На правах рукописи

Кусаинов Марат Ислямбекович

АДАПТИВНОЕ ОПТИМАЛЬНОЕ ПРОГНОЗИРОВАНИЕ МНОГОМЕРНЫХ ПРОЦЕССОВ АВТОРЕГРЕССИОННОГО ТИПА С ДИСКРЕТНЫМ ВРЕМЕНЕМ

05.13.01 – Системный анализ, управление и обработка информации
(в отраслях информатики, вычислительной техники и автоматизации)

АВТОРЕФЕРАТ

диссертации на соискание ученой степени
кандидата физико-математических наук

Томск – 2015

Работа выполнена в федеральном государственном автономном образовательном учреждении высшего образования «Национальный исследовательский Томский государственный университет» на кафедре высшей математики и математического моделирования.

Научный руководитель: доктор физико-математических наук, профессор **Васильев Вячеслав Артурович**

Официальные оппоненты:
Гущин Александр Александрович, доктор физико-математических наук, старший научный сотрудник, федеральное государственное бюджетное учреждение науки Математический институт им. В.А. Стеклова Российской академии наук, отдел теории вероятностей и математической статистики, ведущий научный сотрудник
Рубан Анатолий Иванович, доктор технических наук, профессор, федеральное государственное автономное образовательное учреждение высшего профессионального образования «Сибирский федеральный университет», кафедра «Информатика» Института космических и информационных технологий, заведующий кафедрой

Ведущая организация: Федеральное государственное бюджетное учреждение науки Институт проблем управления им. В.А. Трапезникова Российской академии наук

Защита состоится 23 декабря 2015 г. в 10:30 на заседании диссертационного совета Д 212.267.12, созданного на базе федерального государственного автономного образовательного учреждения высшего образования «Национальный исследовательский Томский государственный университет», по адресу: 634050, г. Томск, пр. Ленина, 36 (учебный корпус № 2, аудитория 212б).

С диссертацией можно ознакомиться в Научной библиотеке и на сайте федерального государственного автономного образовательного учреждения высшего образования «Национальный исследовательский Томский государственный университет» www.tsu.ru.

Материалы по защите диссертации размещены на официальном сайте ТГУ: http://www.ams.tsu.ru/TSU/QualificationDep/co-searchers.nsf/newpublicationn/KusainovMI23122015.html

Автореферат разослан «___» ноября 2015 г.

Ученый секретарь диссертационного совета
кандидат физико-математических наук, доцент — Тарасенко Петр Феликсович

ОБЩАЯ ХАРАКТЕРИСТИКА РАБОТЫ

Актуальность проблемы. Синтез и анализ моделей стохастических динамических систем – широко востребованная задача современной математики. Она возникает во многих отраслях, таких как экономика, социология, биология и многие другие естественные науки, где изучению подлежат объекты случайной природы. При этом одной из основных является задача идентификации и построения по имеющимся данным математической модели.

Существуют различные подходы к оцениванию качества модели. Одним из доказавших свою эффективность является подход, предложенный Л. Льюнгом[1,2], согласно которому модель считается хорошей, если позволяет строить качественные прогнозы. Понятие полной вероятностной модели случайного процесса Льюнг определяет как совокупность последовательности одношаговых прогнозов значений процесса и условных относительно прошлого процесса плотностей распределения ошибок предсказания.

Среди линейных параметрических моделей стохастических динамических систем в число наиболее используемых входят модель авторегрессии (AR), модель скользящего среднего и смешанная модель авторегрессии-скользящего среднего (ARMA). Построение прогнозов для таких моделей обычно требует оценивания неизвестных параметров. В существующих работах по проблеме адаптивного прогнозирования в основном изучаются асимптотические свойства прогнозов, полученных с помощью использования оценок неизвестных параметров либо классическими асимптотическими методами (такими как метод наименьших квадратов, метод максимального правдоподобия), либо методом последовательного анализа. В первом случае свойства оценки можно изучить лишь в асимптотике, во втором случае можно получить оценку заданной точности на выборках конечного, но случайного объема.

В недавнее время в работе В.А. Васильева[3] был предложен метод усеченного оценивания параметров и функционалов типа отношений, позволяющий получить оценки с гарантированным качеством при фиксированном объеме наблюдений. Использование таких оценок в процедурах адаптивного прогнозирования позволяет исследовать качество прогнозов с использованием практически значимых

[1] Ljung L., Söderström T. Theory and practice of recursive identification. Massachusets, 1983. 530 p.

[2] Ljung L. System identification theory for user. Englewood Cliffs, 1987. 519 p.

[3] Vasiliev V.A. A truncated estimation method with guaranteed accuracy // Ann. Inst. Stat. Mat. 2014. Vol. 66, № 1. P. 141-163.

критериев для многомерных систем. При этом получаемые процедуры отличаются достаточной простотой реализации.

Цель работы состоит в построении процедуры адаптивного оптимального одношагового прогнозирования многомерных устойчивых процессов авторегрессионного типа с дискретным временем и неизвестными параметрами, а также в подтверждении работоспособности и свойств полученной процедуры с помощью имитационного моделирования.

Для достижения этой цели сформулированы и решены следующие задачи:

- построение усеченных оценок матричных параметров многомерного процесса AR(1) (далее VAR(1)), процесса VAR(1) со случайным параметром динамики (далее VRCA(1)) и многомерного процесса ARMA(1,1) (далее VARMA(1,1)) и исследование их статистических свойств;

- построение для перечисленных моделей одношаговых прогнозов значений процесса на основе полученных усеченных оценок неизвестных параметров и оптимизация процедуры прогнозирования в смысле заданной функции потерь;

- проведение экспериментов с помощью численного моделирования процедур прогнозирования для подтверждения результатов, сформулированных в ходе решения первых двух задач.

Методика исследования. Результаты получены с использованием методов теории вероятностей, теории случайных процессов, анализа временных рядов, линейной алгебры, математического анализа, статистической обработки информации и имитационного моделирования.

Научная новизна. Положения, выносимые на защиту. Впервые при решении задачи прогнозирования в моделях стохастических динамических систем использовались оценки матричных параметров моделей по методу усеченного оценивания, имеющие гарантированную точность на выборках фиксированного объема и обладающие свойством сильной состоятельности. Это позволило построить и изучить свойства одношаговых прогнозов для многомерных устойчивых процессов авторегрессионного типа с дискретным временем при неизвестном распределении шумов. Полученные результаты обобщают результаты ряда известных работ[4,5].

[4] Sriram T.N. Sequential estimation of the autoregressive parameter in a first order autoregressive process. // Seq. Anal. 1988. Vol. 7, № 1. P. 53-74.

[5] Sriram T.N., Ross Iaci. Sequential estimation for time series models. // Seq. Anal. 2014. Vol. 33, № 2. P. 136-157.

По мнению автора, основные результаты диссертационного исследования обладают научной новизной, можно сформулировать их в виде следующих положений, выносимых на защиту:

- Предложена процедура адаптивного одношагового прогнозирования, оптимальная в смысле заданной функции потерь, для перечисленных ниже многомерных устойчивый процессов

— VAR(1) для случаев известной и неизвестной дисперсии шумов;

— VRCA(1) для случая неизвестной дисперсии шумов процесса;

— VARMA(1,1) для случаев известных дисперсии шума и параметра скользящего среднего, неизвестной дисперсии шума и известного параметра скользящего среднего, известной ковариационной матрицы шума и неизвестного параметра скользящего среднего, неизвестных ковариационной матрицы шума и параметра скользящего среднего.

- Для процесса VRCA(1) построена усеченная оценка среднего значения случайного параметра динамики, имеющая гарантированное качество в смысле L_{2m}-нормы на выборках фиксированного объема, установлены условия на матричный параметр динамики и моменты распределения шумов, при которых эта оценка сильно состоятельна.

- Для процесса VARMA(1,1) построены усеченные оценки параметра динамики и дисперсии шума, а также усеченная оценка параметра скользящего среднего в случае известной ковариационной матрицы шума, все оценки имеют гарантированное качество в смысле L_{2m}-нормы на выборках фиксированного объема, установлены условия на моменты распределения шумов, при которых они сильно состоятельны.

Достоверность полученных результатов. Полученные результаты сформулированы в виде лемм и теорем, имеющих строгое математическое доказательство. Произведено численное моделирование, его результаты подтверждают теоретические выводы.

Практическая ценность работы. Построенная в результате работы процедура прогнозирования может применяться в прикладных задачах, рассматривающих стохастические динамические системы в условиях, когда увеличение числа наблюдений состояний системы невозможно или затратно. Среди отраслей науки и техники, допускающих применение результатов данной диссертации: генетика, биомедицина, финансовая математика, социология и др. Теоретические результаты могут быть использованы в курсах лекций для студентов математических факультетов.

Реализация и внедрение результатов работы. Рассмотренные в диссертации процедуры адаптивного прогнозирования и усеченные оценки параметров многомерных процессов авторегрессионного типа используются в учебном процессе факультета прикладной математики и кибернетики Томского государственного университета в курсе «Эконометрическое моделирование и стохастические процессы» и при выполнении курсовых и квалификационных работ.

Апробация работы. Результаты исследований по теме диссертации обсуждались на следующих конференциях:

1. XII Всероссийское совещание по проблемам управления (ВСПУ-2014), Москва, 16-19 июня 2014.

2. Международная научно-техническая конференция «Интеллектуальные системы, управление и мехатроника – 2015», Севастополь, 13-15 мая 2015.

3. III Всероссийская молодежная научная конференция с международным участием «Математическое и программное обеспечение информационных, технических и экономических систем», Томск, 22-23 мая 2015.

4. Международная научная конференция «Робастная статистика и финансовая математика», Томск, 01-02 июля 2015.

5. XXXII Международная научно-практическая конференция «Естественные и математические науки в современном мире», Новосибирск, 01 июля 2015.

Публикации. Основные результаты, полученные в диссертации, опубликованы в шести работах, в их числе три работы в журналах из перечня ВАК.

Структура и объем. Работа состоит из введения, четырех глав основного текста, заключения, списка использованной литературы. Полный объем диссертации составляет 123 страницы, 5 рисунков, 12 таблиц. Список литературы включает 103 наименования.

СОДЕРЖАНИЕ РАБОТЫ

Во введении раскрывается актуальность исследуемой проблемы построения процедур адаптивного оптимального прогнозирования процессов авторегрессионного типа, приводится обзор известных результатов, формулируются цели и задачи исследования, обосновывается практическая значимость и научная новизна результатов исследования.

В первой главе рассматривается задача адаптивного оптимального одношагового прогнозирования векторного процесса авторегрессии VAR(1) с дискретным временем и постоянным матричным параметром динамики. Распределение шумов модели предполагается неизвестным. **В разделе 1.1** формулируется основная задача, перечисляются опубликованные работы по результатам первой главы [1, 4].

В разделе 1.2 ставится задача, определяются одношаговые прогнозы и функция потерь. Пусть устойчивый p-мерный процесс VAR(1) задается уравнением

$$x(k) = \Lambda x(k-1) + \xi(k), \quad k \geq 1, \tag{1}$$

где Λ – неизвестная $p \times p$ матрица, собственные значения которой лежат в круге единичного радиуса с центром в начале координат (далее будем называть матрицы, отвечающие этому условию, устойчивыми), а $\xi(k)$ – независимые одинаково распределенные (н.о.р.) случайные векторы с нулевым средним, ковариационной матрицей $\Sigma = \mathsf{E}\xi(1)\xi'(1)$ и конечной дисперсией $\sigma^2 = \mathsf{E}\|\xi(1)\|^2 = \operatorname{tr}\Sigma$. Кроме того, выполняется $\mathsf{E}\|x(0)\|^2 < \infty$.

Обозначим область устойчивости матрицы динамики процесса $\Lambda^0 \subset \mathbb{R}^{p\times p}$, вектор параметров модели $\theta = (\lambda_{11}, \lambda_{12}, ..., \lambda_{pp}, \sigma^2)$. Определим множество $\Theta = \{\theta : \ \Lambda \in \Lambda^0, \ 0 < \sigma^2 < \infty\}$. Выбор параметров модели (1) из множества Θ обеспечивает устойчивость процесса $x(k)$.

Хорошо известно, что оптимальный в среднеквадратическом смысле одношаговый прогноз процесса (1) имеет вид

$$x^{opt}(k) = \mathsf{E}_\theta(x(k)|x(k-1)) = \Lambda x(k-1), \quad k \geq 1.$$

Заменим неизвестный параметр Λ усеченной оценкой $\widetilde{\Lambda}_k$, определяемой следующим образом

$$\widetilde{\Lambda}_k = \widehat{\Lambda}_k \chi\left(\overline{\Delta}_k \geq H_k\right), \quad k \geq 1, \tag{2}$$

где $\widehat{\Lambda}_k$ – оценка МНК вида

$$\widehat{\Lambda}_k = \overline{G}_k \overline{F}_k^{-1}, \quad k \geq p; \quad \widehat{\Lambda}_i = 0, \quad i = \overline{0, p-1}, \quad H_k = \ln^{-1/2}(k+1),$$

$$\overline{G}_k = \frac{1}{k}\sum_{i=1}^{k} x(i)x'(i-1), \quad \overline{F}_k = \frac{1}{k}\sum_{i=1}^{k} x(i-1)x'(i-1), \quad \overline{\Delta}_k = \det(\overline{F}_k),$$

а $\chi(Y)$ обозначает индикатор события Y.

Адаптивные одношаговые прогнозы определяются как

$$\widetilde{x}(k) = \widetilde{\Lambda}_{k-1} x(k-1), \quad k \geq 1, \tag{3}$$

соответствующие ошибки одношаговых прогнозов

$$\widetilde{e}(k) = x(k) - \widetilde{x}(k) = (\Lambda - \widetilde{\Lambda}_{k-1}) x(k-1) + \xi(k).$$

Обозначим $e^2(n)$ выборочное среднее квадратов норм ошибок прогнозов

$$e^2(n) = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} \|\widetilde{e}(k)\|^2.$$

Определим функцию потерь следующим образом

$$L_n = \frac{A}{n} e^2(n) + n,$$

где $A(>0)$ – произвольно выбираемый параметр, который можно трактовать как цену ошибки прогноза. Такая функция потерь формулирует проблему выбора между средним по выборке качеством прогнозирования и затратами на увеличение объема наблюдений.

Соответствующая функция риска имеет вид

$$R_n = \mathsf{E}_\theta L_n = \frac{A}{n} \mathsf{E}_\theta e^2(n) + n. \tag{4}$$

Требуется: минимизировать функцию риска R_n по аргументу длительности наблюдений n. Эта задача рассматривается в предположениях об известной и неизвестной дисперсии шума σ^2.

В разделе 1.3 поставленная задача решается в предположении об известной дисперсии σ^2.

Формулируются и доказываются свойства оценок $\widetilde{\Lambda}_k$. Определим номер $k_0 = \max\left\{p, \left\lfloor e^{\Delta^{-2}} \right\rfloor\right\}$, где $\lfloor a \rfloor$ – целая часть числа a, и $\Delta = \lim\limits_{k\to\infty} \overline{\Delta}_k$ P_θ-п.н., существование и положительность Δ обосновываются.

Лемма 1. *Пусть в модели (1) $\theta \in \Theta$ и для некоторого целого $m \geq 1$ выполняется*

$$\mathsf{E}\|\xi(1)\|^{4mp} < \infty, \quad \mathsf{E}\|x(0)\|^{4mp} < \infty.$$

Тогда для усеченных оценок $\widetilde{\Lambda}_k$ справедливы следующие свойства *(i)* *для* $1 \le k < k_0$

$$\mathsf{E}_\theta \|\widetilde{\Lambda}_k - \Lambda\|^{2m} \le C;$$

(ii) *для* $k \ge k_0$

$$\mathsf{E}_\theta \|\widetilde{\Lambda}_k - \Lambda\|^{2m} \le \frac{C \ln^m k}{k^m}.$$

Здесь и далее C обозначает положительные постоянные, необязательно равные между собой, значения которых непринципиальны.

Лемма 1 устанавливает гарантированное качество оценок $\widetilde{\Lambda}_k$ на выборках фиксированного объема. Кроме того установлена сильная состоятельность этих оценок.

В этом разделе вместо оценок $\widetilde{\Lambda}_k$ в (3) используются их проекции на замкнутый шар $\mathcal{B} \in \mathbb{R}^{p\times p}$, такой, что $\Lambda^0 \subset \mathcal{B}$,

$$\Lambda_k^* = \mathrm{proj}_{\mathcal{B}}\, \widetilde{\Lambda}_k,$$

т. е. справедливо неравенство $\|\Lambda_k^* - \Lambda\| \le d_{\mathcal{B}}$, где $d_{\mathcal{B}}$ – диаметр $\mathcal{B}$. Это неравенство позволяет ослабить требования на моменты шумов $\xi(k)$.

Адаптивные прогнозы и функция риска принимают вид

$$x^*(k) = \Lambda_{k-1}^* x(k-1), \quad e^*(k) = (\Lambda - \Lambda_{k-1}^*)x(k-1) + \xi(k), \quad k \ge 1,$$
$$e_*^2(n) = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^n \|e^*(k)\|^2, \quad L_n^* = \frac{A}{n}e_*^2(n) + n, \quad R_n^* = \frac{A}{n}\mathsf{E}_\theta e_*^2(n) + n.$$

С помощью второго утверждения леммы показывается, что при выполнении условий $\mathsf{E}\|\xi(1)\|^{4p} < \infty$, $\mathsf{E}\|x(0)\|^{4p} < \infty$, функцию риска можно представить в виде

$$R_n^* = \frac{A}{n}(\sigma^2 + D_n) + n,$$

где

$$D_n \le C n^{-1/2} \ln^{1/2} n = o(1) \quad \text{при} \quad n \to \infty. \tag{5}$$

Аналогично работе T.N. Sriram (1988), поставленная задача сводится к минимизации главной части риска

$$R_n^* \approx \frac{A}{n}\sigma^2 + n \to \min_n,$$

откуда находится оптимальный объем выборки

$$n_A^o = A^{1/2}\sigma, \quad \text{где} \quad \sigma \doteq \sqrt{\sigma^2},$$

и соответствующее минимальное значение риска с учетом (5)

$$R^*_{n^o_A} = 2A^{1/2}\sigma + O(A^{1/4}\ln^{1/2} A) \quad \text{при} \quad A \to \infty.$$

Если же выполняются условия $\mathsf{E}\|\xi(1)\|^{8p} < \infty$, $\mathsf{E}\|x(0)\|^{8p} < \infty$, то показывается, что использование $\widetilde{\Lambda}_k$ в прогнозах гарантирует свойство

$$R_{n^o_A} = 2A^{1/2}\sigma + O(\ln^2 A) \quad \text{при} \quad A \to \infty. \tag{6}$$

В разделе 1.4 поставленная задача решается в случае неизвестной дисперсии σ^2. После замены ее оценкой $\widetilde{\sigma}^2_n = \dfrac{1}{n}\sum\limits_{k=1}^{n} \|x(k) - \widetilde{\Lambda}_n x(k-1)\|^2$, определяется оценка оптимального объема выборки в виде

$$T_A = \inf_{n \geq n_A} \left\{ n \geq A^{1/2}\widetilde{\sigma}_n \right\},$$

n_A – начальный размер выборки («задержка» процедуры), зависящий от A.

Обозначим очевидным образом модифицированную функцию риска

$$R_A = \mathsf{E}_\theta L_{T_A} = A\mathsf{E}_\theta \frac{1}{T_A} e^2(T_A) + \mathsf{E}_\theta T_A. \tag{7}$$

Основной результат первой главы содержит следующая теорема.

Теорема 1. *Пусть для процесса (1) размерности p справедливо $\mathsf{E}\|\xi(1)\|^{8p+4} < \infty$, $\mathsf{E}\|x(0)\|^{8p+4} < \infty$, а задержка n_A такая, что*

$$n_A = o(A^{1/2}) \;\; \textit{при} \;\; A \to \infty, \quad n_A \geq \max\{k_0,\ A^r \ln^2 A\}, \quad r \in [2/5,\ 1/2).$$

Пусть прогнозы $\widetilde{x}(k)$ определяются формулой (3), а функции риска $R_{n^o_A}$ и R_A – формулами (6), (7). Тогда для любого $\theta \in \Theta$ справедливо

$$\frac{T_A}{n^o_A} \xrightarrow[A\to\infty]{} 1 \quad \mathsf{P}_\theta\text{-п.н.}, \qquad \frac{\mathsf{E}_\theta T_A}{n^o_A} \xrightarrow[A\to\infty]{} 1, \qquad \frac{R_A}{R_{n^o_A}} \xrightarrow[A\to\infty]{} 1.$$

Во второй главе рассматривается задача адаптивного оптимального одношагового прогнозирования процесса VRCA(1) с дискретным временем. Распределение шумов модели предполагается неизвестным. **В разделе 2.1** формулируется основная задача, перечисляются опубликованные работы по результатам второй главы [3, 6].

В разделе 2.2 ставится задача, определяются одношаговые прогнозы и функция потерь. Пусть устойчивый p-мерный процесс VRCA(1) задается уравнением

$$x(k) = \Lambda_{k-1}x(k-1) + \xi(k), \quad k \geq 1, \tag{8}$$
$$\Lambda_k = \Lambda + \eta(k), \quad k \geq 0,$$

где $p \times p$ матрица Λ предполагается неизвестной, $\xi(k)$ и $\eta(k-1)$ для $k \geq 1$ образуют независимые между собой последовательности н.о.р. случайных векторов и матриц соответственно, для которых выполнено

$$\Sigma = \mathsf{E}\xi(1)\xi'(1) > 0, \quad \Psi = \mathsf{E}\eta'(0)\eta(0) > 0,$$

$$\mathsf{E}\xi(1) = 0, \quad \mathsf{E}\eta(0) = 0, \quad \sigma_\xi^2 = \mathsf{E}\|\xi(1)\|^2 < \infty, \quad \sigma_\eta^2 = \mathsf{E}\|\eta(0)\|^2 < \infty,$$

σ_ξ^2 и σ_η^2 неизвестны. Кроме того, $\mathsf{E}\|x(0)\|^2 < \infty$, и в качестве условия устойчивости процесса (8) матрица $\overline{\Lambda} = \mathsf{E}\Lambda_0^{\otimes 2} = \Lambda^{\otimes 2} + \mathsf{E}\eta^{\otimes 2}(0)$ предполагается устойчивой, здесь $Y^{\otimes 2} = Y \otimes Y$, символ $\otimes$ обозначает Кронекерово произведение.

Обозначим вектор параметров модели $\theta = (\lambda_{11}, ..., \lambda_{pp}, \Psi, \sigma_\xi^2)$. Определим множество $\Theta_m = \{\theta: \ \mathsf{E}\Lambda_0^{\otimes m}$ устойчива, $0 < \sigma_\xi^2, \sigma_\eta^2 < \infty\}$. В работе показывается, что при $\theta \in \Theta_{2m}$ выполнено $\sup\limits_{k \geq 1} \mathsf{E}_\theta \|x(k)\|^{2m} \leq C$.

Оптимальный в среднеквадратическом смысле одношаговый прогноз

$$x^{opt}(k) = \Lambda x(k-1), \quad k \geq 1.$$

В качестве оценки параметра Λ используется оценка $\widetilde{\Lambda}_k$ типа (2)

$$\widetilde{\Lambda}_k = \widehat{\Lambda}_k \chi\left(\overline{\Delta}_k \geq H_k\right), \quad k \geq 1,$$

$$\widehat{\Lambda}_k = \overline{G}_k \overline{F}_k^{-1}, \quad k \geq p; \quad \widehat{\Lambda}_i = 0, \quad i = \overline{0, p-1}, \quad H_k = \ln^{-1/2}(k+1),$$

$$\overline{G}_k = \frac{1}{k}\sum_{i=1}^{k} x(i)x'(i-1), \quad \overline{F}_k = \frac{1}{k}\sum_{i=1}^{k} x(i-1)x'(i-1), \quad \overline{\Delta}_k = \det(\overline{F}_k).$$

Одношаговые прогнозы, ошибки предсказаний, функции потерь и риска определяются формулами

$$\widetilde{x}(k) = \widetilde{\Lambda}_{k-1}x(k-1), \quad k \geq 1, \tag{9}$$

$$\widetilde{e}(k) = x(k) - \widetilde{x}(k) = (\Lambda - \widetilde{\Lambda}_{k-1})x(k-1) + \eta(k-1)x(k-1) + \xi(k),$$

$$e^2(n) = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} \|\widetilde{e}(k)\|^2, \quad L_n = \frac{A}{n}e^2(n) + n, \quad R_n = \frac{A}{n}\mathsf{E}_\theta e^2(n) + n.$$

Требуется: минимизировать функцию риска R_n по аргументу длительности наблюдений n.

В разделе 2.2 решается поставленная задача. Показывается, что функция риска может быть записана в виде

$$R_n = \frac{A}{n}\left(\sigma_\xi^2 + \operatorname{tr}(\Psi F) + D_n\right) + n, \tag{10}$$

где

$$\begin{gathered} F = \lim_{k\to\infty} \mathsf{E}_\theta x(k)x'(k), \\ D_n = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} \operatorname{tr}(\Psi(\mathsf{E}_\theta x(k-1)x'(k-1) - F)) + \\ + \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} \mathsf{E}_\theta \|(\widetilde{\Lambda}_{k-1} - \Lambda)x(k-1)\|^2; \end{gathered} \tag{11}$$

обосновывается существование и положительная определенность матрицы F при $\theta \in \Theta_2$, а также свойство

$$\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} \left|\operatorname{tr}(\Psi(\mathsf{E}_\theta x(k-1)x'(k-1) - F))\right| = O(n^{-1}), \quad \text{при} \quad n \to \infty. \tag{12}$$

Аналогично разделу 1.3 доказываются свойства оценок $\widetilde{\Lambda}_k$. Обозначим $k_0 = \max\left\{p,\ \left\lfloor e^{\Delta^{-2}} \right\rfloor\right\}$, где $\Delta = \det(F) > 0$.

Лемма 2. *Пусть в модели (8) для некоторого целого $m \geq 1$ матрица $\mathsf{E}\Lambda_0^{\otimes 4mp}$ устойчива и выполняются условия Леммы 1 на моменты шумов $\xi(k)$ и $x(0)$. Тогда для усеченных оценок $\widetilde{\Lambda}_k$ справедливо*

(i) для $1 \leq k < k_0$

$$\mathsf{E}_\theta \|\widetilde{\Lambda}_k - \Lambda\|^{2m} \leq C;$$

(ii) для $k \geq k_0$

$$\mathsf{E}_\theta \|\widetilde{\Lambda}_k - \Lambda\|^{2m} \leq \frac{C \ln^m k}{k^m}.$$

С помощью Леммы 2 находится оценка второго слагаемого в правой части (11) при выполнении условий $\mathsf{E}\|\xi(1)\|^{8p} < \infty$, $\mathsf{E}\|x(0)\|^{8p} < \infty$ и устойчивости матрицы $\mathsf{E}\Lambda_0^{\otimes 8p}$

$$\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} \mathsf{E}_\theta \|(\widetilde{\Lambda}_{k-1} - \Lambda)^2 x(k-1)\|^2 \leq Cn^{-1}\ln^2 n = o(1) \ \text{ при } \ n \to \infty.$$

Ввиду этого, а также (11) и (12), поставленная задача сводится к минимизации главной части риска

$$R_n \approx \frac{A}{n}\big(\sigma_\xi^2 + \mathrm{tr}(\Psi F)\big) + n \to \min_n .$$

Обозначим $\sigma^2 = \sigma_\xi^2 + \mathrm{tr}(\Psi F)$, $\sigma \doteq \sqrt{\sigma^2}$. Находятся оптимальный объем выборки и соответствующее минимальное значение риска

$$n_A^o = A^{1/2}\sigma,$$

$$R_{n_A^o} = 2A^{1/2}\sigma + O(\ln^2 A) \quad \text{при} \quad A \to \infty. \tag{13}$$

Определяется оценка σ^2 вида $\widetilde{\sigma}_n^2 = \dfrac{1}{n}\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \|x(k) - \widetilde{\Lambda}_n x(k-1)\|^2$, а также оценка оптимального объема выборки

$$T_A = \inf_{n \ge n_A} \left\{ n \ge A^{1/2}\widetilde{\sigma}_n \right\}.$$

Обозначим функцию риска в момент T_A

$$R_A = \mathsf{E}_\theta L_{T_A} = A\mathsf{E}_\theta \frac{1}{T_A} e^2(T_A) + \mathsf{E}_\theta T_A. \tag{14}$$

Теорема 2. *Пусть для процесса (8) выполняются условия Теоремы 1, а матрица* $\mathsf{E}\Lambda_0^{\otimes(8p+4)}$ *устойчива. Пусть прогнозы* $\widetilde{x}(k)$ *определяются формулой (9), а функции риска* $R_{n_A^o}$, R_A *– формулами (13), (14) соответственно. Тогда для любого* $\theta \in \Theta_{8p+4}$ *справедливо*

$$\frac{T_A}{n_A^o} \xrightarrow[A\to\infty]{} 1 \quad \mathsf{P}_\theta\text{-п.н.}, \qquad \frac{\mathsf{E}_\theta T_A}{n_A^o} \xrightarrow[A\to\infty]{} 1, \qquad \frac{R_A}{R_{n_A^o}} \xrightarrow[A\to\infty]{} 1.$$

В третьей главе рассматривается задача адаптивного оптимального одношагового прогнозирования процесса VARMA(1,1). Распределение шумов модели предполагается неизвестным. **В разделе 3.1** формулируется основная задача, перечисляются опубликованные работы по результатам третьей главы [2, 5].

В разделе 3.2 ставится задача, определяются одношаговые прогнозы и функция риска. Пусть устойчивый и обратимый p-мерный процесс VARMA(1,1) задается уравнением

$$x(k) = \Lambda x(k-1) + \xi(k) + \mathrm{M}\xi(k-1), \quad k \ge 1, \tag{15}$$

где Λ и M – $p\times p$ матрицы параметров, для которых выполнено условие устойчивости, не имеющие общих собственных значений. Предполагается, что параметр Λ неизвестен, а M – известен. Случайные векторы $\xi(k)$ при $k \ge 1$ являются н.о.р. с нулевым средним, ковариационной матрицей $\Sigma = \mathsf{E}\xi(0)\xi'(0)$ и конечной дисперсией $\sigma^2 = \mathsf{E}\|\xi(0)\|^2$. Пусть также выполнено условие $\mathsf{E}\|x(0)\|^2 < \infty$.

Обозначим область устойчивости матриц Λ и M, соответственно, $\Lambda^0,\ \mathrm{M}^0 \subset \mathbb{R}^{p\times p}$, вектор параметров модели $\theta = (\lambda_{11}, \ldots, \lambda_{pp}, \mu_{11}, \ldots, \mu_{pp}, \sigma^2)$. Определим множество $\Theta = \{\theta : \Lambda \in \Lambda^0,\ \mathrm{M} \in \mathrm{M}^0,\ 0 < \sigma^2 < \infty\}$.

Оптимальный в среднеквадратическом смысле одношаговый прогноз

$$x^{opt}(k) = \Lambda x(k-1) + \mathrm{M}\xi(k-1), \quad k \geq 1.$$

В качестве оценки для матрицы Λ используется усеченная оценка, построенная на основе корреляционной оценки типа Юла-Уокера, используемой в данном случае по причине низкого уровня информации о распределениях помех. Базовая оценка имеет вид

$$\widehat{\Lambda}_k = \begin{cases} \overline{\Phi}_k \overline{G}_k^{-1}, & k \geq 2, \quad \overline{G}_k \text{ невырождена}, \\ 0, & k = 0, 1, \text{ или } \overline{G}_k \text{ вырождена}, \end{cases}$$

$$\overline{\Phi}_k = \frac{1}{k-1}\sum_{i=2}^{k} x(i)x'(i-2), \quad \overline{G}_k = \frac{1}{k-1}\sum_{i=2}^{k} x(i-1)x'(i-2).$$

Тогда усеченная оценка параметра Λ определяется как

$$\widetilde{\Lambda}_k = \widehat{\Lambda}_k \chi\left(|\overline{\Delta}_k| \geq H_k\right), \quad \overline{\Delta}_k = \det(\overline{G}_k), \quad H_k = \ln^{-1/2}(k+1).$$

Определяются оценки величин $\xi(k)$. Пусть дана выборка из k наблюдений, по которой построена оценка $\widetilde{\Lambda}_k$, тогда, полагая $\widetilde{\xi}(0) = 0$, имеем

$$\widetilde{\xi}(1) = x(1) - \widetilde{\Lambda}_k x(0), \quad \widetilde{\xi}(2) = (-\mathrm{M})^0(x(2) - \widetilde{\Lambda}_k x(1)) + (-\mathrm{M})^1(x(1) - \widetilde{\Lambda}_k x(0)),$$

$$\widetilde{\xi}(k) = \sum_{i=0}^{k-1} (-\mathrm{M})^i \big(x(k-i) - \widetilde{\Lambda}_k x(k-1-i)\big). \tag{16}$$

Определяются одношаговые прогнозы

$$\widetilde{x}(k) = \widetilde{\Lambda}_{k-1} x(k-1) + \mathrm{M}\widetilde{\xi}(k-1), \quad k \geq 1. \tag{17}$$

Показывается, что ошибки прогнозов можно записать в виде

$$\widetilde{e}(k) = \xi(k) + (-\mathrm{M})^k \xi(0) - \sum_{i=0}^{k-1} (-\mathrm{M})^i (\widetilde{\Lambda}_{k-1} - \Lambda) x(k-1-i).$$

Функции потерь и риска определяются как

$$e^2(n) = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} \|\widetilde{e}(k)\|^2, \quad L_n = \frac{A}{n} e^2(n) + n, \quad R_n = \frac{A}{n}\mathsf{E}_\theta e^2(n) + n.$$

Требуется: минимизировать функцию риска по аргументу длительности наблюдений n. Эта задача рассматривается в различных комбинациях предположений об известных и неизвестных параметрах шумов и параметре скользящего среднего.

В разделе 3.3 поставленная задача решается в предположении об известных дисперсии шумов σ^2 и параметре скользящего среднего M.

Для функции риска используется представление

$$R_n = \frac{A}{n}(\sigma^2 + D_n) + n, \tag{18}$$

$$D_n = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} \mathsf{E}_\theta \left\| (-\mathrm{M})^k \xi(0) - \sum_{i=0}^{k-1} (-\mathrm{M})^i (\Lambda^*_{k-1} - \Lambda) x(k-1-i) \right\|^2.$$

Показывается, что условием отличия от нуля предела $\lim\limits_{k\to\infty} \overline{\Delta}_k = \Delta$ P_θ-п.н. является невырожденность матрицы G вида

$$G = \Lambda F + \mathrm{M}\Sigma, \tag{19}$$

$$F = \sum_{n\geq 0} \Lambda^n \widetilde{\Sigma} (\Lambda')^n, \quad \widetilde{\Sigma} = \Lambda\Sigma\mathrm{M}' + \mathrm{M}\Sigma\Lambda' + \Sigma + \mathrm{M}\Sigma\mathrm{M}'.$$

Доказываются свойства оценок $\widetilde{\Lambda}_k$. Обозначим $k_0 = \left\lfloor e^{|\Delta|^{-2}} \right\rfloor$.

Лемма 3. *Пусть в модели (15) $\theta \in \Theta$, выполняются условия Леммы 1 на моменты шумов $\xi(k)$ и $x(0)$, а матрица G невырождена. Тогда для усеченных оценок $\widetilde{\Lambda}_k$ справедливо*

(i) для $1 \leq k < k_0$

$$\mathsf{E}_\theta \|\widetilde{\Lambda}_k - \Lambda\|^{2m} \leq C;$$

(ii) для $k \geq k_0$

$$\mathsf{E}_\theta \|\widetilde{\Lambda}_k - \Lambda\|^{2m} \leq \frac{C \ln^m k}{k^m}.$$

Показывается, что при использовании в адаптивных прогнозах проекций оценок $\widetilde{\Lambda}_k$ на замкнутый шар $\mathcal{B}_\Lambda \in \mathbb{R}^{p\times p}$, такой, что $\Lambda^0 \subset \mathcal{B}_\Lambda$, достаточно выполнения условий $\mathsf{E}\|\xi(0)\|^{4p} < \infty$, $\mathsf{E}\|x(0)\|^{4p} < \infty$, чтобы была справедлива оценка

$D_n \leq Cn^{-1/2}\ln^{1/2} n$. Это позволяет, ввиду (18), минимизировать главную часть риска

$$R_n \approx \frac{A}{n}\sigma^2 + n \to \min_n .$$

Если выполнены более сильные требования $\mathsf{E}\|\xi(0)\|^{8p} < \infty$, $\mathsf{E}\|x(0)\|^{8p} < \infty$, то имеет место

$$D_n \leq Cn^{-1}\ln^2 n = o(1) \quad \text{при} \quad n \to \infty.$$

Устанавливаются оптимальный объем выборки и соответствующее минимальное значение риска

$$n_A^o = A^{1/2}\sigma, \quad \text{где} \quad \sigma \doteq \sqrt{\sigma^2},$$

$$R_{n_A^o} = 2A^{1/2}\sigma + O(\ln^2 A) \quad \text{при} \quad A \to \infty, \tag{20}$$

т. е. величины n_A^o и $R_{n_A^o}$ совпадают с соответствующими величинами раздела 1.3 при одинаковых требованиях на моменты распределения шумов модели.

В разделе 3.4 предполагается, что дисперсия σ^2 неизвестна, а параметр скользящего среднего M известен.

Оценка величины σ^2 определяется следующим образом

$$\widetilde{\sigma}_n^2 = J_p \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}(I + \mathrm{M}^{\otimes 2})^{-1}\,\mathrm{vec}\left[\big(x(k) - \widetilde{\Lambda}_n x(k-1)\big)\big(x(k) - \widetilde{\Lambda}_n x(k-1)\big)'\right],$$

где $\mathrm{vec}[\cdot]$ – оператор векторизации и

$$J_p = \langle j_i \rangle_{1\times p^2}, \qquad j_i = \begin{cases} 1, & i = 1 + (l-1)(p+1) \text{ для } l = \overline{1,p}, \\ 0, & \text{иначе.} \end{cases}$$

Здесь $\langle j_i \rangle_{1\times p^2}$ обозначает вектор-строку длины p^2 с элементами j_i.

Для определения оценки σ^2 может быть использовано дополнительное условие на шумы $\xi(k)$.

Предположение П1: Пусть компоненты векторов $\xi_j(k)$, $j = \overline{1,p}$, $k \geq 1$ некоррелированы между собой и имеют равные вторые моменты, т. е. ковариационная матрица имеет вид $\Sigma = \sigma^2 p^{-1} I$.

В случае выполнения **П1** справедливо

$$\mathsf{E}\|\mathrm{M}\xi(k)\|^2 = \sum_{j=1}^{p}\mathsf{E}\Big(\sum_{l=1}^{p}\mu_{jl}\xi_l(k)\Big)^2 = \frac{\sigma^2}{p}\sum_{j=1}^{p}\sum_{l=1}^{p}\mu_{jl}^2 = \frac{\sigma^2}{p}\|\mathrm{M}\|^2.$$

Показывается, что оценка вида

$$\widehat{\sigma}_n^2 = \frac{p}{p + \|\mathrm{M}\|^2} \cdot \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} \|x(k) - \widetilde{\Lambda}_n x(k-1)\|^2$$

является сильно состоятельной и может быть использована вместо $\widetilde{\sigma}_n^2$, если выполнено **П1**. В скалярном случае оценки $\widehat{\sigma}_n^2$ и $\widetilde{\sigma}_n^2$ совпадают. На основе $\widetilde{\sigma}_n^2$ определяется оценка величины n_A^o вида

$$T_A = \inf_{n \ge n_A} \left\{ n \ge A^{1/2} \widetilde{\sigma}_n \right\}.$$

Обозначим

$$R_A = A \mathsf{E}_\theta \frac{1}{T_A} e^2(T_A) + \mathsf{E}_\theta T_A. \tag{21}$$

Теорема 3. *Пусть для процесса (15) выполняются условия Теоремы 1, а матрица G, определенная в (19), невырождена. Пусть оценки $\widetilde{\xi}(k)$ и прогнозы $\widetilde{x}(k)$ определяются формулами (16) и (17), а функции риска $R_{n_A^o}$ и R_A – формулами (20), (21) соответственно. Тогда для любого $\theta \in \Theta$*

$$\frac{T_A}{n_A^o} \xrightarrow[A \to \infty]{} 1 \quad \mathsf{P}_\theta\text{-п.н.}, \qquad \frac{\mathsf{E}_\theta T_A}{n_A^o} \xrightarrow[A \to \infty]{} 1, \qquad \frac{R_A}{R_{n_A^o}} \xrightarrow[A \to \infty]{} 1.$$

В разделе 3.5 задача построения адаптивных оптимальных прогнозов процесса VARMA(1,1) рассматривается для случая известной ковариационной матрицы шумов модели Σ и неизвестного параметра скользящего среднего M.

Определяется оценка корреляционного типа параметра M. Обозначим

$$\overline{\Gamma}_{0,k} = \frac{1}{k} \sum_{i=1}^{k} x(i-1) x'(i-1), \quad \overline{\Gamma}_{1,k} = \frac{1}{k} \sum_{i=1}^{k} x(i-1) x'(i).$$

Усеченная оценка матрицы M определяется как

$$\widetilde{\mathrm{M}}_k = \left(\overline{\Gamma}'_{1,k} - \widetilde{\Lambda}_n \overline{\Gamma}_{0,k} \right) \Sigma^{-1}.$$

Доказываются свойства оценок $\widetilde{\mathrm{M}}_k$.

Лемма 4. *Пусть в модели (15) для некоторого целого $m \ge 1$ выполняются условия*

$$\mathsf{E} \|\xi(0)\|^{4m(p+1)} < \infty, \quad \mathsf{E} \|x(0)\|^{4m(p+1)} < \infty,$$

а матрицы Σ и G невырождены. Тогда для оценок $\widetilde{\mathrm{M}}_k$ справедливо *(i) для* $1 \le k < k_0$

$$\mathsf{E}_\theta \|\widetilde{\mathrm{M}}_k - \mathrm{M}\|^{2m} \le C;$$

(ii) для $k \ge k_0$

$$\mathsf{E}_\theta \|\widetilde{\mathrm{M}}_k - \mathrm{M}\|^{2m} \le \frac{C \ln^m k}{k^m}.$$

На основе проекций оценок $\widetilde{\mathrm{M}}_k$

$$\mathrm{M}_k^* = \mathrm{proj}_{\mathcal{M}} \widetilde{\mathrm{M}}_k,$$

где $\mathcal{M}$ – компакт из области устойчивости M^0, определяются оценки значений $\xi(k)$ вида

$$\widetilde{\xi}(k) = \sum_{i=0}^{k-1} (-\mathrm{M}_k^*)^i \big(x(k-i) - \widetilde{\Lambda}_k x(k-1-i)\big).$$

Определяются адаптивные прогнозы

$$\widetilde{x}(k) = \widetilde{\Lambda}_{k-1} x(k-1) + \mathrm{M}_{k-1}^* \widetilde{\xi}(k-1), \quad k \ge 1, \tag{22}$$

показывается, что ошибки прогнозов имеют вид

$$\widetilde{e}(k) = \xi(k) + (-\mathrm{M}_{k-1}^*)^{k-1} \mathrm{M}\xi(0) - \sum_{i=0}^{k-1} (-\mathrm{M}_{k-1}^*)^i (\widetilde{\Lambda}_{k-1} - \Lambda) x(k-1-i) +$$
$$+ \sum_{i=0}^{k-2} (-\mathrm{M}_{k-1}^*)^i (\mathrm{M}_{k-1}^* - \mathrm{M}) \xi(k-1-i).$$

Определяется функция риска

$$e^2(n) = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} \|\widetilde{e}(k)\|^2, \quad R_n = \frac{A}{n} \mathsf{E}_\theta e^2(n) + n,$$

которая может быть записана в виде

$$R_n = \frac{A}{n}(\sigma^2 + D_n) + n, \quad D_n = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} \mathsf{E}_\theta \|\widetilde{e}(k) - \xi(k)\|^2. \tag{23}$$

С помощью Лемм 3 и 4 показывается, что при выполнении условий $\mathsf{E}\|\xi(0)\|^{4(p+1)} < \infty$, $\mathsf{E}\|x(0)\|^{4(p+1)} < \infty$ и невырожденности матриц Σ и G имеет место оценка $D_n \le C n^{-1/2} \ln n = o(1)$ при $n \to \infty$. Это позволяет, ввиду (23), минимизировать главную часть риска и получить оптимальный объем выборки и соответствующее значение риска

$$n_A^o = A^{1/2} \sigma, \quad R_{n_A^o} = 2A^{1/2}\sigma + O(A^{1/4} \ln A) \quad \text{при} \quad A \to \infty.$$

В разделе 3.6 рассматривается случай, когда неизвестны и ковариационная матрица шумов модели Σ, и параметр скользящего среднего M.

Построить оценку $\widetilde{\mathrm{M}}_k$ с контролируемым среднеквадратическим отклонением на выборках произвольного размера в этом случае не удается, поэтому адаптивные прогнозы определяются как

$$\widetilde{x}(k) = \widetilde{\Lambda}_{k-1} x(k-1), \quad k > 1, \tag{24}$$

где

$$\widetilde{\Lambda}_k = \widehat{\Lambda}_k \chi\Big(|\overline{\Delta}_k| \geq H_k \Big), \quad \widehat{\Lambda}_k = \overline{\Phi}_k \overline{G}_k^{-1}, \quad H_k = \ln^{-1/2}(k+1),$$

$$\overline{\Phi}_k = \frac{1}{k-1} \sum_{i=2}^{k} x(i) x'(i-2), \quad \overline{G}_k = \frac{1}{k-1} \sum_{i=2}^{k} x(i-1) x'(i-2).$$

Соответствующие ошибки предсказания и функция риска

$$\widetilde{e}(k) = (\Lambda - \widetilde{\Lambda}_{k-1}) x(k-1) + \xi(k) + \mathrm{M}\xi(k-1),$$

$$e^2(n) = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} \|\widetilde{e}(k)\|^2, \quad R_n = \frac{A}{n} \mathsf{E}_\theta e^2(n) + n.$$

Показывается, что при выполнении условий $\mathsf{E}\|\xi(0)\|^{8p} < \infty$, $\mathsf{E}\|x(0)\|^{8p} < \infty$ и невырожденности матрицы G, определенной в (19), имеет место

$$R_n = \frac{A}{n} \big(\operatorname{tr}\big((I + \mathrm{M}'\mathrm{M}) \Sigma \big) + D_n \big) + n,$$

$$D_n = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} \mathsf{E}_\theta \|(\Lambda - \widetilde{\Lambda}_k) x(k-1)\|^2 \leq C n^{-1} \ln^2 n = o(1) \quad \text{при} \quad n \to \infty.$$

Минимизацией главной части R_n находятся оптимальный объем выборки и соответствующее минимальное значение риска

$$n_A^o = \big(A \operatorname{tr}\big((I + \mathrm{M}'\mathrm{M}) \Sigma \big) \big)^{1/2},$$

$$R_{n_A^o} = 2 \big(A \operatorname{tr}\big((I + \mathrm{M}'\mathrm{M}) \Sigma \big) \big)^{1/2} + O(\ln^2 A) \quad \text{при} \quad A \to \infty. \tag{25}$$

Обозначим $\sigma_1^2 = \operatorname{tr}\big((I + \mathrm{M}'\mathrm{M}) \Sigma \big)$. В качестве оценки σ_1^2 используется

$$\widetilde{\sigma}_{1,n}^2 = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} \|x(k) - \widetilde{\Lambda}_n x(k-1)\|^2.$$

Определяется момент остановки

$$T_A = \inf_{n \geq n_A} \left\{ n \geq A^{1/2} \widetilde{\sigma}_{1,n} \right\},$$

а также риск

$$R_A = A \mathsf{E}_\theta \frac{1}{T_A} e^2(T_A) + \mathsf{E}_\theta T_A. \tag{26}$$

Теорема 4. *Пусть для процесса (15) выполняются условия Теоремы 3. Пусть прогнозы $\widetilde{x}(k)$ определяются формулой (24), а функции риска $R_{n_A^o}$ и R_A – формулами (25), (26) соответственно. Тогда для любого $\theta \in \Theta$ выполняется*

$$\frac{T_A}{n_A^o} \xrightarrow[A \to \infty]{} 1 \quad \mathsf{P}_\theta\text{-п.н.}, \qquad \frac{\mathsf{E}_\theta T_A}{n_A^o} \xrightarrow[A \to \infty]{} 1, \qquad \frac{R_A}{R_{n_A^o}} \xrightarrow[A \to \infty]{} 1.$$

В четвертой главе приводятся результаты численного моделирования процедур адаптивного оптимального прогнозирования процессов VAR(1), VRCA(1) и VARMA(1,1) различных размерностей. Все математические ожидания заменены выборочными средними по 150 реализациям и обозначаются крышкой (например, $\widehat{T}_A$ – выборочное среднее величины T_A).

В таблицах приводятся значения оптимального объема выборки, его оценки величиной T_A, значения рисков при заданных параметрах модели с ростом цены A. Приведем пример такой таблицы для процесса RCA(1) с параметрами $\Lambda = 0.5$, $\sigma_\eta^2 = 0.1$, $\sigma_\xi^2 = 1$, $n_A = \lfloor A^{0.41} \rfloor$ (условия Теоремы 2 удовлетворены).

Таблица 4 – Значения рисков и оптимального объема выборки для процесса RCA(1) размерности $p = 1$

A	n_A^o	$\widehat{T}_A$	$\widehat{T}_A/n_A^o$	$\widehat{R}_{n_A^o}$	$\frac{\widehat{R}_{n_A^o}}{2A^{1/2}\sigma}$	$\widehat{R}_A$	$\widehat{R}_A/\widehat{R}_{n_A^o}$
500	24.02	22.8	0.951	58.8	1.223	55.4	0.943
1000	33.97	32.81	0.966	78.9	1.162	75.8	0.961
5000	76	74.9	0.986	164.3	1.082	161.6	0.983

Из таблицы видно, что результаты Теоремы 2 подтверждаются, отношение рисков близко к единице уже при n_A^o равном 40-50.

Также приводятся графики функций рисков и их главной части для сравнения. Например, график риска для процесса VRCA(1) (при $p = 1$) с параметрами $\Lambda = 0.3$, $\sigma_\eta^2 = 0.1$, $\sigma_\xi^2 = 1$, $A = 3000$ приведен ниже. Звездочками отмечены минимумы функций.

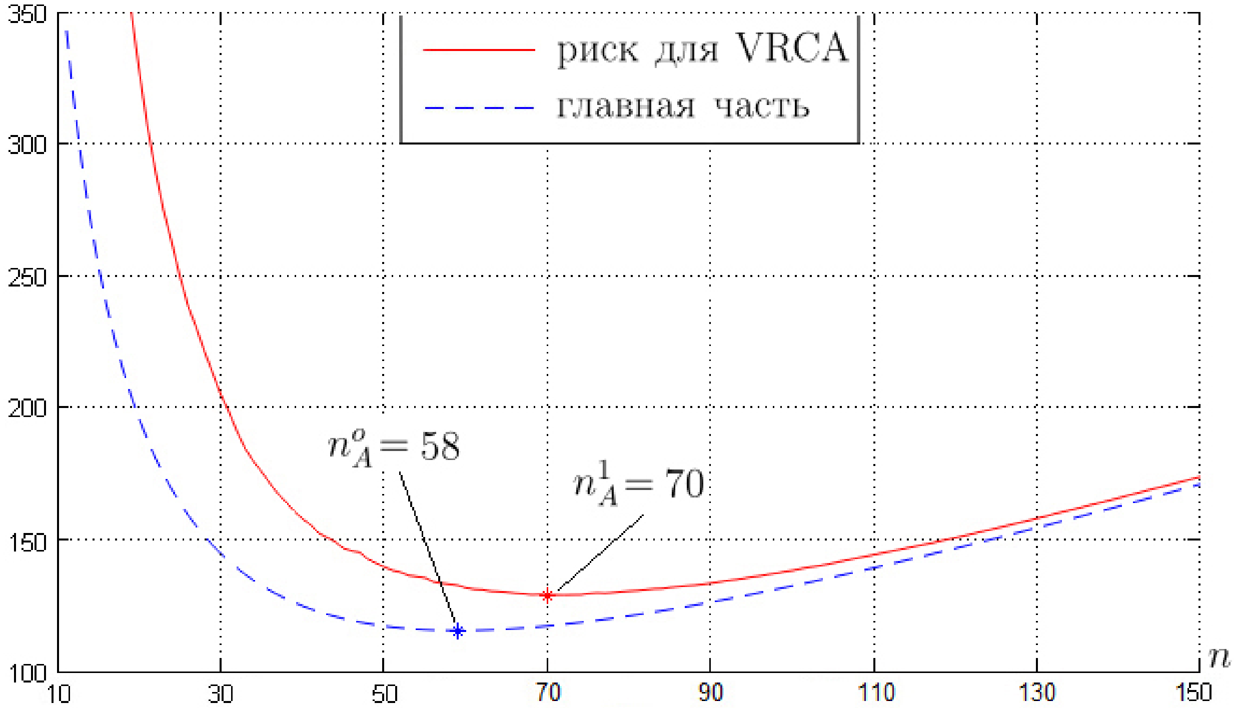

Рисунок 5 – Поведение риска и его главной части

Подобные результаты получены для всех рассмотренных моделей. Например, для скалярного процесса ARMA(1,1) с параметрами $\sigma^2 = 1$, $\Lambda = 0.9$, $\mathrm{M} = 0.5$ в предположении о неизвестном параметре M получены следующие данные.

Таблица 6 – Значения рисков и оптимального объема выборки для процесса VARMA(1,1) размерности $p = 1$ при неизвестном M

A	n_A^o	$\widehat{T}_A$	$\widehat{T}_A/n_A^o$	$\widehat{R}_{n_A^o}$	$\frac{\widehat{R}_{n_A^o}}{2A^{1/2}\sigma}$	$\widehat{R}_A$	$\widehat{R}_A/\widehat{R}_{n_A^o}$
300	19.36	18.34	0.947	43.02	1.11	40.89	0.95
1000	35.36	34.51	0.976	76.4	1.08	74.1	0.97
3000	61.2	60.4	0.986	129.1	1.052	126.3	0.979

В заключении диссертации перечислены ее основные результаты, изложенные в соответствии с целями и пунктами научной новизны, приведенными во введении. Отмечается, что достигнуты поставленные цели и решены сформулированные задачи.

В приложении приведена копия акта о внедрении результатов диссертации в учебный процесс Томского государственного университета.

ПУБЛИКАЦИИ ПО ТЕМЕ ДИССЕРТАЦИИ

Статьи, опубликованные в журналах, включенных в Перечень ведущих рецензируемых научных журналов и изданий, в которых должны быть опубликованы основные научные результаты диссертаций на соискание ученых степеней доктора и кандидата наук:

1. Kusainov M. I. On optimal adaptive prediction of multivariate autoregression / M. I. Kusainov, V. A. Vasiliev // Sequential Analysis: Design Methods and Applications. — 2015. — Vol. 34, № 2. — P. 211-234. — 1,3 / 0,65 п.л. — DOI: 10.1080/07474946.2015.1030977

2. Kusainov M. I. On optimal adaptive prediction of multivariate ARMA(1,1) process / M. I. Kusainov // Вестник Томского государственного университета. Управление, вычислительная техника и информатика. — 2015. — № 1 (30). — С. 44-57. — 0,7 п.л.

3. Kusainov M. I. Risk efficiency of adaptive one-step prediction of autoregression with parameter drift / M. I. Kusainov // Вестник Томского государственного университета. Управление, вычислительная техника и информатика. — 2015. — № 3 (32). — С. 33-43. — 0,6 п.л.

Публикации в других научных изданиях:

4. Васильев В. А. Асимптотическая риск-эффективность одношаговых прогнозов устойчивого процесса АР(1) [Электронный ресурс] / В. А. Васильев, М. И. Кусаинов // XII Всероссийское совещание по проблемам управления ВСПУ-2014 : труды. Москва, 16-19 июня 2014 г. — Москва, 2014. — С. 2619-2627. — URL: http://vspu2014.ipu.ru/proceedings/vspu2014.zip (дата обращения: 02.09.2015). — 0,5 / 0,25 п.л.

5. Кусаинов М. И. Адаптивное прогнозирование процесса АРСС [Электронный ресурс] / М. И. Кусаинов // Интеллектуальные системы, управление и мехатроника – 2015 : материалы международной научно-технической конференции. — Севастополь, 13-15 мая 2015 г. — С. 57-62. — 1 электрон. опт. диск (CD-R). — 0,3 п.л.

6. Кусаинов М. И. Адаптивное прогнозирование для процесса авторегрессии со случайным параметром / М. И. Кусаинов // Естественные и математические науки в современном мире : сборник статей по материалам XXXII международной научно-практической конференции. Новосибирск, 01 июля 2015 г. — Новосибирск, 2015. — Т. 31, № 7. — С. 21-29. — 0,4 п.л.

Подписано в печать 19.10.2015 г.
Формат А4/2. Ризография
Печ. л. 1,0. Тираж 120 экз. Заказ № 33-10/15
Отпечатано в ООО «Позитив-НБ»
634050 г. Томск, пр. Ленина 34а