МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ РФ
РОССИЙСКИЙ ФОНД ФУНДАМЕНТАЛЬНЫХ ИССЛЕДОВАНИЙ
НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ ТОМСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
НИИ ПРИКЛАДНОЙ МАТЕМАТИКИ И МЕХАНИКИ ТОМСКОГО УНИВЕРСИТЕТА
ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ФАКУЛЬТЕТ
МЕХАНИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИЙ ФАКУЛЬТЕТ
СОВЕТ МОЛОДЫХ УЧЁНЫХ ТГУ

Актуальные проблемы современной механики сплошных сред и небесной механики

Международная молодежная научная конференция

17–19 ноября 2014 г., Томск

Издательство Томского университета
2015

ПРИМЕНЕНИЕ ПЕРЕМЕННЫХ ЛАГРАНЖА В ЗАДАЧЕ О ВОЛНАХ КОНЕЧНОЙ АМПЛИТУДЫ НА ПОВЕРХНОСТИ ТЯЖЕЛОЙ ЖИДКОСТИ

О.А. Арбит

Показывается, что применение переменных Лагранжа позволяет получить точное решение задачи о колебаниях тяжелой жидкости в прямоугольной вертикальной полосе.

APPLICATION LAGRANGE'S VARIABLES IN A PROBLEM ABOUT WAVES OF FINAL AMPLITUDE ON A SURFACE OF HEAVY LIQUID

O.A. Arbit

In article it is shown, that application Lagrange's variables allows to receive the exact decision of a problem on sloshing of a heavy liquid in a rectangular vertical strip.

Будем рассматривать плоскую гидродинамическую задачу и предположим, что жидкость имеет свободную поверхность и ограничена вертикальными стенками и горизонтальным дном. Задача состоит в том, чтобы найти периодическое движение, которое возникает под влиянием силы тяжести и является собственными колебаниями в виде стоячих волн. Ее приближенное решение, как правило, достигается в переменных Эйлера, при этом применяется линеаризованная теория, в которой амплитуда волны считается бесконечно малой величиной [1–3]. В настоящей статье показывается, что если такую же задачу о стоячих волнах решать в переменных Лагранжа, то можно получить точное решение без каких-либо ограничений на величину амплитуды колебаний. Уравнения Лагранжа для плоских движений тяжелой жидкости пишутся так:

$$\begin{aligned} &\frac{\partial^2 x}{\partial t^2}\frac{\partial x}{\partial a}+\left(\frac{\partial^2 y}{\partial t^2}+g\right)\frac{\partial y}{\partial a}=-\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial a},\\ &\frac{\partial^2 x}{\partial t^2}\frac{\partial x}{\partial b}+\left(\frac{\partial^2 y}{\partial t^2}+g\right)\frac{\partial y}{\partial b}=-\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial b}. \end{aligned} \tag{1}$$

В них искомыми функциями являются $x(a,b,t)$, $y(a,b,t)$ и давление $p(a,b,t)$. К этим динамическим уравнениям добавляется еще уравнение непрерывности:

$$\begin{vmatrix} \dfrac{\partial x}{\partial a} & \dfrac{\partial y}{\partial a} \\ \dfrac{\partial x}{\partial b} & \dfrac{\partial y}{\partial b} \end{vmatrix} = 1. \tag{2}$$

Переменные a и b не обязательно должны обозначать начальные положения частиц жидкости. Вместо них можно применять и другие величины α и β, которые также являются координатами Лагранжа и изменяются непрерывно при переходе от одной частицы к другой. Уравнения движения (1) сохраняют свой вид и в переменных α, β, а условие несжимаемости (2) в новых переменных записывается в виде

$$\frac{\partial(x,y)}{\partial(\alpha,\beta)}=\frac{\partial(a,b)}{\partial(\alpha,\beta)}. \tag{3}$$

Целесообразно рассматривать величины x, y и a, b одновременно как функции двух параметров α и β. Тогда решение уравнения (3) с помощью некоторой функции $\psi(\alpha,\beta,t)$ может быть представлено в следующем виде:

$$\begin{aligned} x&=\alpha+\psi_\beta, & y&=\beta-\psi_\alpha,\\ a&=\alpha-\psi_\beta, & b&=\beta+\psi_\alpha. \end{aligned} \tag{4}$$

В этом легко убедиться, если, используя равенства (4), вычислить функциональные определители (3) отдельно для левой и правой части. Тогда получим

$$\begin{Vmatrix} 1+\psi_{\alpha\beta} & -\psi_{\alpha\alpha} \\ \psi_{\beta\beta} & 1-\psi_{\alpha\beta} \end{Vmatrix}=\begin{Vmatrix} 1-\psi_{\alpha\beta} & \psi_{\alpha\alpha} \\ -\psi_{\beta\beta} & 1+\psi_{\alpha\beta} \end{Vmatrix}=1-\psi_{\alpha\beta}^2+\psi_{\alpha\alpha}\psi_{\beta\beta}. \tag{5}$$

Отсюда видно, что выполнение условия непрерывности гарантировано при любом выборе функции $\psi(\alpha,\beta,t)$. Если она известна, то величины $x(\alpha,\beta,t)$ и $y(\alpha,\beta,t)$ находятся из равенств (4). Из них следует, что в переменных Лагранжа функция ψ играет такую же роль, как и функция тока в переменных Эйлера. После введения такой функции ψ искомыми величинами становятся сама функция $\psi(\alpha,\beta,t)$ и давление $p(\alpha,\beta,t)$, которые должны подчиняться динамическим уравнениям движения (1). Подставляя равенства (4) в (1), после соответствующих преобразований, находим, что они приобретают вид

$$\begin{aligned} \ddot{\psi}_\beta-g\psi_{\alpha\alpha}+\begin{Vmatrix} \psi_{\alpha\beta} & -\ddot{\psi}_\alpha \\ \psi_{\alpha\alpha} & \ddot{\psi}_\beta \end{Vmatrix}&=-\Phi_\alpha,\\ -\ddot{\psi}_\alpha-g\psi_{\alpha\beta}+\begin{Vmatrix} \psi_{\alpha\beta} & -\ddot{\psi}_\beta \\ \psi_{\beta\beta} & \ddot{\psi}_\alpha \end{Vmatrix}&=-\Phi_\beta. \end{aligned} \tag{6}$$

Здесь $\Phi=p/\rho+g\beta$, и нелинейные члены записаны в виде детерминантов. Посредством дифференцирования можно исключить правую часть Φ из системы уравнений (6). Тогда получаем, что функция ψ должна удовлетворять дифференциальному уравнению

$$\ddot{\psi}_{\alpha\alpha}+\ddot{\psi}_{\beta\beta}+\frac{\partial(\psi_\alpha,\ddot{\psi}_\alpha)}{\partial(\alpha,\beta)}+\frac{\partial(\psi_\beta,\ddot{\psi}_\beta)}{\partial(\alpha,\beta)}=0. \tag{7}$$

Из уравнений (6) также следует, что функцию Φ, а значит и давление, можно найти, решая уравнение Пуассона с соответствующими граничными условиями.

В случае задачи о периодической по времени стоячей волне будем искать решение для функции ψ в виде

$$\psi(\alpha,\beta,t)=\sin(\omega\, t)\Psi(\alpha,\beta)\ . \tag{8}$$

Тогда в уравнении (7) функциональные определители обращаются в ноль, и мы получаем, что функция $\Psi(\alpha,\beta)$ должна удовлетворять уравнению Лапласа:

$$\Psi_{\alpha\alpha}+\Psi_{\beta\beta}=0\ . \tag{9}$$

Подстановка (8) в уравнения движения (6) приводит их к виду

$$\begin{gathered}
\text{-}\sin\omega t\left[\omega^2\Psi_{\beta}+g\Psi_{\alpha\alpha}\right]+\omega^2\sin^2\omega t\begin{Vmatrix}\Psi_{\alpha\beta} & \Psi_{\alpha}\\ \Psi_{\alpha\alpha} & -\Psi_{\beta}\end{Vmatrix}=-\Phi_{\alpha},\\
\sin\omega t\left[\omega^2\Psi_{\alpha}-g\Psi_{\alpha\beta}\right]+\omega^2\sin^2\omega t\begin{Vmatrix}\Psi_{\alpha\beta} & \Psi_{\beta}\\ \Psi_{\beta\beta} & -\Psi_{\alpha}\end{Vmatrix}=-\Phi_{\beta}.
\end{gathered}\tag{10}$$

Левая часть уравнений (10) содержит зависящие от времени множители $\sin\omega t$ и $\omega^2\sin^2\omega t$. Поэтому и функция Φ, стоящая в правой части (10), также должна состоять из комбинации таких же множителей. Отсюда следует, что функцию Φ надлежит искать в виде

$$\Phi(\alpha,\beta,t)=\sin\omega t\cdot\Phi_1(\alpha,\beta)+\omega^2\sin^2\omega t\cdot\Phi_2(\alpha,\beta)\ . \tag{11}$$

Подставляя (11) в (10), имеем следующие уравнения для определения функций Φ_1 и Φ_2:

$$\Phi_{1\alpha}=\omega^2\Psi_{\beta}+g\Psi_{\alpha\alpha},\qquad \Phi_{1\beta}=-\omega^2\Psi_{\alpha}+g\Psi_{\alpha\beta}\,, \tag{12}$$

$$\Phi_{2\alpha}=\text{-}\begin{Vmatrix}\Psi_{\alpha\beta} & \Psi_{\alpha}\\ \Psi_{\alpha\alpha} & -\Psi_{\beta}\end{Vmatrix},\qquad \Phi_{2\beta}=\text{-}\begin{Vmatrix}\Psi_{\alpha\beta} & \Psi_{\beta}\\ \Psi_{\beta\beta} & -\Psi_{\alpha}\end{Vmatrix}. \tag{13}$$

Задача о стоячей волне, следовательно, сводится к определению трех функций: Ψ, Φ_1 и Φ_2 из уравнений (9), (12) и (13). Найдем сначала решение для функции Ψ.

Пусть переменные Лагранжа α и β заполняют область внутри прямоугольника $0\le\alpha\le L$,$-h\le\beta\le 0$ с высотой h и шириной L. Его верхняя сторона $\beta=0$ соответствует свободной поверхности, на которой обе функции Φ_1 и Φ_2 равны нулю. Из этого условия и равенств (4) получаем для функции $\Psi(\alpha,\beta)$ краевую задачу:

$$\Psi_{\alpha\alpha}+\Psi_{\beta\beta}=0,\;\;\Psi(\alpha,-h)=\Psi(0,\beta)=\Psi(L,\beta)=0,\quad \omega^2\Psi_{\beta}+g\Psi_{\alpha\alpha}=0\Big|_{\beta=0}\,. \tag{14}$$

Решение задачи (14) имеет следующий вид:

$$\Psi(\alpha,\beta)=\varepsilon\sin k\alpha\frac{sh\ k(\beta+h)}{k^2ch\ kh},\quad k=\frac{\pi n}{L},\quad n=1,2,3,\cdots, \tag{15}$$

где ε – безразмерный параметр, определяющий амплитуду колебаний, а частота колебаний по времени определяется выражением $\omega^2 = gk \cdot th(kh)$. Подставляя (15) и (8) в уравнения (4), найдем параметрическое представление движения частиц жидкости:

$$x = \alpha + \varepsilon \sin\omega t \sin k\alpha \frac{ch\ k(\beta + h)}{k\ ch\ kh}, \quad y = \beta - \varepsilon \sin\omega t \cos k\alpha \frac{sh\ k(\beta + h)}{k\ ch\ kh}. \quad (16)$$

Форма стоячих волн, вычисленная по этим уравнениям (n=4), показана на рис. 1.

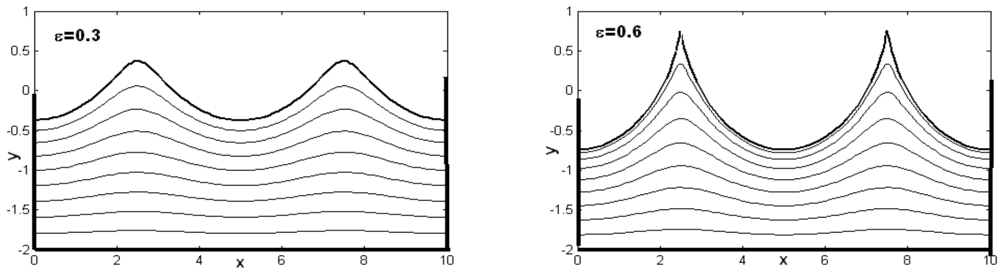

Рис. 1. Прообразы линий $\beta = \text{const}$, вычисленные по формулам (16) для амплитуд $\varepsilon = 0{,}3$ и $\varepsilon = 0{,}6$

Эти волны, полученные в переменных Лагранжа, отличаются от решений в переменных Эйлера следующими свойствами:

1) форма волн не является синусоидальной;

2) период колебаний не зависит от амплитуды;

3) существует предельная амплитуда, при которой на свободной поверхности появляется заостренная точка.

Зная функцию $\Psi(\alpha,\beta)$, можно определить и давление внутри жидкости, т.е. функции Φ_1 и Φ_2. Так, из уравнений (12) получаем, что функция $\Phi_1(\alpha,\beta)$ удовлетворяет уравнению Лапласа с граничными условиями: $\Phi_{1\beta} = g\Psi_{\alpha\beta}(\alpha,-h)$, $\Phi_1(\alpha,0) = 0$, $\Phi_{1\alpha}(0,\beta) = 0$, $\Phi_{1\alpha}(L,\beta) = 0$. Решением такой краевой задачи является выражение

$$\Phi_1(\alpha,\beta) = \varepsilon g \frac{\text{sh}\, k\beta}{k} \frac{\cos k\alpha}{\text{ch}^2 kh}. \quad (17)$$

Функцию $\Phi_2(\alpha,\beta)$ можно найти из уравнений (13). Подставляя в них формулу (15) и раскрывая определители, получим

$$\frac{\partial\Phi_2}{\partial\alpha} = \frac{\varepsilon^2}{2k\ ch^2 kh} \sin 2k\alpha, \quad \frac{\partial\Phi_2}{\partial\beta} = \frac{\varepsilon^2}{2k\ ch^2 kh}\ \text{s}h\ 2k(\beta + h). \quad (18)$$

Из уравнений (18) с учетом того, что функция $\Phi_2(\alpha,\beta)$ должна обращаться в нуль на свободной границе, имеем следующую краевую задачу:

$$\frac{\partial^2\Phi_2}{\partial\alpha^2}+\frac{\partial^2\Phi_2}{\partial\beta^2}=\frac{\varepsilon^2}{ch^2kh}\left[ch\ 2k(\beta+h)+\cos 2k\alpha\right], \qquad . \tag{19}$$
$$\Phi_2(\alpha,0)=0,\ \Phi_{2\beta}(\alpha,-h)=0,\ \Phi_{2\alpha}(0,\beta)=0,\ \Phi_{2\alpha}(L,\beta)=0.$$

Ее решение записывается в виде

$$\Phi_2(\alpha,\beta)=\frac{\varepsilon^2}{ch^2kh}\frac{ch\ 2k(\beta+h)-ch\ 2kh}{4k^2}\left(1-\frac{\cos 2k\alpha}{ch\ 2kh}\right). \tag{20}$$

Покажем, что движение жидкости, определяемое формулами (16), является потенциальным. Составим по компонентам скорости $u=\dot\psi_\beta$ и $v=-\dot\psi_\alpha$ величину вихря $\Omega=v_x-u_y$. Дифференцируя каждую из формул (4) по x и y как неявную функцию, получаем после небольших вычислений

$$\alpha_x=\frac{1-\psi_{\alpha\beta}}{\Delta},\ \ \beta_x=\frac{\psi_{\alpha\alpha}}{\Delta},\ \ \alpha_y=\frac{-\psi_{\beta\beta}}{\Delta},\ \ \beta_y=\frac{1+\psi_{\alpha\beta}}{\Delta},\ \ \Delta=1-\psi_{\alpha\beta}^2+\psi_{\alpha\alpha}\psi_{\beta\beta}. \tag{21}$$

Тогда для величины вихря Ω получается следующее общее выражение:

$$-\Omega=\frac{1-\psi_{\alpha\beta}}{\Delta}\dot\psi_{\alpha\alpha}+\left(\frac{\psi_{\alpha\alpha}-\psi_{\beta\beta}}{\Delta}\right)\dot\psi_{\alpha\beta}+\frac{1+\psi_{\alpha\beta}}{\Delta}\dot\psi_{\beta\beta}. \tag{22}$$

В частном случае (16), когда $\psi(\alpha,\beta)$ удовлетворяет уравнению Лапласа, уравнение (22) упрощается, и его можно записать в виде функционального определителя:

$$\Omega=\frac{2}{\Delta}\left[\psi_{\alpha\beta}\dot\psi_{\alpha\alpha}-\psi_{\alpha\alpha}\dot\psi_{\alpha\beta}\right]=\frac{2}{\Delta}\begin{vmatrix}\dot\psi_{\alpha\alpha} & \psi_{\alpha\alpha}\\ \dot\psi_{\alpha\beta} & \psi_{\alpha\beta}\end{vmatrix}=\frac{2}{\Delta}\frac{\partial(\dot\psi_\alpha,\psi_\alpha)}{\partial(\alpha,\beta)}, \tag{23}$$

который в силу формул (8) и (15), очевидно, равняется нулю. Полученное здесь решение о колебательном движении жидкости в виде стоячей волны обладает простотой и законченностью. С помощью введения функции ψ примененный здесь метод позволяет обобщать и известное решение Герстнера (Gerstner, 1756) о бегущей волне, для которой движение жидкости оказывается вихревым. Аналогичная по своему содержанию задача в переменных Лагранжа изучалась Я.И. Секерж-Зеньковичем [5]. Но он не вводит функцию ψ для исключения условия несжимаемости и поэтому получает приближенное решение в виде рядов по параметру амплитуды, которое вполне согласуется с нашим решением. Отметим, что полученное точное решение нелинейной задачи нужно рассматривать как удачный частный случай, поскольку в задачах с переменными Лагранжа не выполняется принцип суперпозиции.

Литература

1. *Ламб Г.*, Гидродинамика / пер. с англ. М.: Гостехиздат, 1947. 929 с.
2. *Сретенский Л.Н.* Теория волновых движений жидкости. М.: Наука, 1977. 815 с.
3. *Стокер Дж.* Волны на воде / пер. с англ. М.: ИЛ, 1959. 618 с.

4. *Абрашкин А.А., Якубович Е.И.* Вихревая динамика в лагранжевом описании. М.: Физматлит, 2006. 176 с.

5. *Секерж-Зенькович Я.И.* К теории стоячих волн конечной амплитуды на поверхности тяжелой жидкости конечной глубины // Изв. АН ССР. Сер. географ. и геофиз. 1951. Т. 15, № 1. С. 57–73.

ВЛИЯНИЕ ДАВЛЕНИЯ И СКОРОСТИ ТИТАНОВОГО ОБРАЗЦА НА ПРОЦЕСС ДИНАМИЧЕСКОГО КАНАЛЬНО-УГЛОВОГО ПРЕССОВАНИЯ

А.С. Бодров, С.А. Зелепугин

Численно в трехмерной постановке исследован процесс деформирования титанового образца квадратного сечения при динамическом канально-угловом прессовании с применением динамической схемы нагружения. Выявлены закономерности влияния давления и скорости образца на процесс ДКУП. Определены области устойчивого и неустойчивого прохождения образца по каналам.

INFLUENCE OF PRESSURE AND VELOCITY OF TITANIUM SPECIMEN ON THE DYNAMIC CHANNEL-ANGULAR PRESSING PROCESS

A.S. Bodrov, S.A. Zelepugin

Deformation of the titanium square cross section specimen during dynamic channel-angular pressing was numerically investigated in 3D statement for dynamic scheme of loading. The influence of pressure and velocity of the sample on the DCAP process was studied. The regions of stable and unstable passage of the sample through channels were identified.

Получение объемных наноструктурных и ультрамелкозернистых материалов является одним из активно развиваемых направлений в современном материаловедении. Динамическое канально-угловое прессование (ДКУП) – один из методов получения таких материалов посредством интенсивной пластической деформации. Данный метод является вариантом метода равноканального углового прессования, позволяющим повысить скорость пластического деформирования образца. Экспериментальные исследования показывают, что необходимо широкомасштабное численное исследование процессов ДКУП для выявления особенностей интенсивного пластического деформирования и установления эффективных параметров данных процессов.

В данной работе численное моделирование процесса ДКУП проводится в трехмерной постановке в рамках упругопластической модели среды. Используется модель повреждаемой среды, характеризующаяся возможностью зарождения и эволюции в ней микроповреждений. Система уравнений, описывающая нестационарное адиабатическое движение сжимаемой среды, состоит из уравнений неразрывности, движения, энергии [1, 2]:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{div}(\rho \boldsymbol{v}) = 0, \qquad \frac{\rho \, \mathrm{d} v_i}{\mathrm{d} t} = \sigma_{ij,j}, \qquad \frac{\mathrm{d} E}{\mathrm{d} t} = \frac{1}{\rho} \sigma_{ij} \varepsilon_{ij},$$

где ρ – плотность; t – время; v – вектор скорости с компонентами v_i; $\sigma_{ij} = -P\delta_{ij} + S_{ij}$ – компоненты тензора напряжений; $P = P_c\ (\rho/\rho_c)$ – среднее давление, P_c – давление в сплошной компоненте (неповрежденной части) вещества; S_{ij} – компоненты девиато-