m}, \eta_0^{m-1}\right\},
\end{gathered}
$$

а $I_{\tau,t_m|s}^{t_m-0}[\cdot] = \lim I_{\tau,t|s}^t[\cdot]$, $I_s^{t_m-0}[\cdot] = \lim I_s^t[\cdot]$ при $t \uparrow t_m$.

Доказательство. По формуле условной вероятности

$$
p_{\tau,t|s}^t\left(\tilde{x}_N; x \mid \tilde{x}^L\right) = p_{\tau,t,s}^t\left(\tilde{x}_N; x; \tilde{x}^L\right) \big/ p_s^t\left(\tilde{x}^L\right). \tag{21}
$$

Интегрируя (8) слева и справа по x, $\tilde{x}_N$, получаем с учетом (21), что апостериорная плотность $p_s^t\left(\tilde{x}^L\right)$ удовлетворяет уравнению

$$
\begin{gathered}
d_t p_s^t\left(\tilde{x}^L\right) = p_s^t\left(\tilde{x}^L\right)\times \\
\times\left[\overline{h\left(\tilde{\tau}_N, t, z \middle| \tilde{x}^L\right)} - \overline{h(t,z)}\right]^T R^{-1}(t,z)\left[dz_t - \overline{h(t,z)}dt\right].
\end{gathered} \tag{22}
$$

Дифференцируя (21) по формуле Ито с использованием (8), (22), получаем

$$
\begin{gathered}
d_t p_{\tau,t|s}^t\left(\tilde{x}_N; x \mid \tilde{x}^L\right)= \\
= \mathbf{L}_{t,x}\left[p_{\tau,t|s}^t\left(\tilde{x}_N; x \mid \tilde{x}^L\right); p_t\left(x; \tilde{x}_N\right)\right]dt+ \\
+p_{\tau,t|s}^t\left(\tilde{x}_N; x \mid \tilde{x}^L\right)\left[h\left(t, x, \tilde{x}_N, z\right) - \overline{h\left(\tilde{\tau}_N, t, z \middle| \tilde{x}^L\right)}\right]^T\times \\
\times R^{-1}(t,z)\left[dz_t - h\left(\tilde{\tau}_N, t, z \middle| \tilde{x}^L\right)dt\right].
\end{gathered}
$$

Априорная плотность $p\left(\tilde{\tau}_N, \tilde{x}_N; t, x \mid \tilde{s}_L, \tilde{x}^L\right)$ определяется уравнением

$$
\begin{gathered}
d_t p\left(\tilde{\tau}_N, \tilde{x}_\tau^N; t, x \mid \tilde{s}_L, \tilde{x}_s^L\right)= \\
= \mathbf{L}_{t,x}\left[p\left(\tilde{\tau}_N, \tilde{x}_\tau^N; t, x \mid \tilde{s}_L, \tilde{x}_s^L\right); p\left(t, x; \tilde{\tau}_N, \tilde{x}_\tau^N\right)\right]dt,
\end{gathered}
$$

которое следует из предыдущего уравнения. Дальнейший вывод уравнения (15) проводится с использованием формул Ито и Ито–Венцеля по методике вывода уравнения (11). Уравнение (16) выводится аналогично (15) с использованием (22), и при этом учитывается, что $d_t p\left(\tilde{s}_L; \tilde{x}^L\right) = 0$. Интегрирование (9) слева и справа по $\tilde{x}^L$ дает, с учетом (21),

$$
p_s^{t_m}\left(\tilde{x}^L\right) = \frac{c\left(\eta(t_m), z \middle| \tilde{x}_s^L\right)}{c\left(\eta(t_m), z\right)} p_s^{t_m-0}\left(\tilde{x}^L\right). \tag{23}
$$

Поделив (9) на (23), получаем, с учетом (21),

$$
\begin{gathered}
p_{\tau,t_m|s}^{t_m}\left(\tilde{x}_N; x \mid \tilde{x}^L\right)= \\
= \frac{c\left(x_{t_m}, \tilde{x}_N, \eta(t_m), z\right)}{c\left(\eta(t_m), z \middle| \tilde{x}^L\right)} p_{\tau,t_m|s}^{t_m-0}\left(\tilde{x}_N; x \mid \tilde{x}^L\right).
\end{gathered} \tag{24}
$$

Использование (24) в (13) приводит, с учетом (19), к (17). Использование (23) в (14) приводит, с учетом (20), к (18). Теорема доказана.

Условно-гауссовский случай

Утверждение 2. Пусть

$$
\begin{gathered}
f(\cdot) = F(t)x_t, \quad p_0(x) = \mathbf{N}\{x; \mu_0; \Gamma_0\}, \\
h(\cdot) = H_0(t,z)x_t + \sum_{k=1}^N H_k(t,z)x_{\tau_k}, \\
g(\cdot) = G_0(t_m,z)x_t + \sum_{k=1}^N G_k(t_m,z)x_{\tau_k}.
\end{gathered} \tag{25}
$$

Тогда имеет место свойство

$$
\begin{gathered}
p_{\tau,t,s}^t\left(\tilde{x}_N; x; \tilde{x}^L\right)= \\
= \mathbf{N}\left\{\tilde{x}_{N+L+1}; \tilde{\mu}_{N+L+1}\left(\tilde{\tau}_N, t, \tilde{s}_L\right), \tilde{\Gamma}_{N+L+1}\left(\tilde{\tau}_N, t, \tilde{s}_L\right)\right\}= \\
= \mathbf{N}\left[\begin{bmatrix} x \\ \tilde{x}_N \\ \tilde{x}^L \end{bmatrix}; \begin{bmatrix} \mu(t) \\ \tilde{\mu}_N\left(\tilde{\tau}_N, t\right) \\ \tilde{\mu}^L\left(\tilde{s}_L, t\right) \end{bmatrix}, \right. \\
\left. \begin{bmatrix} \Gamma(t) & \tilde{\Gamma}_{0N}\left(\tilde{\tau}_N, t\right) & \tilde{\Gamma}_{0,N+1}^L\left(\tilde{s}_L, t\right) \\ \tilde{\Gamma}_{0N}^T(\cdot) & \tilde{\Gamma}_N\left(\tilde{\tau}_N, t\right) & \tilde{\Gamma}_{N,N+1}^L\left(\tilde{\tau}_N, t, \tilde{s}_L\right) \\ \left(\tilde{\Gamma}_{0,N+1}^L(\cdot)\right)^T & \left(\tilde{\Gamma}_{N,N+1}^L(\cdot)\right)^T & \tilde{\Gamma}^L\left(\tilde{s}_L, t\right) \end{bmatrix}\right],
\end{gathered} \tag{26}
$$

где блочные составляющие параметров распределения (26) определяются дифференциально-рекуррентными уравнениями в [1].

Теорема 3. Пусть выполняется условие (25). Тогда количество информации (5) на интервалах $t_m \le t < t_{m+1}$ определяется уравнением

$$\frac{dI^t_{\tau,t,s}\left[\tilde{x}^N_\tau, x_t, \tilde{x}^L_s; z^t_0, \eta^m_0\right]}{dt} =$$
$$=(1/2)tr\left[M\left\{R^{-1}(t,z)H_{0,N}(t,z)\tilde{\Gamma}_{N+1}(\tilde{\tau}_N,t)H^T_{0,N}(t,z)\right\}\right]- \quad (27)$$
$$-(1/2)tr\left[Q(t)M\left\{\Gamma^{-1}(t\,|\,\tilde{s}_L)+\Gamma^{-1}(t\,|\,\tilde{\tau}_N)-\Gamma^{-1}(t)\right\}\right]+$$
$$+(1/2)tr\left[Q(t)\left[D^{-1}(t\,|\,\tilde{s}_L)+D^{-1}(t\,|\,\tilde{\tau}_N)-D^{-1}(t)\right]\right]$$

с начальным условием (12), где

$$\Delta I^{t_m}_{\tau,t_m,s}\left[\tilde{x}^N_\tau, x_{t_m}, \tilde{x}^L_s; z^{t_m}_0, \eta(t_m)\right] =$$
$$=\frac{1}{2}M\left\{\ln\frac{\left|\tilde{\Gamma}_{N+L+1}(\tilde{\tau}_N, t_m-0, \tilde{s}_L)\right|}{\left|\tilde{\Gamma}_{N+L+1}(\tilde{\tau}_N, t_m, \tilde{s}_L)\right|}\right\}, \quad (28)$$

$$H_{0,N}(t,z)=\left[H_0(t,z)\,\vdots\,H_1(t,z)\,\vdots\,\cdots\,\vdots\,H_N(t,z)\right],$$

$$\tilde{\Gamma}_{N+1}(\tilde{\tau}_N,t)=\begin{bmatrix}\Gamma(t) & \tilde{\Gamma}_{0N}(\tilde{\tau}_N,t)\\ \tilde{\Gamma}^T_{0N}(\tilde{\tau}_N,t) & \tilde{\Gamma}_N(\tilde{\tau}_N,t)\end{bmatrix},$$

$$\Gamma(t\,|\,\tilde{\tau}_N)=\Gamma(t)-\tilde{\Gamma}_{0N}(\tilde{\tau}_N,t)\tilde{\Gamma}^{-1}_N(\tilde{\tau}_N,t)\tilde{\Gamma}^T_{0N}(\tilde{\tau}_N,t), \quad (29)$$

$$\Gamma(t\,|\,\tilde{s}_L)=\Gamma(t)-\tilde{\Gamma}^L_{0,N+1}(\tilde{s}_L,t)\times$$
$$\times\left(\tilde{\Gamma}^L(\tilde{s}_L,t)\right)^{-1}\left(\tilde{\Gamma}^L_{0,N+1}(\tilde{s}_L,t)\right)^T, \quad (30)$$

$$D(t\,|\,\tilde{\tau}_N)=D(t)-\tilde{D}_{0N}(\tilde{\tau}_N,t)\tilde{D}^{-1}_N(\tilde{\tau}_N,t)\tilde{D}^T_{0N}(\tilde{\tau}_N,t), \quad (31)$$

$$D(t\,|\,\tilde{s}_L)=D(t)-\tilde{D}^L_{0,N+1}(\tilde{s}_L,t)\left(\tilde{D}^L(\tilde{s}_L,t)\right)^{-1}\left(\tilde{D}^L_{0,N+1}(\tilde{s}_L,t)\right)^T,$$

$$D(t),\ \tilde{D}_{0N}(\tilde{\tau}_N,t),\ \tilde{D}_N(\tilde{\tau}_N,t),\ \tilde{D}^L_{0,N+1}(\tilde{s}_L,t).$$

$\tilde{D}^L(\tilde{s}_L,t)$ – блочные составляющие матрицы вторых моментов априорного гауссовского распределения $p(\tilde{\tau}_N, \tilde{x}_N; t, x; \tilde{s}_L, \tilde{x}^L) = \mathbf{N}\{\tilde{x}_{N+L+1}; \tilde{a}_{N+L+1}(\tilde{\tau}_N, t, \tilde{s}_L), \tilde{D}_{N+L+1}(\tilde{\tau}_N, t, \tilde{s}_L)\}$, блочная структура параметров которого аналогична блочной структуре параметров распределения (26).

Доказательство. По свойству гауссовских плотностей имеет место свойство [9]:

$$p^t_{t|\tau}(x\,|\,\tilde{x}_N)=\mathbf{N}\left\{x;\mu(t\,|\,\tilde{\tau}_N),\Gamma(t\,|\,\tilde{\tau}_N)\right\}, \quad (32)$$

$$\mu(t\,|\,\tilde{\tau}_N)=\mu(t)+\tilde{\Gamma}_{0N}(\tilde{\tau}_N,t)\left(\tilde{\Gamma}_N(\tilde{\tau}_N,t)\right)^{-1}\left[\tilde{x}_N-\tilde{\mu}_N(\tilde{\tau}_N,t)\right],$$

а $\Gamma(t\,|\,\tilde{\tau}_N)$ определено в (29). Из (10), (25), (26) следует, что

$$\overline{h(t,z)}=H_{0,N}(t,z)\tilde{\mu}_{N+1}(\tilde{\tau}_N,t),$$
$$h(t,x_t,\tilde{x}^N_\tau,z)-\overline{h(t,z)}=H_{0,N}(t,z)\left[\tilde{x}^{N+1}_\tau-\tilde{\mu}_{N+1}(\tilde{\tau}_N,t)\right],$$
$$M\left\{\left[h(t,x_t,\tilde{x}^N_\tau,z)-\overline{h(t,z)}\right]\left[h(t,x_t,\tilde{x}^N_\tau,z)-\overline{h(t,z)}\right]^T\right\}= \quad (33)$$
$$=H_{0,N}(t,z)\tilde{\Gamma}_{N+1}(\tilde{\tau}_N,t)H^T_{0N}(t,z),$$

где $\mu_{N+1}(\tilde{\tau}_N,t)=\begin{bmatrix}\mu(t)\\ \tilde{\mu}_N(\tilde{\tau}_N,t)\end{bmatrix}$, $\tilde{x}^{N+1}_\tau=\begin{bmatrix}x_t\\ \tilde{x}^N_\tau\end{bmatrix}$.

Так как $p_t(x_t;\tilde{x}^N_\tau)=p_{t|\tau}(x_t\,|\,\tilde{x}^N_\tau)p_t(\tilde{x}^N_\tau)$, то, с учетом (32),

$$\frac{\partial\ln p_t(x_t;\tilde{x}^N_\tau)}{\partial x_t}=\frac{\partial\ln p_{t|\tau}(x_t\,|\,\tilde{x}^N_\tau)}{\partial x_t}=$$
$$=-\Gamma^{-1}(t\,|\,\tilde{\tau}_N)\left[x_t-\mu(t\,|\,\tilde{\tau}_N)\right],$$
$$M\left\{\frac{\partial\ln p_t(x_t;\tilde{x}^N_\tau)}{\partial x_t}\left(\frac{\partial\ln p_t(x_t;\tilde{x}^N_\tau)}{\partial x_t}\right)^T\right\}= \quad (34)$$
$$=\Gamma^{-1}(t\,|\,\tilde{\tau}_N).$$

По формуле условной вероятности

$$p^t_{\tau,t,s}(\tilde{x}^N_\tau;x_t;\tilde{x}^L_s)=$$
$$=\frac{p_{t|s}(x_t\,|\,\tilde{x}^L_s)}{p_t(x_t)}p_{t|\tau}(x_t\,|\,\tilde{x}^N_\tau)p_t(\tilde{x}^N_\tau)p_s(\tilde{x}^L_s). \quad (35)$$

Тогда

$$M\left\{\frac{\partial\ln p^t_{\tau,t,s}(\tilde{x}^N_\tau;x_t;\tilde{x}^L_s)}{\partial x_t}\left(\frac{\partial\ln p_t(x_t;\tilde{x}^N_\tau)}{\partial x_t}\right)^T\right\}=$$
$$=M\left\{\frac{\partial\ln p_{t|s}(x_t\,|\,\tilde{x}^L_s)}{\partial x_t}\left(\frac{\partial\ln p_{t|\tau}(x_t\,|\,\tilde{x}^N_\tau)}{\partial x_t}\right)^T\right\}+$$
$$+M\left\{\frac{\partial\ln p_{t|\tau}(x_t\,|\,\tilde{x}^N_\tau)}{\partial x_t}\left(\frac{\partial\ln p_{t|\tau}(x_t\,|\,\tilde{x}^N_\tau)}{\partial x_t}\right)^T\right\}- \quad (36)$$
$$-M\left\{\frac{\partial\ln p_t(x_t)}{\partial x_t}\left(\frac{\partial\ln p_{t|\tau}(x_t\,|\,\tilde{x}^N_\tau)}{\partial x_t}\right)^T\right\}.$$

Аналогично (32)

$$p_{t|s}(x\,|\,\tilde{x}^L)=\mathbf{N}\left\{x;\mu(t\,|\,\tilde{s}_L),\Gamma(t\,|\,\tilde{s}_L)\right\}, \quad (37)$$
$$\mu(t\,|\,\tilde{s}_L)=\mu(t)+$$
$$+\tilde{\Gamma}^L_{0,N+1}(\tilde{s}_L,t)\left(\tilde{\Gamma}^L(\tilde{s}_L,t)\right)^{-1}\left[\tilde{x}^L-\tilde{\mu}^L(\tilde{s}_L,t)\right],$$

а $\Gamma(t\,|\,\tilde{s}_L)$ определено в (30).

Так как $p^t_s(x_t;\tilde{x}^L_s)=p_{t|s}(x_t\,|\,\tilde{x}^L_s)p_s(\tilde{x}^L_s)$, то, с учетом (37),

$$\frac{\partial\ln p^t_s(x_t;\tilde{x}^L_s)}{\partial x_t}=\frac{\partial\ln p_{t|s}(x_t\,|\,\tilde{x}^L_s)}{\partial x_t}= \quad (38)$$
$$=-\Gamma^{-1}(t\,|\,\tilde{s}_L)\left[x_t-\mu(t\,|\,\tilde{s}_L)\right].$$

Тогда из (34), (38), с учетом (32), (37), следует, что

$$M\left\{\frac{\partial\ln p_{t|s}(x_t\,|\,\tilde{x}^L_s)}{\partial x_t}\left(\frac{\partial\ln p_{t|\tau}(x_t\,|\,\tilde{x}^N_\tau)}{\partial x_t}\right)^T\right\}=\Gamma^{-1}(t). \quad (39)$$

Так как $p_t(x)=\mathbf{N}\{x;\mu(t),\Gamma(t)\}$ [9], то

$$\frac{\partial \ln p_t(x_t)}{\partial x_t}=-\Gamma^{-1}(t)\left[x_t-\mu(t)\right], \tag{40}$$

и, с учетом (32), (34),

$$M\left\{\frac{\partial \ln p_t(x_t)}{\partial x_t}\left(\frac{\partial \ln p_{t|\tau}(x_t\mid\tilde{x}_\tau^N)}{\partial x_t}\right)^T\right\}=\Gamma^{-1}(t). \tag{41}$$

Тогда из (34), (36), (39)–(41) следует

$$M\left\{\left[\frac{\partial \ln p_{\tau,t,s}^t(\tilde{x}_\tau^N;x_t;\tilde{x}_s^L)}{\partial x_t}-\frac{\partial \ln p_t(x_t;\tilde{x}_\tau^N)}{\partial x_t}\right]\times\right.$$
$$\left.\times\left(\frac{\partial \ln p_t(x_t;\tilde{x}_\tau^N)}{\partial x_t}\right)^T\right\}=0. \tag{42}$$

Из (38) следует

$$M\left\{\frac{\partial \ln p_{t|s}(x_t\mid\tilde{x}_s^L)}{\partial x_t}\left(\frac{\partial \ln p_{t|s}(x_t\mid\tilde{x}_s^L)}{\partial x_t}\right)^T\right\}=$$
$$=\Gamma^{-1}(t\mid\tilde{s}_L). \tag{43}$$

Из (37), (38), (40) следует

$$M\left\{\frac{\partial \ln p_{t|s}(x_t\mid\tilde{x}_s^L)}{\partial x_t}\left(\frac{\partial \ln p_t(x_t)}{\partial x_t}\right)^T\right\}=\Gamma^{-1}(t). \tag{44}$$

Из (34), (39), (41), (43), (44) следует

$$M\left\{\frac{\partial \ln p_{\tau,t,s}^t(\tilde{x}_\tau^N;x_t;\tilde{x}_s^L)}{\partial x_t}\left(\frac{\partial \ln p_{\tau,t,s}^t(\tilde{x}_\tau^N;x_t;\tilde{x}_s^L)}{\partial x_t}\right)^T\right\}=$$
$$=\Gamma^{-1}(t\mid\tilde{s}_L)+\Gamma^{-1}(t\mid\tilde{\tau}_N)-\Gamma^{-1}(t). \tag{45}$$

При условиях (25) априорная плотность (6) является гауссовской, т.е.

$$p(\tilde{\tau}_N,\tilde{x}_N;t,x;\tilde{s}_L,\tilde{x}^L)=$$
$$=\mathbf{N}\left\{\tilde{x}_{N+L+1};\bar{\bar{x}}_{N+L+1}(\tilde{\tau}_N,t,\tilde{s}_L),\tilde{D}_{N+L+1}(\tilde{\tau}_N,t,\tilde{s}_L)\right\}. \tag{46}$$

Тогда для плотности (46) будут справедливы формулы, аналогичные (42), (45). Подстановка (33), (37), (45) и формул, связанных с (46), аналогичных (42), (45), в (11) приводит к (27). Из (9), (26) следует, что

$$M\left\{\ln\frac{c(x_{t_m},\tilde{x}_\tau^N,\eta(t_m),z)}{c(\eta(t_m),z)}\right\}=$$
$$=\frac{1}{2}M\left\{\ln\frac{\left|\tilde{\Gamma}_{N+L+1}(\tilde{\tau}_N,t_m-0,\tilde{s}_L)\right|}{\left|\tilde{\Gamma}_{N+L+1}(\tilde{\tau}_N,t_m,\tilde{s}_L)\right|}\right\},$$

т.е. с учетом (12) пришли к (28). Теорема доказана.

Теорема 4. Количества информации (13) и (14) на интервалах $t_m\le t<t_{m+1}$ определяются уравнениями

$$\frac{dI_{\tau,t|s}^t\left[\tilde{x}_\tau^N,x_t;z_0^t,\eta_0^m\middle|\tilde{x}_s^L\right]}{dt}=$$
$$=\frac{1}{2}tr\left[M\left\{R^{-1}(t,z)\left[H_{0,N}(t,z)\tilde{\Gamma}_{N+1}(\tilde{\tau}_N,t)H_{0,N}^T(t,z)-\right.\right.\right.$$
$$\left.\left.\left.-\tilde{H}_L(t)\left(\tilde{\Gamma}^L(\tilde{s}_L,t)\right)^{-1}\tilde{H}_L^T(t,z)\right]\right\}\right]+ \tag{47}$$
$$+\frac{1}{2}tr\left[Q(t)\left[D^{-1}(t|\tilde{s}_L)+D^{-1}(t|\tilde{\tau}_N)-D^{-1}(t)-\right.\right.$$
$$\left.\left.-\left[\Gamma^{-1}(t|\tilde{s}_L)+\Gamma^{-1}(t|\tilde{\tau}_N)-\Gamma^{-1}(t)\right]\right]\right],$$

$$\frac{dI_s^t\left[\tilde{x}_s^L;z_0^t,\eta_0^m\right]}{dt}=$$
$$=\frac{1}{2}tr\left[M\left\{R^{-1}(t,z)\tilde{H}_L(t,z)\left(\tilde{\Gamma}^L(\tilde{s}_L,t)\right)^{-1}\tilde{H}_L^T(t,z)\right\}\right], \tag{48}$$

с начальными условиями (17), (18), где

$$\Delta I_{\tau,t_m|s}^{t_m}\left[\tilde{x}_\tau^N,x_{t_m};z_0^{t_m},\eta(t_m)\middle|\tilde{x}_s^L\right]=$$
$$=\frac{1}{2}\ln\frac{\left|\tilde{\Gamma}_{N+1}(\tilde{\tau}_N,t_m-0|\tilde{s}_L)\right|}{\left|\tilde{\Gamma}_{N+1}(\tilde{\tau}_N,t_m|\tilde{s}_L)\right|}, \tag{49}$$

$$\Delta I_s^{t_m}\left[\tilde{x}_s^L;z_0^{t_m},\eta(t_m)\right]=$$
$$=\frac{1}{2}\ln\frac{\left|\tilde{\Gamma}^L(\tilde{s}_L,t_m-0)\right|}{\left|\tilde{\Gamma}^L(\tilde{s}_L,t_m)\right|}, \tag{50}$$

$$\tilde{H}_{N+l}(t,z)=H_0(t,z)\Gamma_{0,N+1}^l(s_l,t)+$$
$$+\sum_{k=1}^{N}H_k(t,z)\,\Gamma_{k,N+1}^l(\tau_k,s_l,t),\ l=\overline{1;L},$$
$$\tilde{H}_L(t,z)=\left[\tilde{H}_{N+1}(t,z)\mid\cdots\mid\tilde{H}_{N+L}(t,z)\right], \tag{51}$$

$$\tilde{\Gamma}_{N+1}(\tilde{\tau}_N,t|\tilde{s}_L)=$$
$$=\tilde{\Gamma}_{N+1}(\cdot)-\begin{bmatrix}\tilde{\Gamma}_{0,N+1}^L(\cdot)\\ \tilde{\Gamma}_{N,N+1}^L(\cdot)\end{bmatrix}\left(\tilde{\Gamma}^L(\cdot)\right)^{-1}\begin{bmatrix}\tilde{\Gamma}_{0,N+1}^L(\cdot)\\ \tilde{\Gamma}_{N,N+1}^L(\cdot)\end{bmatrix}^T.$$

Доказательство. По свойству гауссовских плотностей имеет место свойство [9]:

$$p_{\tau,t|s}^t(\tilde{x}_N;x\mid\tilde{x}^L)=$$
$$=\mathbf{N}\left\{\tilde{x}_{N+1};\tilde{\mu}_{N+1}(\tilde{\tau}_N,t\mid\tilde{s}_L),\tilde{\Gamma}_{N+1}(\tilde{\tau}_N,t\mid\tilde{s}_L)\right\},$$
$$\tilde{\mu}_{N+1}(\tilde{\tau}_N,t\mid\tilde{s}_L)=\tilde{\mu}_{N+1}(\tilde{\tau}_N,t)+$$
$$+\tilde{\Gamma}_{N+1}^L(\tilde{\tau}_N;t;\tilde{s}_L)\left(\tilde{\Gamma}^L(\tilde{s}_L,t)\right)^{-1}\left[\tilde{x}^L-\tilde{\mu}^L(\tilde{s}_L,t)\right], \tag{52}$$
$$\tilde{\Gamma}_{N+1}^L(\tilde{\tau}_N,t,\tilde{s}_L)=\begin{bmatrix}\tilde{\Gamma}_{0,N+1}^L(\cdot)\\ \tilde{\Gamma}_{N,N+1}^L(\cdot)\end{bmatrix}.$$

Из (25) следует

$$h\left(t, x_t, \tilde{x}_\tau^N, z\right) = h\left(t, z\right) + H_{0,N}\left(t, z\right)\tilde{x}_\tau^{N+1}, \quad (53)$$

$$\overline{h\left(\tilde{\tau}_N, t, z \middle| \tilde{x}_s^L\right)} = h\left(t, z\right) + \\ + H_{0,N}\left(t, z\right)\tilde{\mu}_{N+1}\left(\tilde{\tau}_N, t \mid \tilde{s}_L\right). \quad (54)$$

Учитывая (52)–(54), получаем

$$\left[h\left(t, x_t, \tilde{x}_\tau^N, z\right) - \overline{h\left(\tilde{\tau}_N, t, z \middle| \tilde{x}_s^L\right)}\right]\left[\cdot\right]^T =$$

$$= H_{0,N}\left(t, z\right)\left[\tilde{x}_\tau^{N+1} - \tilde{\mu}_{N+1}\left(\tilde{\tau}_N, t\right)\right] \times$$

$$\times \left[\tilde{x}_\tau^{N+1} - \tilde{\mu}_{N+1}\left(\tilde{\tau}_N, t\right)\right]^T H_{0,N}^T\left(t, z\right) -$$

$$- H_{0,N}\left(t, z\right)\left[\tilde{x}_\tau^{N+1} - \tilde{\mu}_{N+1}\left(\tilde{\tau}_N, t\right)\right]\left[\tilde{x}^L - \tilde{\mu}^L\left(\tilde{s}_L, t\right)\right]^T \times$$

$$\times \left(\tilde{\Gamma}^L\left(\tilde{s}_L, t\right)\right)^{-1}\left(\tilde{\Gamma}_{N+1}^L\left(\tilde{\tau}_N; t; \tilde{s}_L\right)\right)^T H_{0,N}^T\left(t, z\right) -$$

$$- H_{0,N}\left(t, z\right)\tilde{\Gamma}_{N+1}^L\left(\tilde{\tau}_N; t; \tilde{s}_L\right)\left(\tilde{\Gamma}^L\left(\tilde{s}_L, t\right)\right)^{-1} \times$$

$$\times \left[\tilde{x}^L - \tilde{\mu}^L\left(\tilde{s}_L, t\right)\right]\left[\tilde{x}_\tau^{N+1} - \tilde{\mu}_{N+1}\left(\tilde{\tau}_N, t\right)\right]^T H_{0,N}^T\left(t, z\right) +$$

$$+ H_{0,N}\left(t, z\right)\tilde{\Gamma}_{N+1}^L\left(\tilde{\tau}_N; t; \tilde{s}_L\right)\left(\tilde{\Gamma}^L\left(\tilde{s}_L, t\right)\right)^{-1} \times$$

$$\times \left[\tilde{x}^L - \tilde{\mu}^L\left(\tilde{s}_L, t\right)\right]\left[\tilde{x}^L - \tilde{\mu}^L\left(\tilde{s}_L, t\right)\right]^T \times$$

$$\times \left(\tilde{\Gamma}^L\left(\tilde{s}_L, t\right)\right)^{-1}\left(\tilde{\Gamma}_{N+1}^L\left(\tilde{\tau}_N; t; \tilde{s}_L\right)\right)^T H_{0,N}^T\left(t, z\right).$$

Из (51) следует, что $\tilde{H}_L(t,z) = H_{0,N}(t,z)\tilde{\Gamma}_{N+1}^L(\tilde{\tau}_N; t; \tilde{s}_L)$. Тогда

$$M\left\{\left[h\left(t, x_t, \tilde{x}_\tau^N, z\right) - \overline{h\left(\tilde{\tau}_N, t, z \middle| \tilde{x}_s^L\right)}\right]\left[\cdot\right]^T\right\} =$$

$$= H_{0,N}\left(t, z\right)\tilde{\Gamma}_{N+1}\left(\tilde{\tau}_N, t\right)H_{0,N}^T\left(t, z\right) - \\ - \tilde{H}_L\left(t, z\right)\left(\tilde{\Gamma}^L\left(\tilde{s}_L, t\right)\right)^{-1}\tilde{H}_L^T\left(t, z\right). \quad (55)$$

Постановка (42), (45), (55) и формул, связанных с (46), аналогичных (42), (45), в (15) приводит к (47). С учетом (33) и (44) следует, что

$$\overline{h\left(\tilde{\tau}_N, t, z \middle| \tilde{x}_s^L\right)} - \overline{h(t, z)} =$$

$$= H_{0,N}(t, z)\left[\tilde{\mu}_{N+1}\left(\tilde{\tau}_N, t \mid \tilde{s}_L\right) - \tilde{\mu}_{N+1}\left(\tilde{\tau}_N, t\right)\right].$$

Тогда, согласно (52),

$$M\left\{\left[\overline{h\left(\tilde{\tau}_N, t, z \middle| \tilde{x}_s^L\right)} - \overline{h\left(t, z\right)}\right]\left[\cdot\right]^T\right\} = \\ = \tilde{H}_L\left(t, z\right)\left(\tilde{\Gamma}^L\left(\tilde{s}_L, t\right)\right)^{-1}\tilde{H}_L^T\left(t, z\right). \quad (56)$$

Постановка (56) в (16) приводит к (48). Соотношения (49), (50) следуют непосредственно из (23), (24).

Заключение

Получено количество информации по Шеннону в совместной задаче непрерывно-дискретной фильтрации, интерполяции и экстраполяции с произвольной памятью и исследована структура этого количества информации в виде представлений $I_{\tau,t,s}^t\left[\cdot\right]$ через условное количество информации $I_{\tau,t|s}^t\left[\tilde{x}_\tau^N, x_t, ; z_0^t, \eta_0^m \middle| \tilde{x}_s^L\right]$ о прошлых и текущих значениях процесса x_t при фиксированных будущих значениях этого процесса и количество информации $I_s^t\left[\tilde{x}_s^L; z_0^t, \eta_0^m\right]$ о будущих значениях процесса x_t.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Демин Н.С., Рожкова С.В., Рожкова О.В.* Обобщенная скользящая экстраполяция стохастических процессов по совокупности непрерывных и дискретных наблюдений с памятью // Изв. РАН. ТиСУ. 2000. № 4. С. 39–51.
2. *Шеннон К.* Работы по теории информации и кибернетике. М.: ИЛ, 1963. 829 с.
3. *Демин Н.С., Короткевич В.И.* О количестве информации в задачах фильтрации компонент Марковских процессов // Автоматика и телемеханика. 1983. № 7. С. 87–96.
4. *Демин Н.С., Короткевич В.И.* Об уравнениях для шенноновского количества информации при передаче Марковских диффузионных сигналов по каналам с памятью // Проблемы передачи информации. 1987. Т. 23, № 1. С. 16–27.
5. *Dyomin N.S., Rozhkova S.V., Safronova I.E.* Information amount determination for joint problem of filtering and generalized extrapolation of stochastic processes with respect to the set of continuous and discrete memory observations // Informatica. 2003. Vol. 14, № 3. P. 295–322.
6. *Dyomin N.S., Rozhkova S.V., Safronova I.E.* About structure of Shannon information amount for joint filtering and extrapolation problem by continuous-discrete memory observations // Informatica. 2004. Vol. 15, № 2. P. 171–202.
7. *Демин Н.С., Рожкова С.В.* О структуре количества информации в совместной задаче фильтрации и интерполяции по наблюдениям с памятью. Общий случай // Известия Томского политехнического университета. 2004. Т. 307, № 3. С. 13–17.
8. *Демин Н.С., Рожкова С.В.* О структуре количества информации в совместной задаче фильтрации и интерполяции по наблюдениям с памятью. Условно-гауссовский случай // Известия Томского политехнического университета. 2004. Т. 307, № 4. С. 6–10.
9. *Липцер Р.Ш., Ширяев А.Н.* Статистика случайных процессов. М.: Наука, 1974. 696 с.

Статья представлена кафедрой прикладной математики факультета прикладной математики и кибернетики Томского государственного университета и кафедрой высшей математики факультета естественных наук и математики Томского политехнического университета, поступила в научную редакцию «Кибернетика» 3 июля 2006 г.