УДК 519.865

Н.С. Демин, А.В. Маркелова

ИССЛЕДОВАНИЕ ЭКЗОТИЧЕСКОГО ОПЦИОНА ПРОДАЖИ В БИНОМИАЛЬНОЙ МОДЕЛИ В СЛУЧАЕ ПРИТОКА И ОТТОКА КАПИТАЛА

Проводится исследование стоимости опциона, портфеля и капитала для экзотического опциона продажи Европейского типа в случае притока и оттока капитала в биномиальной модели финансового (*B,S*)-рынка.

В случае стандартных опционов купли и продажи с платежными функциями $f(S_N)$ соответственно $f(S_N)=(S_N-K)^+$ и $f(S_N)=(K-S_N)^+$ $\left(a^+=\max\{a,0\}\right)$ [1], где S_N – стоимость рискового актива в момент исполнения *N*, *K* – оговоренная цена исполнения, выплаты по опционам могут быть достаточно большими, что представляет существенный риск для инвестора. Одним из способов ограничения этого риска является решение задачи относительно платежных функций, которые предусматривают выплаты, не превышающие заданную величину K_2, т.е. относительно функций соответственно для опционов купли и продажи вида $f(S_N)=\min\left\{(S_N-K_1)^+,K_2\right\}$ и $f(S_N)=\min\left\{(K_1-S_N)^+,K_2\right\}$. Опцион купли предъявляется к исполнению, если S_N превышает K_1, опцион продажи предъявляется к исполнению S_N меньше K_1, если при этом выплаты ограничены величиной K_2. Опционы с платежными функциями подобного типа относятся к классу экзотических опционов [2, 3]. В данной работе проводится исследование для экзотического опциона продажи в случае возможного оттока и притока капитала в биномиальной модели рынка на основе комбинаторного метода [4, 5].

Постановка задачи

Рассмотрим финансовый рынок, в котором обращаются ценные бумаги двух видов – безрисковые и рисковые. Пусть $\{B_0, B_1, ..., B_N\}$ и $\{S_0, S_1, ..., S_N\}$ – эволюции цен соответственно безрискового и рисковых активов в промежутке времени [0,*N*], причем

$$B_{n+1}=\rho B_n,\ S_{n+1}=\xi_{n+1}S_n,\ n=\overline{0,N}, \qquad (1)$$

где $\rho>1$ – некоторая постоянная, а величины ξ_k могут соответственно принимать только два значения: *u* и *d*. Очевидно, что если $\rho=1+r$, $r>0$, то *r* – это постоянная процентная ставка. Пусть для рискового актива $u>1$ – сдвиг цены вверх, а $0<d<1$ – сдвиг цены вниз. Будем предполагать $d<\rho<u$, что необходимо для предотвращения арбитража, т.е. получения прибыли без риска [1]. Пусть β_n и γ_n – соответственно количество (доля) безрисковых активов и рисковых активов, суммарная стоимость которых (капитал) равна

$$X_n=\beta_n B_n+\gamma_n S_n. \qquad (2)$$

Предполагается, что возможен отток (например, на налоги, операционные издержки, накладные расходы) и приток (например, за счет дивидендов от акций) капитала, который характеризуется последовательностью $g_n\ge 0$ с $g_0=0$. При этом если $g_n>0$, то имеется отток, а если $g_n<0$, то происходит приток капитала. Преобразование портфеля (β_n,γ_n) в $(\beta_{n+1},\gamma_{n+1})$ происходит с учетом значения g_{n+1}, т.е. β_{n+1},γ_{n+1} должны быть такими, что

$$X_n-g_{n+1}=\beta_{n+1}B_n+\gamma_{n+1}S_n. \qquad (3)$$

Предполагаем, что последовательность g_n пропорциональна рисковой составляющей капитала с коэффициентом *c*, т.е. $g_{n+1}=c\gamma_{n+1}S_n$. В следующий момент времени $n+1$ за счет изменения цен активов цена этого портфеля становится равной

$$X_{n+1}=\beta_{n+1}B_{n+1}+(1+c)\gamma_{n+1}S_{n+1}. \qquad (4)$$

Целью игры на финансовом рынке является достижение за счет управления портфелем описанным выше способом равенства $X_N=f(S_N)$, где *N* – срок исполнения опциона, а $f(\cdot)\ge 0$ – функция выплат.

Рассматривается Европейский опцион продажи экзотического типа с функцией выплат

$$f(S_N)=f^P(S_N)=\min\left\{(K_1-S_N)^+,K_2\right\}, \qquad (5)$$

где S_N – стоимость рискового актива в момент исполнения опциона *N*, K_1 – оговариваемая в момент заключения контракта цена реализации рискового актива в момент исполнения, а K_2 – величина ограничения выплат, причем $0<K_2<K_1$.

Основные результаты

Введем обозначения:

$$\mathrm{B}(k_0,N,p)=\sum_{k=k_0}^{N}C_N^k p^k(1-p)^{N-k},\ \hat{p}^*=\frac{u}{\rho(1+c)}\hat{p}, \qquad (6)$$

$$\hat{p}=\frac{(1+c)\rho-d}{u-d},\ \hat{q}=1-\hat{p}=\frac{u-(1+c)\rho}{u-d},$$

$$\left(d/\rho\right)-1<c<\left(u/\rho\right)-1,$$

$$j_1^P(k)=\left[\ln\left(\frac{K_1}{S_k d^{N-k}}\right)\Big/\ln\left(\frac{u}{d}\right)\right],$$

$$j_2^P(k)=\left[\ln\left(\frac{K_1-K_2}{S_k d^{N-k}}\right)\Big/\ln\left(\frac{u}{d}\right)\right],\ k=\overline{0,N}, \qquad (7)$$

где [D] – целая часть числа D.

Утверждение. В случае произвольной функции выплат $f(S)$ портфель $\pi_{k+1}=(\beta_{k+1},\gamma_{k+1})$ и капитал X_k определяются формулами

$$\gamma_{k+1}=\frac{f_{k+1}(S_k u)-f_{k+1}(S_k d)}{S_k(u-d)}, \qquad (8)$$

$$\beta_{k+1}=\frac{uf_{k+1}(S_k d)-df_{k+1}(S_k u)}{\rho B_k(u-d)}, \qquad (9)$$

$$X_k=\rho^{-1}\left[\hat{p}\,f_{k+1}(S_k u)+\hat{q}\,f_{k+1}(S_k d)\right], \qquad (10)$$

$$f_k(S)=\rho^{-(N-k)}\sum_{j=0}^{N-k}C_{N-k}^{j}\,\hat{p}^{\,j}\,\hat{q}^{\,N-k-j}\,f\left(Su^j d^{N-k-j}\right). \qquad (11)$$

Доказательство данного утверждения проводится аналогично доказательству следствия 1 в [5].

Теорема 1. Стоимость опциона P_N, портфель $\pi_{k+1}=(\beta_{k+1}^P,\gamma_{k+1}^P)$ и капитал X_k^P определяются формулами

$$\mathrm{P}_N=\frac{K_1}{\rho^N}\left[\mathrm{B}\left(j_2^P+1,N,\hat{p}\right)-\mathrm{B}\left(j_1^P+1,N,\hat{p}\right)\right]-$$
$$-(1+c)^N S_0\left[\mathrm{B}\left(j_2^P+1,N,\hat{p}^{\,*}\right)-\mathrm{B}\left(j_1^P+1,N,\hat{p}^{\,*}\right)\right]+$$
$$+\frac{K_2}{\rho^N}\left[1-\mathrm{B}\left(j_2^P+1,N,\hat{p}^{\,*}\right)\right], \qquad (12)$$

$$\gamma_{k+1}^P=-(1+c)^{N-k-1}\left[\mathrm{B}\left(j_2^P(k)+1,N-k-1,\hat{p}^{\,*}\right)-\right.$$
$$\left.-\mathrm{B}\left(j_1^P(k)+1,N-k-1,\hat{p}^{\,*}\right)\right]+$$
$$+C_N^{j_2^P(k)}\,\hat{p}^{\,j_2^P(k)}\left(1-\hat{p}\right)^{N-k-1-j_2^P(k)}\times$$
$$\times\frac{d^{N-k}}{\rho^{N-k-1}(u-d)}\left\{\frac{K_1-K_2}{S_k d^{N-k}}-\left(\frac{u}{d}\right)^{j_2^P(k)+1}\right\}-$$
$$-C_N^{j_1^P(k)}\,\hat{p}^{\,j_1^P(k)}\left(1-\hat{p}\right)^{N-k-1-j_1^P(k)}\times$$
$$\times\frac{d^{N-k}}{\rho^{N-k-1}(u-d)}\left\{\frac{K_1}{S_k d^{N-k}}-\left(\frac{u}{d}\right)^{j_1^P(k)+1}\right\}, \qquad (13)$$

$$\beta_{k+1}^P=\frac{K_1}{\rho^{N-k}B_k}\left[\mathrm{B}\left(j_2^P(k)+1,N-k-1,\hat{p}\right)-\right.$$
$$\left.-\mathrm{B}\left(j_1^P(k)+1,N-k-1,\hat{p}\right)\right]+$$
$$+\frac{K_2}{\rho^{N-k}B_k}\left[1-\mathrm{B}\left(j_2^P(k)+1,N-k-1,\hat{p}\right)\right]+$$
$$+C_{N-k-1}^{j_1^P(k)}\,\hat{p}^{\,j_1^P(k)}\left(1-\hat{p}\right)^{N-k-1-j_1^P(k)}\times$$
$$\times\frac{S_k d^{N-k+1}}{B_k\rho^{N-k}}\left(\frac{K_1}{S_k d^{N-k}}-\left(\frac{u}{d}\right)^{j_1^P(k)+1}\right)-$$
$$-C_{N-k-1}^{j_2^P(k)}\,\hat{p}^{\,j_2^P(k)}\left(1-\hat{p}\right)^{N-k-1-j_2^P(k)}\times$$
$$\times\frac{S_k d^{N-k+1}}{B_k\rho^{N-k}}\left(\frac{K_1-K_2}{S_k d^{N-k}}-\left(\frac{u}{d}\right)^{j_2^P(k)+1}\right), \qquad (14)$$

$$X_k^P=\frac{K_1}{\rho^{N-k}}\left[\mathrm{B}\left(j_2^P(k)+1,N-k-1,\hat{p}\right)-\right.$$
$$\left.-\mathrm{B}\left(j_1^P(k)+1,N-k-1,\hat{p}\right)\right]+$$
$$+\frac{K_2}{\rho^{N-k}}\left[1-\mathrm{B}\left(j_2^P(k)+1,N-k-1,\hat{p}\right)\right]-$$
$$-(1+c)^{N-k}S_k\left[\mathrm{B}\left(j_2^P(k)+1,N-k-1,\hat{p}^{\,*}\right)-\right.$$
$$\left.-\mathrm{B}\left(j_1^P(k)+1,N-k-1,\hat{p}^{\,*}\right)\right]-$$
$$-C_{N-k-1}^{j_1^P(k)}\,\hat{p}^{\,j_1^P(k)}\left(1-\hat{p}\right)^{N-k-1-j_1^P(k)}\times$$
$$\times\frac{S_k d^{N-k}}{\rho^{N-k}}\hat{p}\left(\frac{K_1}{S_k d^{N-k}}-\left(\frac{u}{d}\right)^{j_1^P(k)+1}\right)+$$
$$+C_{N-k-1}^{j_2^P(k)}\,\hat{p}^{\,j_2^P(k)}\left(1-\hat{p}\right)^{N-k-1-j_2^P(k)}\times$$
$$\times\frac{S_k d^{N-k}}{\rho^{N-k}}\hat{p}\left(\frac{K_1-K_2}{S_k d^{N-k}}-\left(\frac{u}{d}\right)^{j_2^P(k)+1}\right). \qquad (15)$$

Доказательство. Согласно (10), с учетом (5), (7),

$$f_{k+1}(S)=\rho^{-(N-k-1)}\sum_{j=0}^{N-k-1}C_{N-k-1}^{j}\,\hat{p}^{\,j}\,\hat{q}^{\,N-k-1-j}\times$$
$$\times f\left(Su^j d^{N-k-1-j}\right)=\rho^{-(N-k-1)}\times$$
$$\times\sum_{j=j_2^P(k)}^{j_1^P(k)}C_{N-k-1}^{j}\,\hat{p}^{\,j}\,\hat{q}^{\,N-k-1-j}\left(K_1-Su^j d^{N-k-1-j}\right)+$$
$$+K_2\rho^{-(N-k-1)}\sum_{j=0}^{j_2^P-1}C_{N-k-1}^{j}\,\hat{p}^{\,j}\,\hat{q}^{\,N-k-1-j}. \qquad (16)$$

Пусть

$$\overline{j_1^P(k)}=\left[\ln\left(\frac{K_1}{Sd^{N-k-1}}\right)\Big/\ln\left(\frac{u}{d}\right)\right] \qquad (17)$$

есть то наибольшее целое, для которого

$$\left(K_1 - Su^j d^{N-k-1-j}\right) > 0,$$

а

$$\overline{j_2^P(k)} = \left[\ln\left(\frac{K_1 - K_2}{Sd^{N-k-1}}\right) \Big/ \ln\left(\frac{u}{d}\right)\right] + 1 \qquad (18)$$

есть то наименьшее целое, для которого

$$Su^j d^{N-k-1-j} > K_1 - K_2.$$

Тогда формула (16) может быть представлена в виде

$$f_{k+1}(S) = K_1 \rho^{-(N-k-1)} \sum_{j=j_2^P(k)}^{\overline{j_1^P(k)}} C_{N-k-1}^j \hat{p}^j \hat{q}^{N-k-1-j} -$$
$$-S(1+c)^{N-k-1} \sum_{j=j_2^P(k)}^{\overline{j_1^P(k)}} C_{N-k-1}^j \left(\frac{\hat{p}u}{\rho(1+c)}\right)^j \left(\frac{(1-\hat{p})d}{\rho(1+c)}\right)^{N-k-1-j} +$$
$$+K_2 \rho^{-(N-k-1)} \sum_{j=0}^{\overline{j_2^C(k)}-1} C_{N-k-1}^j \hat{p}^j \hat{q}^{N-k-1-j}. \qquad (19)$$

Учитывая (6), получаем

$$f_{k+1}(S) = K_1 \rho^{-(N-k-1)} \left[\mathrm{B}\left(\overline{j_2^P(k)}, N-k-1, \hat{p}\right) - \right.$$
$$\left. -\mathrm{B}\left(\overline{j_1^P(k)}+1, N-k-1, \hat{p}\right)\right] -$$
$$-(1+c)^{N-k-1} S\left[\mathrm{B}\left(\overline{j_2^P(k)}, N-k-1, \hat{p}^*\right) - \right.$$
$$\left. -\mathrm{B}\left(\overline{j_1^P(k)}+1, N-k-1, \hat{p}^*\right)\right] +$$
$$+K_2 \rho^{-(N-k-1)} \left[1 - \mathrm{B}\left(\overline{j_2^P(k)}, N-k-1, \hat{p}\right)\right]. \qquad (20)$$

Очевидно, что

$$\left.\overline{j_1^P(k)}\right|_{S=S_k u} = \left[\ln\left(\frac{K_1}{S_k u d^{N-k-1}}\right) \Big/ \ln\left(\frac{u}{d}\right)\right] = j_1^P(k) - 1,$$

$$\left.\overline{j_2^P(k)}\right|_{S=S_k u} = \left[\ln\left(\frac{K_1 - K_2}{S_k u d^{N-k-1}}\right) \Big/ \ln\left(\frac{u}{d}\right)\right] + 1 = j_2^P(k),$$

$$\left.\overline{j_1^P(k)}\right|_{S=S_k d} = \left[\ln\left(\frac{K_1}{S_k d^{N-k}}\right) \Big/ \ln\left(\frac{u}{d}\right)\right] = j_1^P(k),$$

$$\left.\overline{j_2^P(k)}\right|_{S=S_k d} = \left[\ln\left(\frac{K_1 - K_2}{S_k d^{N-k}}\right) \Big/ \ln\left(\frac{u}{d}\right)\right] = j_2^P(k).$$

Использование этих формул в (20) приводит к тому, что

$$f_{k+1}(S_k u) = K_1 \rho^{-(N-k-1)} \times$$
$$\times\left(\mathrm{B}\left(j_2^P(k), N-k-1, \hat{p}\right) - \mathrm{B}\left(j_1^P(k), N-k-1, \hat{p}\right)\right) -$$
$$-(1+c)^{N-k-1} S_k u\left[\mathrm{B}\left(j_2^P(k), N-k-1, \hat{p}^*\right) - \right.$$
$$\left. -\mathrm{B}\left(j_1^P(k), N-k-1, \hat{p}^*\right)\right] +$$
$$+K_2 \rho^{-(N-k-1)}\left[1 - \mathrm{B}\left(j_2^P(k), N-k-1, \hat{p}\right)\right], \qquad (21)$$

$$f_{k+1}(S_k d) = K_1 \rho^{-(N-k-1)} \times$$
$$\times\left(\mathrm{B}\left(j_2^P(k)+1, N-k-1, \hat{p}\right) - \mathrm{B}\left(j_1^P(k)+1, N-k-1, \hat{p}\right)\right) -$$
$$-(1+c)^{N-k-1} S_k d\left[\mathrm{B}\left(j_2^P(k)+1, N-k-1, \hat{p}^*\right) - \right.$$
$$\left. -\mathrm{B}\left(j_1^P(k)+1, N-k-1, \hat{p}^*\right)\right] +$$
$$+K_2 \rho^{-(N-k-1)}\left[1 - \mathrm{B}\left(j_2^P(k)+1, N-k-1, \hat{p}\right)\right]. \qquad (22)$$

Так как $\mathrm{B}(i, N, p) = \mathrm{B}(i+1, N, p) + C_N^i p^i (1-p)^{N-i}$, то использование (21) и (22) в (8) дает, что

$$\gamma_{k+1}^p = \frac{f_{k+1}(S_k u) - f_{k+1}(S_k d)}{S_k(u-d)} =$$
$$= -(1+c)^{N-k-1}\left[\mathrm{B}\left(j_2^P(k)+1, N-k-1, \hat{p}^*\right) - \right.$$
$$\left. -\mathrm{B}\left(j_1^P(k)+1, N-k-1, \hat{p}^*\right)\right] +$$
$$+C_N^{j_2^P(k)} \hat{p}^{j_2^P(k)} \left(1-\hat{p}\right)^{N-k-1-j_2^P(k)} \frac{1}{S_k(u-d)} \times$$
$$\times\left\{\frac{K_1 - K_2}{\rho^{N-k-1}} - S_k u \frac{u^{j_2^P(k)} d^{N-k-1-j_2^P(k)}}{\rho^{N-k-1}}\right\} -$$
$$-C_N^{j_1^P(k)} \hat{p}^{j_1^P(k)} \left(1-\hat{p}\right)^{N-k-1-j_1^P(k)} \frac{1}{S_k(u-d)} \times$$
$$\times\left\{\frac{K_1}{\rho^{N-k-1}} - S_k u \frac{u^{j_1^P(k)} d^{N-k-1-j_1^P(k)}}{\rho^{N-k-1}}\right\} =$$
$$= -(1+c)^{N-k-1}\left[\mathrm{B}\left(j_2^P(k)+1, N-k-1, \hat{p}^*\right) - \right.$$
$$\left. - \mathrm{B}\left(j_1^P(k)+1, N-k-1, \hat{p}^*\right)\right] +$$

$$+C_N^{j_2^P(k)}\,\hat{p}^{\,j_2^P(k)}\left(1-\hat{p}\right)^{N-k-1-j_2^P(k)}\frac{d^{N-k}}{\rho^{N-k-1}(u-d)}\times$$
$$\times\left\{\frac{K_1-K_2}{S_k d^{N-k}}-\left(\frac{u}{d}\right)^{j_2^P(k)+1}\right\}-$$
$$-C_N^{j_1^P(k)}\,\hat{p}^{\,j_1^P(k)}\left(1-\hat{p}\right)^{N-k-1-j_1^P(k)}\frac{d^{N-k}}{\rho^{N-k-1}(u-d)}\times$$
$$\times\left\{\frac{K_1}{S_k d^{N-k}}-\left(\frac{u}{d}\right)^{j_1^P(k)+1}\right\},\qquad(23)$$

т.е. пришли к (13). Использование (21) и (22) в (9) дает, что

$$\beta_{k+1}^P=\frac{uf_{k+1}(S_kd)-df_{k+1}(S_ku)}{\rho B_k(u-d)}=$$
$$=\frac{1}{\rho B_k(u-d)}\Big\{K_1(u-d)\rho^{-(N-k-1)}\times$$
$$\times\left[\mathrm{B}\left(j_2^P(k)+1,N-k-1,\hat{p}\right)-\mathrm{B}\left(j_1^P(k)+1,N-k-1,\hat{p}\right)\right]+$$
$$+K_2(u-d)\rho^{-(N-k-1)}\left[1-\mathrm{B}\left(j_2^P(k)+1,N-k-1,\hat{p}\right)\right]-$$
$$-K_1d\rho^{-(N-k-1)}\left[C_{N-k-1}^{j_2^P(k)}\,\hat{p}^{\,j_2^P(k)}\left(1-\hat{p}\right)^{N-k-1-j_2^P(k)}-\right.$$
$$-C_{N-k-1}^{j_1^C(k)}\,\hat{p}^{\,j_1^P(k)}\left(1-\hat{p}\right)^{N-k-1-j_1^P(k)}+$$
$$\left.+K_2d\rho^{-(N-k-1)}C_{N-k-1}^{j_2^P(k)}\,\hat{p}^{\,j_2^P(k)}\left(1-\hat{p}\right)^{N-k-1-j_2^P(k)}\right]+$$
$$+(1+c)^{N-k-1}S_kud\left[C_{N-k-1}^{j_2^P(k)}\,\hat{p}^{\,*j_2^P(k)}\times\right.$$
$$\times\left(1-\hat{p}^{\,*}\right)^{N-k-1-j_2^P(k)}-$$
$$\left.-C_{N-k-1}^{j_1^C(k)}\,\hat{p}^{\,*j_1^P(k)}\left(1-\hat{p}^{\,*}\right)^{N-k-1-j_1^P(k)}\right]\Big\}=\frac{K_1}{\rho^{N-k}B_k}\times$$
$$\times\left[\mathrm{B}\left(j_2^P(k)+1,N-k-1,\hat{p}\right)-\mathrm{B}\left(j_1^P(k)+1,N-k-1,\hat{p}\right)\right]+$$
$$+\frac{K_2}{\rho^{N-k}B_k}\left[1-\mathrm{B}\left(j_2^P(k)+1,N-k-1,\hat{p}\right)\right]+$$
$$+C_{N-k-1}^{j_1^P(k)}\,\hat{p}^{\,j_1^P(k)}\left(1-\hat{p}\right)^{N-k-1-j_1^P(k)}\frac{d^{N-k+1}S_k}{\rho^{N-k}B_k}\times$$
$$\times\left(\frac{K_1}{S_kd^{N-k}}-\left(\frac{u}{d}\right)^{j_1^P(k)+1}\right)-$$
$$-C_{N-k-1}^{j_2^P(k)}\,\hat{p}^{\,j_2^P(k)}\left(1-\hat{p}\right)^{N-k-1-j_2^P(k)}\frac{d^{N-k+1}S_k}{\rho^{N-k}B_k}\times$$
$$\times\left(\frac{K_1-K_2}{S_kd^{N-k}}-\left(\frac{u}{d}\right)^{j_2^P(k)+1}\right),$$

т.е. пришли к (14). Использование (21) и (22) в (10) дает, что

$$X_k^P=\rho^{-1}\left[\hat{p}\,f_{k+1}(S_ku)+\hat{q}\,f_{k+1}(S_kd)\right]=$$
$$=\rho^{-1}\Big\langle\ \hat{p}\Big\{\ K_1\rho^{-(N-k-1)}\times$$
$$\times\left[\mathrm{B}\left(j_2^P(k)+1,N-k-1,\hat{p}\right)-\mathrm{B}\left(j_1^P(k)+1,N-k-1,\hat{p}\right)\right]+$$
$$+K_1\rho^{-(N-k-1)}\left[C_{N-k-1}^{j_2^P(k)}\,\hat{p}^{\,j_2^P(k)}\left(1-\hat{p}\right)^{N-k-1-j_2^P(k)}-\right.$$
$$\left.-C_{N-k-1}^{j_1^P(k)}\,\hat{p}^{\,j_1^P(k)}\left(1-\hat{p}\right)^{N-k-1-j_1^P(k)}\right]-$$
$$-(1+c)^{N-k-1}S_ku\left[\mathrm{B}\left(j_2^P(k)+1,N-k-1,\hat{p}\right)-\right.$$
$$\left.-\mathrm{B}\left(j_1^P(k)+1,N-k-1,\hat{p}\right)\right]-$$
$$-(1+c)^{N-k-1}S_ku\left[C_{N-k-1}^{j_2^P(k)}\,\hat{p}^{\,*j_2^P(k)}\left(1-\hat{p}^{\,*}\right)^{N-k-1-j_2^P(k)}-\right.$$
$$\left.-C_{N-k-1}^{j_1^C(k)}\,\hat{p}^{\,*j_1^P(k)}\left(1-\hat{p}^{\,*}\right)^{N-k-1-j_1^P(k)}\right]+K_2\rho^{-(N-k-1)}\times$$
$$\times\left[1-\mathrm{B}\left(j_2^P(k)+1,N-k-1,\hat{p}\right)-C_{N-k-1}^{j_2^C(k)}\,\hat{p}^{\,j_2^P(k)}\left(1-\hat{p}\right)^{N-k-1-j_2^P(k)}\right]\Big\}+$$
$$+\hat{q}\Big\{\ K_1\rho^{-(N-k-1)}\times$$
$$\times\left[\mathrm{B}\left(j_2^P(k)+1,N-k-1,\hat{p}\right)-\mathrm{B}\left(j_1^P(k)+1,N-k-1,\hat{p}\right)\right]-$$
$$-(1+c)^{N-k-1}S_kd\times$$
$$\times\left[\mathrm{B}\left(j_2^P(k)+1,N-k-1,\hat{p}^{\,*}\right)-\mathrm{B}\left(j_1^P(k)+1,N-k-1,\hat{p}^{\,*}\right)\right]+$$
$$\left.+K_2\rho^{-(N-k-1)}\left[1-\mathrm{B}\left(j_2^P(k)+1,N-k-1,\hat{p}\right)\right]\Big\}\ \right\rangle=$$
$$=\frac{K_1}{\rho^{N-k}}\left[\mathrm{B}\left(j_2^P(k)+1,N-k-1,\hat{p}\right)-\right.$$
$$\left.-\mathrm{B}\left(j_1^P(k)+1,N-k-1,\hat{p}\right)\right]+$$
$$+\frac{K_2}{\rho^{N-k}}\left[1-\mathrm{B}\left(j_2^P(k)+1,N-k-1,\hat{p}\right)\right]-$$
$$-(1+c)^{N-k}S_k\times$$
$$\times\left[\mathrm{B}\left(j_2^P(k)+1,N-k-1,\hat{p}^{\,*}\right)-\mathrm{B}\left(j_1^P(k)+1,N-k-1,\hat{p}^{\,*}\right)\right]-$$

$$-C_{N-k-1}^{j_1^P(k)}\hat{p}^{\,j_1^P(k)}\left(1-\hat{p}\right)^{N-k-1-j_1^P(k)}\frac{d^{N-k}S_k}{\rho^{N-k}}\hat{p}\times$$

$$\times\left(\frac{K_1}{S_k d^{N-k}}-\left(\frac{u}{d}\right)^{j_1^P(k)+1}\right)+$$

$$+C_{N-k-1}^{j_2^P(k)}\hat{p}^{\,j_2^P(k)}\left(1-\hat{p}\right)^{N-k-1-j_2^P(k)}\frac{S_k d^{N-k}}{\rho^{N-k}}\hat{p}\times$$

$$\times\left(\frac{K_1-K_2}{S_k d^{N-k}}-\left(\frac{u}{d}\right)^{j_2^P(k)+1}\right),$$

т.е. пришли к (15). Рациональная стоимость опциона, по определению, $\mathrm{P}_N = X_0^P$. Поэтому, используя формулу (15) при k=0, получим (12).

Теорема доказана.

Свойства решения

Следствие. Пусть $\tilde{\mathrm{P}}_N, \tilde{X}_k^P, \tilde{\gamma}_{k+1}^P, \tilde{\beta}_{k+1}^P$ есть пределы $\mathrm{P}_N, X_k^P, \gamma_{k+1}^P, \beta_{k+1}^P$ при $K_2 \uparrow K_1$. Тогда

$$\tilde{\mathrm{P}}_N = K_1\rho^{-N}\left[1-\mathrm{B}(j_1^P+1, N-1, \hat{p})\right]-$$

$$-(1+c)^N S_0\left[1-\mathrm{B}(j_1^P+1, N-1, \hat{p}^{\,*})\right], \qquad (24)$$

$$\tilde{X}_k^P = K_1\rho^{-N}\left[1-\mathrm{B}(j_1^P(k)+1, N-k-1, \hat{p})\right]-$$

$$-(1+c)^{N-k} S_k\left[1-\mathrm{B}(j_1^P(k)+1, N-k-1, \hat{p}^{\,*})\right], \qquad (25)$$

$$\tilde{\gamma}_{k+1}^P = (1+c)^{N-k-1}\left[1-\mathrm{B}(j_1^P(k)+1, N-k-1, \hat{p}^{\,*})\right]-$$

$$-C_{N-k-1}^{j_1^P(k)}\hat{p}^{\,j_1^P(k)}\left(1-\hat{p}\right)^{N-k-1-j_1^P(k)}\times$$

$$\times\frac{d^{N-k}}{\rho^{N-k}(u-d)}\left(\frac{K_1}{S_k d^{N-k}}-\left(\frac{u}{d}\right)^{j_1^P(k)+1}\right), \qquad (26)$$

$$\tilde{\beta}_{k+1}^P = \frac{K_1}{B_k\rho^{N-k}}\mathrm{B}(j_1^P(k)+1, N-k-1, \hat{p})+$$

$$+C_{N-k-1}^{j_1^P(k)}\hat{p}^{\,j_1^P(k)}\left(1-\hat{p}\right)^{N-k-1-j_1^P(k)}\frac{d^{N-k}S_k}{\rho^{N-k}(u-d)B_k}\times$$

$$\times\left(\frac{K_1}{S_k d^{N-k}}-\left(\frac{u}{d}\right)^{j_1^P(k)+1}\right). \qquad (27)$$

Доказательство. По определению $j_2^P(k)$ – то наибольшее целое, для которого $S_k u^j d^{N-k-j} > K_1 - K_2$. Если $K_2 \uparrow K_1$, то $j_2^P(k) = N-k$. Тогда, согласно (2),

$$\mathrm{B}(j_2^C(k)+1, N-k-1, \hat{p}) = 0,\ \mathrm{B}(j_2^C(k)+1, N-k-1, \hat{p}^{\,*}) = 0.$$

С учетом этого формулы (12)–(15) переходят в формулы (24)–(27).

Поскольку при $K_2 = K_1$ платежная функция (5) переходит в платежную функцию для стандартного опциона продажи, то формулы (24)–(27) определяют полное решение задачи хеджирования в случае стандартного опциона продажи с оттоком и притоком капитала.

Лемма. Для функции $f_{k+1}^P(S)$ справедливы свойства:

1) $f_{k+1}^P(S) \ge 0, \quad S > 0$;

2) $f_{k+1}^P(S)$ – невозрастающая функция;

3) если $\overline{S} > 0$ такое, что $f_{k+1}^P(S) > 0$ при $0 < S < \overline{S}$, то $f_{k+1}^P(S)$ – убывающая функция при $0 < S < \overline{S}$, т.е. $f_{k+1}^P(S_2) > f_{k+1}^P(S_1)$ для $< S_2 < S_1 < \overline{S}$;

4) $f_{k+1}^P(S) > 0$, если выполняется условие $K_1 - K_2 < Su^{N-k-1} < K_1$, и $f_{k+1}^P(S) = 0$ в противоположном случае.

Доказательство. Свойства 1) и 2) следуют из (1). Свойство 3) следует непосредственно из (16). Очевидно, согласно (16), что свойство $f_{k+1}^P(S) > 0$ выполняется, если $\overline{j_1^P(k)} < N-k-1$, $\overline{j_2^P(k)} < N-k-1$.

Согласно (17), $\overline{j_1^P(k)} < N-k-1$, если $\ln\left(\frac{K_1}{Sd^{N-k-1}}\right) > (N-k-1)\ln\left(\frac{u}{d}\right)$, что приводит к условию $K_1 > Su^{N-k-1}$.

Согласно (18), $\overline{j_2^P(k)} < N-k-1$, если $\ln\left(\frac{K_1-K_2}{Sd^{N-k-1}}\right) < (N-k-1)\ln\left(\frac{u}{d}\right)$, что приводит к условию $Su^{N-k-1} > K_1 - K_2$.

Объединяя условия, получаем $K_1 - K_2 < Su^{N-k-1} < K_1$. Лемма доказана.

Теорема 2. В случае опциона продажи его стоимость, капитал и составляющие портфеля обладают следующими свойствами:

1) $P_N \ge 0, \quad X_k^P \ge 0, \quad \beta_{k+1}^P \ge 0, \quad \gamma_{k+1}^P \le 0$;

2) $P_N > 0$, если $K_1 - K_2 < S_0 u^N < K_1$;

3) $X_k^P > 0,\ \beta_{k+1}^P > 0,\ \gamma_{k+1}^P < 0$, если $K_1 - K_2 < S_k u^{N-k} < K_1$.

Доказательство. Так как $\mathrm{P}_N = f(S_0)$, то свойство $\mathrm{P}_N \ge 0$ следует из (16)–(18). Из (12) получаем, что свойство $\mathrm{P}_N > 0$ выполняется при выполнении условия $j_1^P < N, j_2^P < N$, которое с использованием (7) при $k = 0$ приводит к условию $K_1 - K_2 < S_0 u^N < K_1$. Свойство 1) для γ_{k+1}^P следует с учетом свойств 1) и 2) леммы. Из свойства 4) леммы следует, что $f_{k+1}^P(S_k u) > 0$, если $K_1 - K_2 < S_k u^{N-k} < K_1$, и $f_{k+1}^P(S_k u) = 0$, если $K_1 \le S_k u^{N-k}$ или $S_k u^{N-k} \le K_1 - K_2$. Аналогично $f_{k+1}^P(S_k d) > 0$, если $K_1 - K_2 < S_k\left(\frac{d}{u}\right)u^{N-k} < K_1$, и $f_{k+1}^P(S_k d) = 0$, если $K_1 \le S_k\left(\frac{d}{u}\right)u^{N-k}$

или $S_k\left(\frac{d}{u}\right)u^{N-k} \le K_1 - K_2$. Тогда с учетом свойства 3) леммы следует свойство 2) для γ_{k+1}^P.

Пусть $\Phi_1(k) = \frac{K_1}{S_k d^{N-k}} - \left(\frac{u}{d}\right)^{j_1^P(k)+1}$, $\Phi_2(k) = \frac{K_1 - K_2}{S_k d^{N-k}} - \left(\frac{u}{d}\right)^{j_2^C(k)+1}$.

Из (7) следует, что $j_1^P(k)+1 < \ln\left(\frac{K_1}{S_k d^{N-k}}\right) \Big/ \ln\left(\frac{u}{d}\right)$, $j_2^C(k)+1 > \ln\left(\frac{K_1 - K_2}{S_k d^{N-k}}\right) \Big/ \ln\left(\frac{u}{d}\right)$. Следовательно, $\frac{K_1}{S_k d^{N-k}} > \left(\frac{u}{d}\right)^{j_1^P(k)+1}$ и $\frac{K_1 - K_2}{S_k d^{N-k}} < \left(\frac{u}{d}\right)^{j_2^P(k)+1}$. Поэтому для $j_1^P(k)$ и $j_2^P(k)$, определяемых формулами (7), $\Phi_1(k) < 0$ и $\Phi_2(k) > 0$.

Тогда свойство 1) для β_{k+1}^P следует из (14). Очевидно, что $\mathrm{B}\left(j_2^P(k)+1, N-k-1, \hat{p}\right) - \mathrm{B}\left(j_1^P(k)+1, N-k-1, \hat{p}\right) > 0$, так как $j_2^P(k) < j_1^P(k) < N-k$ по их определению, т.е. выполняется условие $K_1 - K_2 < S_k\left(\frac{d}{u}\right)u^{N-k} < K_1$. Третье слагаемое в (14) больше нуля, поскольку $\Phi_1(k) < 0$. Последнее слагаемое в (14) тоже больше нуля, так как $\Phi_2(k) > 0$. Поскольку $S_k\left(\frac{d}{u}\right)u^{N-k} < S_k u^{N-k}$, то свойство 2) для β_{k+1}^P следует из (14). Свойство 1) для X_{k}^P следует с учетом свойств 1) и 2) леммы. Свойство 3) для X_{k}^P следует с учетом того, что $K_1 - K_2 < S_k u^{N-k} < K_1$, $K_1 - K_2 < S_k\left(\frac{d}{u}\right)u^{N-k} < K_1$, $S_k\left(\frac{d}{u}\right)u^{N-k} < S_k u^{N-k}$. Теорема 2 доказана.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Ширяев А.Н., Кабанов Ю.М., Крамков Д.О., Мельников А.В.* К теории расчетов опционов европейского и американского типов: I Дискретное время // Теория вероятностей и ее применения. 1994. Т. 39, вып. 1. С. 80–129.
2. *Rubinstein M.* Exotic option // Finance working paper. 1991. № 220.
3. *Кожин К.* Все об экзотических опционах // Рынок ценных бумаг. 2002. № 15. С. 53–57.
4. *Нагаев А.В.* К вопросу о вычислении справедливой цены опциона // Экономика и математические методы. 1998. Т. 34, № 1. С. 166–171.
5. *Демин Н.С., Шиширин М.Ю.* Европейский опцион с произвольным числом рисковых ценных бумаг в случае дискретного времени // Дискретный анализ и исследование операций. 2002. Сер. 2. Т. 9, № 1. С. 3–20.

Статья представлена кафедрой прикладной математики факультета прикладной математики и кибернетики Томского государственного университета, поступила в научную редакцию «Кибернетика» 2 июля 2006 г.