УДК 515.122.532

Я.С. Гриншпон

ЛОКАЛЬНО КРЕСТОВЫЕ МНОЖЕСТВА В ТОПОЛОГИЯХ РАЗДЕЛЬНОЙ НЕПРЕРЫВНОСТИ

Исследуются топологии раздельной непрерывности с помощью понятий локально крестового и сильно локально крестового множеств. Доказаны критерии компактности, счетной компактности, секвенциальной компактности, псевдокомпактности, линделефовости и полноты по Чеху пространств с такими топологиями. Результаты данной статьи обобщают работу [1].

Пусть X и Y – вполне регулярные топологические пространства. На их декартовом произведении $X\times Y$ наряду с пространством со стандартной тихоновской топологией, которое мы также будем обозначать через $X\times Y$, будем рассматривать пространство $X\otimes Y$ с топологией раздельной непрерывности [2] и пространство $X\tilde{\otimes}Y$ с вполне регулярной топологией раздельной непрерывности [3].

Топологии раздельной непрерывности удовлетворяют следующим условиям:

- для любого пространства Z отображение $f: X\times Y\to Z$ раздельно непрерывно тогда и только тогда, когда $f: X\otimes Y\to Z$ непрерывно;

- пространство $X\tilde{\otimes}Y$ вполне регулярно, и для любого вполне регулярного пространства Z отображение $f: X\times Y\to Z$ раздельно непрерывно тогда и только тогда, когда $f: X\tilde{\otimes}Y\to Z$ непрерывно.

В топологии пространства $X\otimes Y$ известно описание открытых множеств: $G\subset X\otimes Y$ – открыто тогда и только тогда, когда для каждых $a\in X$ и $b\in Y$ сечения $G_a=\{y\in Y;(a,y)\in G\}$ и $G^b=\{x\in X;(x,b)\in G\}$ открыты в пространствах Y и X соответственно.

Отметим также, что если каждое сечение множества $F\subset X\times Y$ замкнуто и дискретно в пространствах X и Y, то само множество F замкнуто и дискретно в пространстве $X\otimes Y$. Если, кроме того, пространство $X\times Y$ наследственно нормально и F замкнуто в $X\times Y$, то F будет дискретным и в пространстве $X\tilde{\otimes}Y$.

Пусть теперь E – некоторое подмножество множества $X\times Y$. Тогда на множестве E можно рассматривать три топологических пространства:

- пространство $E_{X\otimes Y}$ с топологией, наследуемой из пространства $X\otimes Y$;

- пространство $E_{X\tilde{\otimes}Y}$ с топологией, наследуемой из пространства $X\tilde{\otimes}Y$;

- пространство $E_{X\times Y}$ с топологией, наследуемой из пространства $X\times Y$.

Из соотношений между топологиями раздельной непрерывности и тихоновской топологией произведения очевидным образом вытекает, что топология пространства $E_{X\otimes Y}$ сильнее топологии пространства $E_{X\tilde{\otimes}Y}$, которая, в свою очередь, сильнее топологии пространства $E_{X\times Y}$.

ЛОКАЛЬНО КРЕСТОВЫЕ И СИЛЬНО ЛОКАЛЬНО КРЕСТОВЫЕ МНОЖЕСТВА

Для описания свойств топологий, индуцированных топологиями раздельной непрерывности, удобно ввести классы локально крестовых и сильно локально крестовых подмножеств произведения двух топологических пространств.

Определение. Пусть $a\in X$ и $b\in Y$. Тогда крестом точки (a, b) называется множество

$$\mathrm{cross}(a,b)=\{(a,y);y\in Y\}\cup\{(x,b);x\in X\}.$$

Более общее понятие креста множества, лежащего в произвольном конечном произведении множеств, было введено в [4].

Определение. Пусть X и Y – топологические пространства, $E\subset X\times Y$. Тогда множество E называется локально крестовым в $X\times Y$, если у каждой точки $(a,b)\in E$ существует окрестность U в пространстве $E_{X\times Y}$ такая, что $U\subset \mathrm{cross}(a,b)$.

Определение. Пусть X и Y – топологические пространства, $E\subset X\times Y$. Тогда множество E называется сильно локально крестовым в $X\times Y$, если у каждой точки $(a,b)\in X\times Y$ существует окрестность U в пространстве $X\times Y$ такая, что $U\cap E\subset \mathrm{cross}(a,b)$.

Из этих определений видно, что, например, множество $\left\{\left(\frac{1}{n},\frac{1}{n}\right);n\in\mathbf{N}\right\}$ является локально крестовым, но не является сильно локально крестовым в $\mathbf{R}\times\mathbf{R}$.

Отметим некоторые простые свойства локально крестовых и сильно локально крестовых множеств:

a) если E – сильно локально крестовое в $X\times Y$, то E – локально крестовое в $X\times Y$;

b) если E – локально крестовое и замкнутое в $X\times Y$, то E – сильно локально крестовое;

c) если $E\subset(X_1\times Y_1)\cap(X_2\times Y_2)$ и E – локально крестовое в $X_1\times Y_1$, то E является локально крестовым и в $X_2\times Y_2$;

d) если $E_1\subset E_2$ и E_2 – (сильно) локально крестовое в $X\times Y$, то E_1 – также (сильно) локально крестовое в $X\times Y$;

e) если $E_1,E_2,\dots E_n$ – (сильно) локально крестовые в $X\times Y$, то $\bigcup_{k=1}^{n}E_k$ – (сильно) локально крестовое в $X\times Y$;

f) если $X\times Y$ – (сильно) локально крестовое в $X\times Y$, то либо X, либо Y является дискретным пространством.

Свойство «c» показывает корректность употребления понятия локально крестового множества E без указания пространств X и Y, подмножеством произведения которых является E. В частности, если $X_1\subset X$, $Y_1\subset Y$ и $E\subset X_1\times Y_1$, то E – локально крестовое в $X_1\times Y_1$ тогда и только тогда, когда E – локально крестовое в $X\times Y$. Для сильно локально крестовых множеств это не так. Действительно, множество $\left\{\left(\frac{1}{n},\frac{1}{n}\right);n\in\mathbf{N}\right\}$ не является сильно локально крестовым в $\mathbf{R}\times\mathbf{R}$, но является сильно локально крестовым в $(\mathbf{R}\setminus\{0\})\times\mathbf{R}$.

Предложение 1. Пусть X и Y – вполне регулярные пространства, $E \subset X \times Y$ – локально крестовое множество. Тогда $E_{X \otimes Y} = E_{X \tilde{\otimes} Y} = E_{X \times Y}$.

Доказательство. Достаточно показать, что топология пространства $E_{X \otimes Y}$ слабее топологии пространства $E_{X \times Y}$. Пусть $(a,b) \in E$ и V – произвольная окрестность точки (a,b) в пространстве $E_{X \otimes Y}$. Тогда $V = \tilde{V} \cap E$ и множества $\tilde{V}_a = \{y \in Y; (a,y) \in \tilde{V}\}$ и $\tilde{V}^b = \{x \in X; (x,b) \in \tilde{V}\}$ открыты в пространствах Y и X соответственно. Так как E – локально крестовое, то существует окрестность U в пространстве $E_{X \times Y}$ такая, что $U \subset \operatorname{cross}(a,b)$. Множество $\left(\tilde{V}^b \times \tilde{V}_a\right) \cap U$ является окрестностью точки (a,b) в пространстве $E_{X \otimes Y}$. Покажем, что $\left(\tilde{V}^b \times \tilde{V}_a\right) \cap U \subset V$.

Пусть $(c,d) \in \left(\tilde{V}^b \times \tilde{V}_a\right) \cap U$. Тогда

$$(c,d) \in U \subset \operatorname{cross}(a,b)$$

и $c = a$ или $d = b$. Если $c = a$, то

$$(c,d) = (a,d) \in \left(\{a\} \times \tilde{V}_a\right) \cap E \subset V.$$

Если же $d = b$, то

$$(c,d) = (c,b) \in \left(\tilde{V}^b \times \{b\}\right) \cap E \subset V. \ \square$$

Теорема 2. Пусть X и Y – вполне регулярные пространства, $E \subset X \times Y$ и $E_{X \times Y}$ – пространство Фреше – Урысона. Тогда следующие условия эквивалентны:

1) $E_{X \otimes Y} = E_{X \tilde{\otimes} Y} = E_{X \times Y}$;

2) $E_{X \otimes Y} = E_{X \times Y}$;

3) E – локально крестовое множество.

Доказательство. Эквивалентность $1) \Leftrightarrow 2)$ очевидна.

Пусть выполнено условие п.2. Предположим, что найдется точка $(a,b) \in E$ такая, что $U \setminus \operatorname{cross}(a,b) \neq \varnothing$ для любой окрестности U в пространстве $E_{X \times Y}$. Тогда (a,b) – предельная для $E \setminus \operatorname{cross}(a,b)$ в пространстве $E_{X \times Y}$. Следовательно, существует последовательность $\{(a_n,b_n)\}_{n \in \mathbf{N}} \subset E \setminus \operatorname{cross}(a,b)$, сходящаяся к точке (a,b). Однако в пространстве $E_{X \otimes Y}$ множество $\{(a_n,b_n); n \in \mathbf{N}\}$ замкнуто, так как каждое его сечение конечно. Получили, что $E_{X \otimes Y} \neq E_{X \times Y}$.

Импликация $3) \Rightarrow 1)$ доказана в предложении 1. $\square$

Приведем пример, показывающий, что в общем случае теорема неверна. Для этого напомним определение одноточечной линделефикации дискретного пространства.

Определение. Одноточечной линделефикацией дискретного пространства X называется пространство $X \cup \{y\}$ такое, что все точки $x \in X$ изолированы, а окрестностью точки y является любое множество вида $\{y\} \cup U$, для которого выполняется условие, что множество $X \setminus U$ не более чем счетно.

Пример 3. Пусть X – произвольное несчетное дискретное пространство, $Y = X \cup \{y\}$ – одноточечная линделефикация пространства X и $\alpha\mathbf{N} = \{1; 2; \ldots; \infty\}$ – одноточечная компактификация множества натуральных чисел. По свойству «f» множество $a\mathbf{N} \times Y$ не является локально крестовым в $a\mathbf{N} \times Y$. Покажем, что тем не менее $a\mathbf{N} \otimes Y = a\mathbf{N} \times Y$.

Очевидно, что семейства окрестностей для точек, отличных от точки (∞, y), совпадают в пространствах $a\mathbf{N} \times Y$ и $a\mathbf{N} \otimes Y$. Пусть U – произвольная окрестность точки (∞, y) в пространстве $a\mathbf{N} \otimes Y$. Множества $U_n = \{x \in Y; (n,x) \in U\}$ открыты в Y, и значит, если $n \in U^y = \{n \in \alpha\mathbf{N}; (n,y) \in U\}$, то $Y \setminus U_n$ не более чем счетно. Следовательно, множество $V = U^y \times \left(\bigcap_{n \in U^y} U_n\right)$ открыто в $a\mathbf{N} \times Y$, $(\infty, y) \in V$ и $V \subset U$. Таким образом, топология пространства $a\mathbf{N} \times Y$ сильнее топологии пространства $a\mathbf{N} \otimes Y$. Обратное же включение выполняется всегда: топологии раздельной непрерывности сильнее стандартной топологии произведения. $\square$

Предложение 4. Пусть X и Y – вполне регулярные пространства, E – сильно локально крестовое в $X \times Y$ множество. Тогда $\overline{E}^{X \otimes Y} = \overline{E}^{X \tilde{\otimes} Y} = \overline{E}^{X \times Y}$.

Предложение 4 позволяет говорить о замкнутых сильно локально крестовых множествах E в $X \times Y$, не уточняя, в какой из топологий раздельной непрерывности или стандартной топологии произведения рассматривается данное множество.

Теорема 5. Пусть X и Y – вполне регулярные пространства, $E \subset X \times Y$ и $X \times Y$ – пространство Фреше – Урысона. Тогда следующие условия эквивалентны:

1) $\overline{E}^{X \otimes Y} = \overline{E}^{X \tilde{\otimes} Y} = \overline{E}^{X \times Y}$;

2) $\overline{E}^{X \otimes Y} = \overline{E}^{X \times Y}$;

3) E – сильно локально крестовое множество.

Доказательства предложения 4 и теоремы 5 аналогичны доказательствам предложения 1 и теоремы 2 соответственно. $\square$

СВОЙСТВА ТИПА КОМПАКТНОСТИ

Пусть E – некоторое подмножество множества $X \times Y$. Для множества E можно ставить вопрос о его компактности, счетной компактности, секвенциальной компактности и псевдокомпактности в трех топологиях: $E_{X \times Y}$, $E_{X \otimes Y}$ и $E_{X \tilde{\otimes} Y}$. Любое компактное, счетно компактное, секвенциальнно компактное или псевдокомпактное множество в $X \otimes Y$ будет обладать этим же свойством в $X \tilde{\otimes} Y$, а любое компактное, счетно компактное, секвенциально компактное или псевдокомпактное множество в $X \tilde{\otimes} Y$ будет обладать таким же свойством и в $X \times Y$. Напомним, что компактные, счетно компактные и секвенциально компактные пространства всегда являются псевдокомпактами и в нормальных пространствах понятия счетной компактности и псевдокомпактности эквивалентны.

Докажем критерий, связывающий понятия компактности (счетной компактности, секвенциальной компактности, псевдокомпактности) во всех трех рассматриваемых топологиях произведения пространств.

Теорема 6. Пусть X и Y – вполне регулярные пространства, $E \subset X \times Y$ и $E_{X \times Y}$ – наследственно нормальное пространство. Тогда следующие условия эквивалентны:

1) $E_{X\otimes Y}$ – компактное (счетно компактное, секвенциально компактное, псевдокомпактное) пространство;

2) $E_{X\tilde{\otimes} Y}$ – компактное (счетно компактное, секвенциально компактное, псевдокомпактное) пространство;

3) $E_{X\times Y}$ – компактное (счетно компактное, секвенциально компактное, псевдокомпактное) пространство, E – сильно локально крестовое множество в $X\times Y$;

4) $E_{X\times Y}$ – компактное (счетно компактное, секвенциально компактное, псевдокомпактное) пространство, E – локально крестовое множество в $X\times Y$;

5) $E_{X\times Y}$ – компактное (счетно компактное, секвенциально компактное, псевдокомпактное) пространство, и существует конечный набор точек $\{(c_1,d_1),(c_2,d_2),\dots,(c_n,d_n)\}\subset E$ такой, что

$$E\subset\bigcup_{k=1}^{n}\operatorname{cross}(c_k,d_k);$$

6) $E_{X\times Y}$ представимо в виде конечного объединения пространств, гомеоморфных компактным (счетно компактным, секвенциально компактным, псевдокомпактным) подпространствам пространств X и Y.

Доказательство. Очевидно, что п.1 влечет п.2 и что для доказательства импликации 2)⇒3) достаточно показать, что любое компактное (счетно компактное, секвенциально компактное, псевдокомпактное) множество в $X\tilde{\otimes} Y$ является сильно локально крестовым. Предположим, что $E_{X\tilde{\otimes} Y}$ – компактно (счетно компактно, секвенциально компактно, псевдокомпактно) и что существует точка $(a_0,b_0)\in X\times Y$ такая, что для всякой ее окрестности U в пространстве $X\times Y$ множество $U\cap E\setminus\operatorname{cross}(a_0,b_0)$ непусто.

Пусть U^X и U^Y – произвольные окрестности точек a_0 и b_0 в пространствах X и Y соответственно. Тогда существует точка

$$(a_1,b_1)\in E\cap\left(U^X\times U^Y\right)\setminus\operatorname{cross}(a_0,b_0).$$

В силу регулярности найдутся окрестности U_1^X, U_1^Y, V_1^X и V_1^Y точек a_0, b_0, a_1 и b_1 соответственно и точка (a_2,b_2) такие, что

$$U_1^X\subset U^X,\ U_1^Y\subset U^Y,\ U_1^X\cap V_1^X=\varnothing,\ U_1^Y\cap V_1^Y=\varnothing$$
$$\text{и } (a_2,b_2)\in E\cap\left(U_1^X\times U_1^Y\right)\setminus\operatorname{cross}(a_0,b_0).$$

Продолжая данное построение по индукции, получим последовательность $\{(a_n,b_n)\}_{n\in\mathbf{N}}$. Обозначим через D множество предельных точек этой последовательности в пространстве $X\times Y$.

Заметим, что функция

$$f:\{(a_n,b_n);n\in\mathbf{N}\}\cup\left(E\cap\overline{\bigcup_{d\in D}\operatorname{cross}d}\setminus D\right)\to\mathbf{R},$$

задаваемая по правилу $f(a_n,b_n)=n$ и $f\left(\overline{\bigcup_{d\in D}\operatorname{cross}d}\right)=\{0\}$, непрерывна, причем ее область определения замкнута в нормальном пространстве $E_{X\times Y}\setminus D$. По теореме Титце – Урысона ее можно продолжить до непрерывной функции $g:E_{X\times Y}\setminus D\to\mathbf{R}$. Продолжим теперь функцию g на все множество E, положив $g(D)=\{0\}$. Тогда g раздельно непрерывна и, следовательно, непрерывна относительно топологии пространства $E_{X\tilde{\otimes} Y}$. Таким образом, на $E_{X\tilde{\otimes} Y}$ существует непрерывная неограниченная функция. Противоречие.

Импликация 3)⇒4) вытекает из свойства «a» локально крестовых множеств.

Покажем теперь, что из п.4 следует п.5, построив требуемый набор точек $\left\{(c_k,d_k);k=\overline{1,n}\right\}$. Точку (c_1,d_1) выберем произвольно. Если $E\subset\operatorname{cross}(c_1,d_1)$, то построение закончим. В противном случае, выберем точку $(c_2,d_2)\in E\setminus\operatorname{cross}(c_1,d_1)$. Если предположить, что этот процесс продолжается до бесконечности, то получаем счетное множество $\{(c_k,d_k);k\in\mathbf{N}\}\subset E$, замыкание которого по свойству «b» является дискретным. А это противоречит условию п.4 теоремы.

Для доказательства импликации 4)⇒5) обозначим $E_{2k-1}=E\cap\{(x,d_k);x\in X\}$ и $E_{2k}=E\cap\{(c_k,y);y\in Y\}$, где $\left\{(c_k,d_k);k=\overline{1,n}\right\}$ – конечный набор точек из п.4. Тогда $E=\bigcup_{k=1}^{2n}E_k$. Пространства $\{(x,d_k);x\in X\}$ и $\{(c_k,y);y\in Y\}$ гомеоморфны пространствам X и Y, а множества E_k компактны (счетно компактны, секвенциально компактны, псевдокомпактны) в этих пространствах, как замкнутые подмножества множества E в нормальном пространстве $E_{X\times Y}$.

Чтобы доказать оставшуюся импликацию 5)⇒1), надо заметить, что топология, индуцируемая на множества E_k топологиями пространств $X\times Y$ и $X\otimes Y$, одинакова. Следовательно, $E_{X\otimes Y}$, являющееся конечным объединением компактных (счетно компактных, секвенциально компактных, псевдокомпактных) множеств, обладает соответствующим свойством типа компактности. □

Следствие 7. Пусть X и Y – вполне регулярные пространства такие, что пространство $X\times Y$ является наследственно нормальным. Тогда следующие условия эквивалентны:

1) $X\otimes Y$ – компактное (счетно компактное, секвенциально компактное, псевдокомпактное) пространство;

2) $X\tilde{\otimes} Y$ – компактное (счетно компактное, секвенциально компактное, псевдокомпактное) пространство;

3) одно из пространств X или Y является конечным, а второе – компактным (счетно компактным, секвенциально компактным, псевдокомпактным).

Доказательство. Импликации 1) ⇒ 2) и 3) ⇒ 1) очевидны. Докажем, что п.2 влечет п.3. Действительно, из теоремы 6 и свойства «f» видно, что X или Y является дискретным, а любое дискретное компактное (счетно компактное, секвенциально компактное, псевдокомпактное) пространство является конечным. □

Следствие 8. Пусть X – вполне регулярное пространство, такое, что пространство $X \times X$ является наследственно нормальным. Тогда следующие условия эквивалентны:

1) $X \otimes X$ – компактное (счетно компактное, секвенциально компактное, псевдокомпактное) пространство;

2) $X \tilde{\otimes} X$ – компактное (счетно компактное, секвенциально компактное, псевдокомпактное) пространство;

3) пространство X является конечным.

Следствие 9. Пусть X и Y – метрические пространства, $E \subset X \times Y$. Тогда следующие условия эквивалентны:

1) E – компактное множество в $X \otimes Y$;

2) E – счетно компактное множество в $X \otimes Y$;

3) E – секвенциально компактное множество в $X \otimes Y$;

4) E – псевдокомпактное множество в $X \otimes Y$;

5) E – компактное множество в $X \tilde{\otimes} Y$;

6) E – счетно компактное множество в $X \tilde{\otimes} Y$;

7) E – секвенциально компактное множество в $X \tilde{\otimes} Y$;

8) E – псевдокомпактное множество в $X \tilde{\otimes} Y$.

Доказательство непосредственно вытекает из теоремы 6 и из того факта, что все понятия типа компактности совпадают в случае метрических пространств. □

Известно, что понятия типа компактности эквивалентны в метрических пространствах. Следствие 9 дает примеры нерегулярных пространств (в частности, $\mathbf{R} \otimes \mathbf{R}$) и вполне регулярных ненормальных пространств (в частности, $\mathbf{R} \tilde{\otimes} \mathbf{R}$), для которых совпадают все понятия типа компактности.

Следствие 10. Пусть $E \subset \mathbf{R} \times \mathbf{R}$. Тогда следующие условия эквивалентны:

1) $E_{\mathbf{R} \otimes \mathbf{R}}$ – компактное (счетно компактное, секвенциально компактное, псевдокомпактное) пространство;

2) $E_{\mathbf{R} \tilde{\otimes} \mathbf{R}}$ – компактное (счетно компактное, секвенциально компактное, псевдокомпактное) пространство;

3) E – сильно локально крестовое ограниченное замкнутое множество в $\mathbf{R} \times \mathbf{R}$.

Доказательство непосредственно вытекает из теоремы 6 и критерия компактности в $\mathbf{R}^n$. □

Отметим, что в формулировке условия п.3 следствия 10 нет указания на топологию, в которой рассматривается множество E. Это стало возможным благодаря доказанной в предложении 4 независимости замыкания сильно локально крестового множества от топологии.

Если пространства X и Y – хаусдорфовые и не вполне регулярные, то на их декартовом произведении естественно рассматривать только одну не вполне регулярную топологию раздельной непрерывности $X \otimes Y$ (топология этого пространства часто не является даже регулярной, см. например, [3, 5]).

Теорема 11. Пусть X и Y – хаусдорфовы пространства и $E \subset X \times Y$. Тогда следующие условия эквивалентны:

1) $E_{X \otimes Y}$ – компактное (счетно компактное, секвенциально компактное) пространство;

2) $E_{X \times Y}$ – компактное (счетно компактное, секвенциально компактное) пространство, и E – сильно локально крестовое множество в $X \times Y$;

3) $E_{X \times Y}$ – компактное (счетно компактное, секвенциально компактное) пространство, и E – локально крестовое множество в $X \times Y$;

4) $E_{X \times Y}$ – компактное (счетно компактное, секвенциально компактное) пространство, и существует конечный набор точек $\{(c_1, d_1), (c_2, d_2), \ldots, (c_n, d_n)\} \subset E$ такой, что $E \subset \bigcup_{k=1}^{n} \mathrm{cross}(c_k, d_k)$;

5) $E_{X \times Y}$ представимо в виде конечного объединения компактных (счетно компактных, секвенциально компактных) подпространств пространств X и Y.

Доказательство. Для доказательства импликации 1)⇒2), заметим, что построенное в доказательстве теоремы 6 множество $\{(a_n, b_n); n \in \mathbf{N}\}$ является замкнутым и дискретным в $X \otimes Y$, так как все его сечения содержат не более одной точки. Остальные импликации доказываются так же, как и в теореме 6. □

Следствие 12. Пусть X и Y – хаусдорфовы пространства. Тогда следующие условия эквивалентны:

1) $X \otimes Y$ – компактное (счетно компактное, секвенциально компактное) пространство;

2) одно из пространств X или Y является конечным, а второе – компактным (счетно компактным, секвенциально компактным).

Доказательство аналогично доказательству следствия 7. □

Следствие 13. Пусть X – хаусдорфово пространство. Тогда следующие условия эквивалентны:

1) $X \otimes X$ – компактное (счетно компактное, секвенциально компактное) пространство;

2) пространство X является конечным.

ФИНАЛЬНАЯ КОМПАКТНОСТЬ И ЛИНДЕЛЕФОВОСТЬ

Финальная компактность так же, как и свойства типа компактности, сохраняется при ослаблении топологии, поэтому любое финально компактное множество в пространстве $X \otimes Y$ будет финально компактным и в пространстве $X \tilde{\otimes} Y$, а любое финально компактное множество в $X \tilde{\otimes} Y$ – финально компактно и в $X \times Y$. Для характеризации финальной компактности пространств вида $E_{X \otimes Y}$ и $E_{X \tilde{\otimes} Y}$ более удобными оказались не понятия локальной крестовости и сильной локальной крестовости, а свойства, аналогичные условию п.5 теоремы 6 и условию п.4 теоремы 11.

Теорема 14. Пусть X и Y – хаусдорфовы пространства и $E \subset X \times Y$. Тогда следующие условия эквивалентны:

1) $E_{X\otimes Y}$ – финально компактное пространство;

2) $E_{X\times Y}$ – финально компактное пространство, и существует счетный набор точек $\{(c_n, d_n); n\in \mathbf{N}\}\subset E$ такой, что $E\subset \bigcup_{n=1}^{\infty}\operatorname{cross}(c_n, d_n)$;

3) $E_{X\times Y}$ представимо в виде счетного объединения пространств, гомеоморфных финально компактным подпространствам пространств X и Y.

Доказательство. Предположим, что $E_{X\otimes Y}$ – финально компактное пространство, но счетного набора точек, кресты которых покрывают E, не существует. Построим по индукции набор точек $(c_\alpha, d_\alpha)\in E$, где $\alpha<\omega_1$. Точку (c_1, d_1) выберем произвольно во множестве E, а точки (c_α, d_α) будем выбирать во множестве $E\setminus \bigcup_{\beta<\alpha}\operatorname{cross}(c_\beta, d_\beta)$. Каждое сечение множества $\{(c_\alpha, d_\alpha); \alpha<\omega_1\}$ состоит не более чем из одной точки, значит, оно замкнуто и дискретно в пространстве $E_{X\otimes Y}$. А это противоречит финальной компактности.

Доказательство импликаций 2)⇒3) и 3)⇒1) аналогично доказательству импликаций 5)⇒6) и 6)⇒1) теоремы 6. □

Следствие 15. Пусть X и Y – хаусдорфовы пространства. Тогда следующие условия эквивалентны:

1) $X\otimes Y$ – финально компактное пространство;

2) одно из пространств X или Y является счетным, а второе – финально компактным.

Следствие 16. Пусть X – хаусдорфово пространство. Тогда следующие условия эквивалентны:

1) $X\otimes X$ – финально компактное пространство;

2) пространство X является счетным.

Регулярные финально компактные пространства называют линделефовыми. Поэтому в случае пространства $E_{X\tilde{\otimes}Y}$ следует ставить вопрос о его линделефовости. Будет ли верна в этом случае теорема, аналогичная теореме 14, автору неизвестно. Доказан только более слабый результат, аналогичный следствию 15.

Определение. Пусть X и Y – топологические пространства. Будем говорить, что пространство X равномощно отображается в пространство Y, если существует непрерывное отображение $\psi: X\to Y$ такое, что множества X и $\psi(X)$ имеют одинаковую мощность.

Теорема 17. Пусть X и Y – вполне регулярные пространства такие, что X равномощно отображается в Y и пространство $X\times Y$ является наследственно нормальным. Тогда следующие условия эквивалентны:

1) $X\otimes Y$ – финально компактное пространство;

2) $X\tilde{\otimes} Y$ – линделефово пространство;

3) X – счетное и Y – линделефово пространства.

Доказательство. Импликации 1)⇒2) и 3)⇒1) очевидны. Докажем, что из п.2 следует п.3. Пусть $X\tilde{\otimes} Y$ – линделефово. Тогда пространства X и Y, как замкнутые подпространства пространства $X\tilde{\otimes} Y$, также линделефовы.

Предположим, что X – несчетно, и пусть $\psi: X\to Y$ – непрерывное отображение, такое, что множества X и $\psi(X)$ равномощны. Для каждого $b\in\psi(X)$ обозначим $D_b=\{(x,b); x\in X \text{ и } \psi(x)=b\}$. Так как множества $\{(x,\psi(x)); x\in X\}\setminus D_b$ и $\bigcup_{d\in D_b}\operatorname{cross} d\setminus D_b$ замкнуты и не пересекаются в нормальном пространстве $(X\times Y)\setminus D_b$, то существует непрерывная функция $f_b:(X\times Y)\setminus D_b\to \mathbf{R}$ такая, что $f_b(\{(x,\psi(x); x\in X\})=\{1\}$ и $f_b\left(\bigcup_{d\in D_b}\operatorname{cross} d\right)=\{0\}$.

Продолжим теперь функцию f_b на все множество $X\times Y$, положив $f_b(D_b)=\{0\}$. Тогда f_b раздельно непрерывна и, следовательно, непрерывна относительно топологии пространства $X\tilde{\otimes} Y$. Получили, что в $X\tilde{\otimes} Y$ существует несчетное открытое покрытие $\left\{f_b^{-1}(-1,\ 1)\right\}_{b\in\psi(X)}$ замкнутого подмножества $\{(x,\psi(x)); x\in X\}$, из которого, очевидно, нельзя извлечь счетное подпокрытие. Это противоречит условию п.2. □

Следствие 18. Пусть X – вполне регулярное пространство, такое, что пространство $X\times X$ является наследственно нормальным. Тогда следующие условия эквивалентны:

1) $X\otimes X$ – финально компактное пространство;

2) $X\tilde{\otimes} X$ – линделефово пространство;

3) X – счетное пространство.

ПОЛНОТА ПО ЧЕХУ

Понятие полноты по Чеху определяется только для вполне регулярных топологий, поэтому мы будем рассматривать пространства вида $E_{X\tilde{\otimes}Y}$, для исследования которых будем пользоваться известным критерием 19 и новым понятием локально раздельно крестового множества.

Определение. Пусть Γ – семейство подмножеств множества X и $F\subset X$. Тогда F называется Γ-малым, если найдется элемент $G\in\Gamma$ такой, что $F\subset G$.

Теорема 19. Вполне регулярное пространство X полно по Чеху тогда и только тогда, когда существует счетное семейство $\{\Gamma_n\}_{n\in\mathbf{N}}$ открытых покрытий пространства X со свойством: если Φ – центрированное семейство замкнутых множеств таких, что для каждого натурального n в Φ существует Γ_n-малое множество, то пересечение семейства Φ не пусто.

Определение. Пусть X и Y – вполне регулярные пространства, $E\subset X\times Y$. Тогда множество E называется локально раздельно крестовым в $X\times Y$, если у каждой точки $(a,b)\in E$ существует окрестность U в пространстве $E_{X\tilde{\otimes}Y}$ такая, что $U\subset\operatorname{cross}(a,b)$.

Предложение 20. Пусть X и Y – вполне регулярные пространства, $E\subset X\times Y$, $E_{X\times Y}$ – наследственно нормальное и $E_{X\tilde{\otimes}Y}$ – полное по Чеху пространства. Тогда E – локально раздельно крестовое множество в $X\times Y$.

Доказательство. Предположим, что E не является локально раздельно крестовым и существует точка $(a_0,b_0)\in E$ такая, что для всякой ее окрестности U в пространстве $E_{X\tilde{\otimes}Y}$ множество $U\setminus\operatorname{cross}(a_0,b_0)$ не пусто. Так как $E_{X\tilde{\otimes}Y}$ полно по Чеху, то существует счетное семейство $\{\Gamma_n\}_{n\in\mathbf{N}}$ открытых покрытий пространства $E_{X\tilde{\otimes}Y}$ из критерия 19.

Пусть $(a_0,b_0)\in G_1\in\Gamma_1$, и U^X и U^Y – произвольные окрестности точек a_0 и b_0 в пространствах X и Y соответственно. Тогда существует точка $(a_1,b_1)\in(U^X\times U^Y)\cap G_1\setminus\operatorname{cross}(a_0,b_0)$. В силу регулярности найдутся окрестности U_1^X, U_1^Y, V_1^X и V_1^Y точек a_0, b_0, a_1 и b_1 соответственно, множество $G_2\in\Gamma_2$ и точка (a_2,b_2) такие, что

$$U_1^X\subset U^X,\ U_1^Y\subset U^Y,\ U_1^X\cap V_1^X=\varnothing,\ U_1^Y\cap V_1^Y=\varnothing$$

$$\text{и } (a_2,b_2)\in\left(U_1^X\times U_1^Y\right)\cap G_1\cap G_2\setminus\operatorname{cross}(a_0,b_0).$$

Продолжая данное построение по индукции, получим последовательность $\{(a_n,b_n)\}_{n\in\mathbf{N}}$. Обозначим через D множество предельных точек этой последовательности в пространстве $E_{X\times Y}$.

Заметим, что функция

$$f:\{(a_n,b_n);n\in\mathbf{N}\}\cup\left(E\cap\overline{\bigcup_{d\in D}\operatorname{cross}d}\setminus D\right)\to\mathbf{R},$$

задаваемая по правилу

$$f(a_n,b_n)=n \quad\text{и}\quad f\left(\overline{\bigcup_{d\in D}\operatorname{cross}d}\right)=\{0\},$$

непрерывна, причем ее область определения замкнута в нормальном пространстве $E_{X\times Y}\setminus D$. По теореме Титце – Урысона ее можно продолжить до непрерывной функции $g:E_{X\times Y}\setminus D\to\mathbf{R}$. Продолжим теперь функцию g на все множество E, положив $g(D)=\{0\}$. Тогда g раздельно непрерывна, и следовательно, непрерывна относительно топологии пространства $E_{X\tilde{\otimes}Y}$.

Обозначим $F_n=\{(a_n,b_n),(a_{n+1},b_{n+1}),\ldots\}$. Множества F_n замкнуты в $E_{X\tilde{\otimes}Y}$, так как точки из множества D отделены от них с помощью функции g, а точки, не принадлежащие D, не являются предельными для F_n даже в более слабой топологии пространства $E_{X\times Y}$. Кроме того, по построению каждое F_n является Γ_n-малым множеством. Значит, $\bigcap_{n=1}^{\infty}F_n\neq\varnothing$. Противоречие.

Теорема 21. Пусть X и Y – вполне регулярные пространства, такие, что пространство $X\times Y$ является наследственно нормальным. Тогда следующие условия эквивалентны:

1) $X\tilde{\otimes}Y$ – полное по Чеху пространство;

2) одно из пространств X или Y является дискретным, а второе – полным по Чеху.

Доказательство. Импликация 2)⇒1) очевидна. Пусть выполняется п.1, и предположим, что в обоих пространствах существуют неизолированные точки $a\in X$ и $b\in Y$. Рассмотрим произвольную окрестность U точки (a,b) в пространстве $X\tilde{\otimes}Y$. Так как топология пространства $X\tilde{\otimes}Y$ слабее топологии пространства $X\otimes Y$, то сечение $U^b=\{x\in X;(x,b)\in U\}$ открыто и, значит, не совпадает с точкой a. Пусть $c\in U^b\setminus\{a\}$. Аналогично, сечение $U_c=\{y\in Y;(c,y)\in U\}$ не совпадает с b, и существует элемент d, принадлежащий множеству $U_c\setminus\{b\}$. Получили, что $(c,d)\in U\setminus\operatorname{cross}(a,b)$ и множество $X\times Y$ не является локально раздельно крестовым. По предложению 20 пространство $X\tilde{\otimes}Y$ не является полным по Чеху. Противоречие.

Таким образом, одно из пространств X или Y должно быть дискретным, и так как полнота по Чеху наследуется замкнутыми множествами, то второе пространство будет полным по Чеху.

Следствие 22. Пусть X – вполне регулярное пространство, такое, что пространство $X\times X$ является наследственно нормальным. Тогда следующие условия эквивалентны:

1) $X\tilde{\otimes}X$ – полное по Чеху пространство;

2) пространство X является дискретным.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Гриншпон Я.С.* Компактность в топологиях раздельной непрерывности // Междунар. конф. по математике и механике: Избранные докл. Томск, 2003. С. 50 – 54.
2. *Knight C.J., Moran W., Pym J.S.* The topologies of separate continuity. I // Proceedings of Cambridge Philosophy Society. 1970. No. 68. P. 663 – 671.
3. *Knight C.J., Moran W., Pym J.S.* The topologies of separate continuity. II // Proceedings of Cambridge Philosophy Society. 1972. No. 71. P. 307 – 319.
4. *Maslyuchenko V.K., Maslyuchenko O.V., Mykhaylyuk V.V., Sobchuk O.V.* Paracompactness and separately continuous mappings // General Topology in Banach Spaces. New York, 2001. P. 147 – 169.
5. *Hart J. E., Kunen K.* On the regularity of the topology of separate continuity// Topology and its Applications. 2002. No. 123. P. 103 – 123.

Статья представлена кафедрой теории функций механико-математического факультета Томского государственного университета, поступила в научную редакцию «Математика» 2 июня 2005 г.