

А.Н. Моисеев

**АСИМПТОТИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ СИСТЕМЫ МАССОВОГО ОБСЛУЖИВАНИЯ
MAP/GI/ ∞ С ВЫСОКОИНТЕНСИВНЫМ ВХОДЯЩИМ ПОТОКОМ**

*Результаты получены в рамках выполнения государственного задания
Министерства образования и науки Российской Федерации № 1.511.2014/К.*

Представлен анализ системы массового обслуживания с неограниченным числом приборов, входящим MAP-поток и произвольным распределением времени обслуживания. Показано, что в условиях растущей интенсивности входящего потока стационарное распределение вероятностей числа заявок в системе является асимптотически гауссовским. Получены параметры соответствующей гауссовской аппроксимации. Кроме того, получена аппроксимация более высокого (третьего) порядка, установлены области применимости обеих аппроксимаций.

Ключевые слова: система массового обслуживания; MAP-поток; неограниченное число приборов; асимптотический анализ.

Системы массового обслуживания являются адекватными моделями современных систем передачи и обработки информации [1], социально-экономических систем [2, 3], систем управления транспортными потоками [4] и т.д. В научной литературе, как правило, исследуются системы с пуассоновским входящим потоком, однако имеются исследования [5], которые показывают, что, например, потоки сообщений в современных сетях передачи данных не являются пуассоновскими, а более адекватной моделью таких потоков является так называемый MAP-поток (Markovian Arrival Process) [6–8]. Таким образом, исследование моделей массового обслуживания с входящим MAP-поток является актуальной научной проблемой.

В настоящей работе представлен анализ системы массового обслуживания с входящим MAP-поток, неограниченным числом приборов и произвольным обслуживанием, которая в нотации Кендалла [9] обозначается как MAP/GI/ ∞ . Исследование проведено в асимптотическом условии растущей интенсивности входящего потока, которое относится к классу широко используемых условий «heavy traffic» [10–12]. В результате получена гауссовская аппроксимация распределения вероятностей числа заявок в системе. Этот результат согласуется с известными результатами, связанными с диффузионной аппроксимацией [10, 13, 14], но предоставляет более удобную форму для использования. Кроме того, изложенная в настоящей работе методика исследования позволяет получить аппроксимацию более высокого порядка точности, которая обеспечивает достаточно малую погрешность и при небольшой интенсивности входящего потока.

С другими, близкими по тематике исследованиями в области анализа систем массового обслуживания и случайных потоков можно ознакомиться в работах [15–18].

1. Постановка задачи

Рассмотрим систему массового обслуживания с неограниченным числом приборов, на вход которой поступает высокоинтенсивный MAP-поток, время обслуживания заявки в системе является случайной величиной с функцией распределения $B(t)$. Входящий MAP-поток задан представлением [8] (ND_0, ND_1) , где D_0 и D_1 – квадратные матрицы порядка M , а скалярный мультипликатор N используется для того, чтобы выделить асимптотическую составляющую высокой интенсивности этого потока. Дело в том, что интенсивность MAP-потока, заданного таким образом, составляет λN , где величина λ определяется выражением

$$\lambda = \theta D_1 e. \quad (1)$$

Здесь \mathbf{e} – вектор-столбец, состоящий из единиц, $\boldsymbol{\theta}$ – вектор-строка, элементы которой задают закон стационарного распределения вероятностей цепи Маркова $m(t)$, управляющей МАР-поток. Этот вектор удовлетворяет следующей системе уравнений:

$$\begin{cases} \boldsymbol{\theta}(\mathbf{D}_0 + \mathbf{D}_1) = \mathbf{0}, \\ \boldsymbol{\theta}\mathbf{e} = 1. \end{cases} \quad (2)$$

Таким образом, интенсивность описанного потока неограниченно возрастает при $N \rightarrow \infty$. Потоки такого рода называют высокоинтенсивными [18].

Обозначим $i(t)$ – количество заявок (или, что то же самое, количество занятых приборов) в системе в момент времени t . Ставится задача нахождения распределения вероятностей процесса $i(t)$ в произвольный момент времени в стационарном режиме функционирования системы.

2. Метод динамического просеивания. Уравнения Колмогорова

Для составления уравнений Колмогорова, которые являются основным механизмом исследования случайных процессов, необходимо провести так называемую марковизацию исследуемого процесса $i(t)$, т.е. преобразовать его таким образом, чтобы полученный в результате преобразований процесс был марковским. Стандартным инструментом такой марковизации является метод дополнительных компонент [9, 19, 20]. Для рассматриваемого процесса $i(t)$ этими дополнительными компонентами будут состояние $m(t)$ цепи Маркова, управляющей входящим МАР-поток, и значения остаточного времени обслуживания для каждой заявки, находящейся в системе в момент t . Таким образом, получаем многомерный марковский процесс с переменным числом компонент.

Прямое исследование такого процесса не представляется возможным ввиду переменного и потенциально неограниченного количества его компонент. В связи с этим в настоящей работе применяется метод динамического просеивания (просеянного потока) [21], который позволяет решить указанную задачу. Основная идея этого подхода заключается в том, чтобы заменить исследование многомерного процесса с переменным числом компонент на исследование двумерного марковского процесса $\{n(t), m(t)\}$, где $n(t)$ – считающий процесс просеянного потока, который конструируется следующим образом. Зафиксируем некоторый момент времени T . Будем считать, что заявка, поступившая в систему в момент времени $t < T$, с вероятностью $S(t) = 1 - B(T-t)$ формирует событие просеянного потока, а с вероятностью $1 - S(t)$ эта заявка не рассматривается. Через $n(t)$ обозначим число событий просеянного потока, наступивших до момента времени t . Тогда, если в начальный момент времени $t_0 < T$ система свободна, получаем, что для момента времени T имеет место равенство

$$P\{i(T) = k\} = P\{n(T) = k\}$$

для любых целых $k > 0$. Таким образом, найдя распределение вероятностей значений процесса $n(t)$ в момент времени t и полагая $t = T$, в силу произвольности выбора T получим искомое стационарное распределение вероятностей процесса $i(t)$.

Для распределения вероятностей $P(n, m, t) = P\{n(t) = n, m(t) = m\}$ значений марковского процесса $\{n(t), m(t)\}$ можно составить следующую систему дифференциальных уравнений Колмогорова:

$$\frac{1}{N} \frac{\partial P(n, m, t)}{\partial t} = \sum_{l=1}^M \left[P(n, l, t) (D_0)_{lm} + P(n, l, t) (D_1)_{lm} (1 - S(t)) + P(n-1, l, t) (D_1)_{lm} S(t) \right]$$

для $n \geq 0, m = \overline{1, M}$. Для частичной характеристической функции

$$H(u, m, t) = \sum_{n=0}^{\infty} e^{jun} P(n, m, t),$$

где $j = \sqrt{-1}$, эта система переписывается в виде

$$\frac{1}{N} \frac{\partial H(u, m, t)}{\partial t} = \sum_{l=1}^M \left[H(u, l, t) (\mathbf{D}_0)_{lm} + H(u, l, t) (\mathbf{D}_1)_{lm} (1 - S(t)) + H(u, l, t) (\mathbf{D}_1)_{lm} S(t) e^{ju} \right].$$

Приводя подобные и используя обозначения $\mathbf{D} = \mathbf{D}_0 + \mathbf{D}_1$, $\mathbf{H}(u, t) = \{H(u, 1, t), \dots, H(u, M, t)\}$, получим матричное дифференциальное уравнение

$$\frac{1}{N} \frac{\partial \mathbf{H}(u, t)}{\partial t} = \mathbf{H}(u, t) [\mathbf{D} + \mathbf{D}_1 (e^{ju} - 1) S(t)] \quad (3)$$

с начальным условием

$$\mathbf{H}(u, t_0) = \mathbf{0}. \quad (4)$$

Так как прямое решение уравнения (3) не представляется возможным, для решения задачи (3)–(4) воспользуемся методом асимптотического анализа [21] в условии растущей интенсивности входящего потока, т.е. при $N \rightarrow \infty$.

3. Асимптотический анализ

3.1. Асимптотика первого порядка

Выполним в выражениях (3)–(4) следующие замены:

$$\frac{1}{N} = \varepsilon, \quad u = \varepsilon w, \quad \mathbf{H}(u, t) = \mathbf{F}_1(w, t, \varepsilon).$$

Тогда задача (3)–(4) примет вид

$$\varepsilon \frac{\partial \mathbf{F}_1(w, t, \varepsilon)}{\partial t} = \mathbf{F}_1(w, t, \varepsilon) \left[\mathbf{D} + \mathbf{D}_1 (e^{j\varepsilon w} - 1) S(t) \right], \quad (5)$$

$$\mathbf{F}_1(w, t_0, \varepsilon) = \mathbf{0}. \quad (6)$$

Относительно асимптотического решения $\mathbf{F}_1(w, t) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \mathbf{F}_1(w, t, \varepsilon)$ этой задачи имеет место следующее утверждение.

Теорема 1. Асимптотическое решение задачи (5)–(6) имеет вид

$$\mathbf{F}_1(w, t) = \mathbf{0} \exp \left\{ jw\lambda \int_{t_0}^t S(\tau) d\tau \right\}, \quad (7)$$

где $\mathbf{0}$ и λ определяются выражениями (2) и (1) соответственно.

Доказательство выполним в два этапа.

Этап 1. Положим в (5) $\varepsilon \rightarrow 0$, получим

$$\mathbf{F}_1(w, t) \mathbf{D} = \mathbf{0}.$$

Сравнивая это равенство с первым уравнением (2), можем сделать вывод, что $\mathbf{F}_1(w, t)$ может быть представлена в виде

$$\mathbf{F}_1(w, t) = \mathbf{0} \Phi_1(w, t), \quad (8)$$

где $\Phi_1(w, t)$ – некоторая скалярная функция, в силу (6) удовлетворяющая условию $\Phi_1(w, t_0) = 1$.

Этап 2. Домножим (5) на вектор \mathbf{e} , подставим (8), поделим результат на ε и выполним предельный переход $\varepsilon \rightarrow 0$. Тогда с учетом того, что $\mathbf{D}\mathbf{e} = \mathbf{0}$ и $\mathbf{0}\mathbf{e} = 1$, получим дифференциальное уравнение относительно функции $\Phi_1(w, t)$

$$\frac{\partial \Phi_1(w, t)}{\partial t} = \Phi_1(w, t) jw\lambda S(t),$$

решение которого с учетом начального условия дает

$$\Phi_1(w, t) = \exp \left\{ jw\lambda \int_{t_0}^t S(\tau) d\tau \right\}.$$

Подставляя данное выражение в (8), получаем (7). Теорема доказана.

3.2. Асимптотика второго порядка

Обозначим через $\mathbf{H}_2(u, t)$ многомерную функцию, удовлетворяющую выражению

$$\mathbf{H}(u, t) = \mathbf{H}_2(u, t) \exp \left\{ juN\lambda \int_{t_0}^t S(\tau) d\tau \right\}. \quad (9)$$

Подставляя это выражение в (3)–(4), получим следующую задачу Коши:

$$\begin{cases} \frac{1}{N} \frac{\partial \mathbf{H}_2(u, t)}{\partial t} + \mathbf{H}_2(u, t) ju\lambda S(t) = \mathbf{H}_2(u, t) \left[\mathbf{D} + \mathbf{D}_1 (e^{ju} - 1) S(t) \right], \\ \mathbf{H}_2(u, t_0) = \mathbf{0}. \end{cases} \quad (10)$$

Выполним в (10) следующие замены:

$$\frac{1}{N} = \varepsilon^2, \quad u = \varepsilon w, \quad \mathbf{H}_2(u, t) = \mathbf{F}_2(w, t, \varepsilon). \quad (11)$$

С использованием этих обозначений (10) переписывается в виде

$$\begin{cases} \varepsilon^2 \frac{\partial \mathbf{F}_2(w, t, \varepsilon)}{\partial t} + \mathbf{F}_2(w, t, \varepsilon) j\varepsilon w \lambda S(t) = \mathbf{F}_2(w, t, \varepsilon) [\mathbf{D} + \mathbf{D}_1 (e^{j\varepsilon w} - 1) S(t)], \\ \mathbf{F}_2(w, t_0, \varepsilon) = \mathbf{0}. \end{cases} \quad (12)$$

Относительно асимптотического решения $\mathbf{F}_2(w, t) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \mathbf{F}_2(w, t, \varepsilon)$ этой задачи имеет место следующее утверждение.

Теорема 2. Асимптотическое решение задачи (12) имеет вид

$$\mathbf{F}_2(w, t) = \mathbf{0} \exp \left\{ \frac{(jw)^2}{2} \left[\lambda \int_{t_0}^t S(\tau) d\tau + \kappa \int_{t_0}^t S^2(\tau) d\tau \right] \right\}, \quad (13)$$

где

$$\kappa = 2\mathbf{g}(\mathbf{D}_1 - \lambda \mathbf{I})\mathbf{e}, \quad (14)$$

а вектор-строка \mathbf{g} удовлетворяет линейному матричному уравнению

$$\mathbf{g}\mathbf{D} = \mathbf{0}(\lambda \mathbf{I} - \mathbf{D}_1), \quad (15)$$

здесь \mathbf{I} – единичная матрица.

Доказательство этой теоремы выполним в три этапа.

Этап 1. В (12) выполним предельный переход $\varepsilon \rightarrow 0$, получим следующую систему уравнений:

$$\begin{cases} \mathbf{F}_2(w, t)\mathbf{D} = \mathbf{0}, \\ \mathbf{F}_2(w, t_0) = \mathbf{0}. \end{cases}$$

Отсюда с учетом (2) следует, что $\mathbf{F}_2(w, t)$ можно записать в виде

$$\mathbf{F}_2(w, t) = \mathbf{0}\Phi_2(w, t), \quad (16)$$

где $\Phi_2(w, t)$ – некоторая скалярная функция, удовлетворяющая условию $\Phi_2(w, t_0) = 1$.

Этап 2. С учетом (16) функцию $\mathbf{F}_2(w, t, \varepsilon)$ представим в виде разложения

$$\mathbf{F}_2(w, t, \varepsilon) = \Phi_2(w, t) [\mathbf{0} + \mathbf{g} \cdot j\varepsilon w S(t)] + \mathbf{O}(\varepsilon^2), \quad (17)$$

где \mathbf{g} – некоторая вектор-строка, а $\mathbf{O}(\varepsilon^2)$ – вектор-строка, состоящая из величин порядка малости ε^2 и выше. Подставим (17) и разложение $e^{j\varepsilon w} = 1 + j\varepsilon w + \mathbf{O}(\varepsilon^2)$ в первую строку (12), получим

$$\mathbf{0} \cdot j\varepsilon w \lambda S(t) = \mathbf{0}\mathbf{D} + \mathbf{0}\mathbf{D}_1 \cdot j\varepsilon w S(t) + \mathbf{g}\mathbf{D} \cdot j\varepsilon w S(t) + \mathbf{O}(\varepsilon^2).$$

Выполняя в этом равенстве предельный переход $\varepsilon \rightarrow 0$, получаем матричное уравнение относительно вектора \mathbf{g}

$$\mathbf{g}\mathbf{D} = \mathbf{0}(\lambda \mathbf{I} - \mathbf{D}_1),$$

которое совпадает с (15).

Этап 3. Умножая обе части уравнения (12) на вектор \mathbf{e} , используя (17) и разложение

$$e^{j\varepsilon w} = 1 + j\varepsilon w + \frac{(j\varepsilon w)^2}{2} + \mathbf{O}(\varepsilon^3), \quad (18)$$

в результате несложных преобразований с учетом обозначения (14) получаем следующее дифференциальное уравнение относительно функции $\Phi_2(w, t)$:

$$\frac{\partial \Phi_2(w, t)}{\partial t} = \Phi_2(w, t) \left\{ \frac{(jw)^2}{2} [\lambda S(t) + \kappa S^2(t)] \right\}.$$

Решение этого уравнения при имеющемся начальном условии $\Phi_2(w, t_0) = 1$ дает выражение

$$\Phi_2(w, t) = \exp \left\{ \frac{(jw)^2}{2} \left[\lambda \int_{t_0}^t S(\tau) d\tau + \kappa \int_{t_0}^t S^2(\tau) d\tau \right] \right\},$$

подставляя которое в (16), получаем (13). Теорема доказана.

3.3. Гауссовская аппроксимация стационарного распределения вероятностей числа заявок в системе

Выполнив в выражении (13) замены, обратные к (11) и (9), получим следующее выражение для частичной характеристической функции $\mathbf{H}(u, t)$ числа событий, наступивших в просеянном потоке до момента времени t :

$$\mathbf{H}(u, t) = \mathbf{\theta} \exp \left\{ juN\lambda \int_{t_0}^t S(\tau) d\tau + \frac{(ju)^2}{2} \left[N\lambda \int_{t_0}^t S(\tau) d\tau + N\kappa \int_{t_0}^t S^2(\tau) d\tau \right] \right\}.$$

Умножим обе части этого равенства на e . Тогда, возвращаясь к исходному исследуемому процессу $i(t)$ числа заявок в системе, подставим $t = T$, а в качестве начального момента (когда система свободна) выберем $t_0 = -\infty$, получим следующее выражение для характеристической функции $h(u)$ числа заявок в системе в стационарном режиме:

$$h(u) = \exp \left\{ juN\lambda b + \frac{(ju)^2}{2} [N\lambda b + N\kappa\beta] \right\}, \quad (19)$$

где $b = \int_0^{\infty} (1 - B(t)) dt$ есть среднее время обслуживания, а $\beta = \int_0^{\infty} (1 - B(t))^2 dt$.

Таким образом, стационарное распределение числа заявок в системе MAP/GI/ ∞ является асимптотически гауссовским с математическим ожиданием $N\lambda b$ и дисперсией $[N\lambda b + N\kappa\beta]$.

3.4. Асимптотика третьего порядка

Применение гауссовской аппроксимации (19) достаточно удобно, однако, как будет показано в п. 4, допустимая погрешность достигается при больших значениях N (30 и больше). Для меньших значений интенсивности входящего потока можно получить более точную аппроксимацию, используя асимптотику третьего порядка.

Итак, введем функцию $\mathbf{H}_3(u, t)$, удовлетворяющую выражению

$$\mathbf{H}_2(u, t) = \mathbf{H}_3(u, t) \exp \left\{ \frac{(ju)^2}{2} \left[N\lambda \int_{t_0}^t S(\tau) d\tau + N\kappa \int_{t_0}^t S^2(\tau) d\tau \right] \right\}, \quad (20)$$

подставим (20) в (10), получим следующую задачу Коши:

$$\begin{cases} \frac{1}{N} \frac{\partial \mathbf{H}_3(u, t)}{\partial t} + \mathbf{H}_3(u, t) \left\{ ju\lambda S(t) + \frac{(ju)^2}{2} [\lambda S(t) + \kappa S^2(t)] \right\} = \mathbf{H}_3(u, t) [\mathbf{D} + \mathbf{D}_1 (e^{ju} - 1) S(t)], \\ \mathbf{H}_3(u, t_0) = \mathbf{\theta}. \end{cases} \quad (21)$$

В (21) выполним замены

$$\frac{1}{N} = \varepsilon^3, \quad u = \varepsilon w, \quad \mathbf{H}_3(u, t) = \mathbf{F}_3(w, t, \varepsilon),$$

получим

$$\begin{cases} \varepsilon^3 \frac{\partial \mathbf{F}_3(w, t, \varepsilon)}{\partial t} + \mathbf{F}_3(w, t, \varepsilon) \left\{ j\varepsilon w\lambda S(t) + \frac{(j\varepsilon w)^2}{2} [\lambda S(t) + \kappa S^2(t)] \right\} = \mathbf{F}_3(w, t, \varepsilon) [\mathbf{D} + \mathbf{D}_1 (e^{j\varepsilon w} - 1) S(t)], \\ \mathbf{F}_3(w, t_0, \varepsilon) = \mathbf{\theta}. \end{cases} \quad (22)$$

Обозначим $\mathbf{F}_3(w, t) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \mathbf{F}_3(w, t, \varepsilon)$. Тогда имеет место следующая теорема.

Теорема 3. Асимптотическое решение $\mathbf{F}_3(w, t)$ задачи (22) имеет вид

$$\mathbf{F}_3(w, t) = \mathbf{\theta} \exp \left\{ \frac{(jw)^3}{6} \left[\lambda \int_{t_0}^t S(\tau) d\tau + 3\kappa \int_{t_0}^t S^2(\tau) d\tau + \mu \int_{t_0}^t S^3(\tau) d\tau \right] \right\}, \quad (23)$$

где

$$\mu = 6\mathbf{g}_2(\mathbf{D}_1 - \lambda\mathbf{I})\mathbf{e} - 3\kappa\mathbf{g}, \quad (24)$$

\mathbf{g} определяется выражением (15), а вектор-строка \mathbf{g}_2 удовлетворяет линейному матричному уравнению

$$\mathbf{g}_2\mathbf{D} = \mathbf{0} \left[\left(\frac{\kappa}{2} - \lambda \right) \mathbf{I} - \mathbf{D}_1 \right] + \lambda\mathbf{g}. \quad (25)$$

Доказательство этой теоремы выполним в три этапа.

Этап 1. Выполним в (22) предельный переход $\varepsilon \rightarrow 0$, получим

$$\begin{cases} \mathbf{F}_3(w, t)\mathbf{D} = \mathbf{0}, \\ \mathbf{F}_3(w, t_0) = \mathbf{0}. \end{cases}$$

Отсюда с учетом (2) делаем вывод, что $\mathbf{F}_3(w, t)$ можно представить в виде

$$\mathbf{F}_3(w, t) = \mathbf{0}\Phi_3(w, t), \quad (26)$$

где $\Phi_3(w, t)$ – некоторая скалярная функция.

Этап 2. Решение задачи (22) будем искать в виде разложения

$$\mathbf{F}_3(w, t, \varepsilon) = \Phi_3(w, t) \left[\mathbf{0} + \mathbf{g}_1 \cdot j\varepsilon w S(t) + (\mathbf{g}_1 + 2\mathbf{g}_2) \frac{(j\varepsilon w)^2}{2} S^2(t) \right] + \mathbf{O}(\varepsilon^3), \quad (27)$$

где \mathbf{g}_1 и \mathbf{g}_2 – некоторые вектор-строки. Подставим разложения (27) и (18) в (22). После несложных преобразований получаем равенство

$$\begin{aligned} j\varepsilon w \lambda S(t)\mathbf{0} + \frac{(j\varepsilon w)^2}{2} \lambda S(t)\mathbf{0} + (j\varepsilon w)^2 S^2(t) \left[\frac{\kappa}{2} \mathbf{0} + \lambda \mathbf{g}_1 \right] = \\ = j\varepsilon w S(t) [\mathbf{0}\mathbf{D}_1 + \mathbf{g}_1\mathbf{D}] + \frac{(j\varepsilon w)^2}{2} S(t) [\mathbf{0}\mathbf{D}_1 + \mathbf{g}_1\mathbf{D}] + (j\varepsilon w)^2 S^2(t) [\mathbf{g}_1\mathbf{D}_1 + \mathbf{g}_2\mathbf{D}] + \mathbf{O}(\varepsilon^2). \end{aligned} \quad (28)$$

Приравнявая выражения при одинаковых степенях ε , получаем, во-первых, $\lambda\mathbf{0} = \mathbf{0}\mathbf{D}_1 + \mathbf{g}_1\mathbf{D}$, откуда следует $\mathbf{g}_1\mathbf{D} = \mathbf{0}(\lambda\mathbf{I} - \mathbf{D}_1)$, что совпадает с (15). С учетом этого вторые слагаемые левой и правой частей (28) уничтожаются, и мы получаем равенство

$$\frac{\kappa}{2} \mathbf{0} + \lambda \mathbf{g} = \mathbf{g}\mathbf{D}_1 + \mathbf{g}_2\mathbf{D},$$

откуда следует выражение (25).

Этап 3. Умножим каждую часть (22) на \mathbf{e} , тогда с использованием обозначения $f(w, t, \varepsilon) = \mathbf{F}_3(w, t, \varepsilon)\mathbf{e}$ получаем

$$\begin{cases} \varepsilon^3 \frac{\partial f(w, t, \varepsilon)}{\partial t} + f(w, t, \varepsilon) \left\{ j\varepsilon w \lambda S(t) + \frac{(j\varepsilon w)^2}{2} [\lambda S(t) + \kappa S^2(t)] \right\} = f(w, t, \varepsilon) \mathbf{D}_1 \mathbf{e} (e^{j\varepsilon w} - 1) S(t), \\ f(w, t_0, \varepsilon) = 1. \end{cases}$$

Подставляя сюда (27) и разложение

$$e^{j\varepsilon w} = 1 + j\varepsilon w + \frac{(j\varepsilon w)^2}{2} + \frac{(j\varepsilon w)^3}{6} + O(\varepsilon^4),$$

получаем

$$\begin{aligned} \varepsilon^3 \frac{\partial \Phi_3(w, t)}{\partial t} + \Phi_3(w, t) \left\{ 1 + \mathbf{g}\mathbf{e} \left[j\varepsilon w + \frac{(j\varepsilon w)^2}{2} \right] S(t) + \mathbf{g}_2 \mathbf{e} (j\varepsilon w)^2 S^2(t) \right\} \left\{ \lambda \left[j\varepsilon w + \frac{(j\varepsilon w)^2}{2} \right] S(t) + \frac{\kappa}{2} (j\varepsilon w)^2 S^2(t) \right\} = \\ = \Phi_3(w, t) \left\{ \mathbf{0} + \mathbf{g} \left[j\varepsilon w + \frac{(j\varepsilon w)^2}{2} \right] S(t) + \mathbf{g}_2 (j\varepsilon w)^2 S^2(t) \right\} \mathbf{D}_1 \mathbf{e} \left[j\varepsilon w + \frac{(j\varepsilon w)^2}{2} + \frac{(j\varepsilon w)^3}{6} \right] S(t) + O(\varepsilon^4). \end{aligned}$$

После несложных преобразований с учетом (15), (25), (14) и с использованием обозначения (24) получаем дифференциальное уравнение относительно неизвестной функции $\Phi_3(w, t)$

$$\frac{\partial \Phi_3(w, t)}{\partial t} = \Phi_3(w, t) \left\{ \frac{(jw)^3}{6} [\lambda S(t) + 3\kappa S^2(t) + \mu S^3(t)] \right\},$$

решение которого при имеющемся начальном условии $\Phi_3(w, t_0) = 1$ дает

$$\Phi_3(w, t) = \exp \left\{ \frac{(jw)^3}{6} \left[\lambda \int_{t_0}^t S(\tau) d\tau + 3\kappa \int_{t_0}^t S^2(\tau) d\tau + \mu \int_{t_0}^t S^3(\tau) d\tau \right] \right\}.$$

Подставляя это выражение в (26), получаем (23). Теорема доказана.

Делая обратные замены и аналогично п. 3.3 возвращаясь к характеристической функции числа заявок в системе в стационарном режиме, получим

$$h(u) = \exp \left\{ juN\lambda b + \frac{(ju)^2}{2} [N\lambda b + N\kappa\beta] + \frac{(ju)^3}{6} [N\lambda b + 3N\kappa\beta + N\mu\gamma] \right\}, \quad (29)$$

где $\gamma = \int_0^{\infty} (1 - B(t))^3 dt$.

К сожалению, пользоваться аппроксимацией (29) не так удобно, как гауссовской (19) (для получения ряда распределения придется выполнить обратное преобразование Фурье от этого выражения), однако, как будет показано ниже, выражение (29) обеспечивает меньшую погрешность и более широкую область применимости асимптотических результатов.

4. Численные результаты

Демонстрацию точности аппроксимаций (19) и (29) проведем на конкретном численном примере. Пусть входящий МАР-поток задан представлением (ND_0, ND_1) , где

$$D_0 = \begin{pmatrix} -6,50 & 0,50 & 0,97 \\ 0,36 & -1,90 & 0,96 \\ 0,19 & 0,54 & -0,85 \end{pmatrix}, \quad D_1 = \begin{pmatrix} 5,00 & 0,00 & 0,03 \\ 0,04 & 0,50 & 0,04 \\ 0,01 & 0,06 & 0,05 \end{pmatrix}.$$

Время обслуживания имеет гамма-распределение с параметрами масштаба и формы, равными 0,5. Пример составлен таким образом, что параметр λ приблизительно равен 1, среднее время обслуживания также равно 1, и, таким образом, интенсивность входящего потока превышает интенсивность обслуживания в N раз.

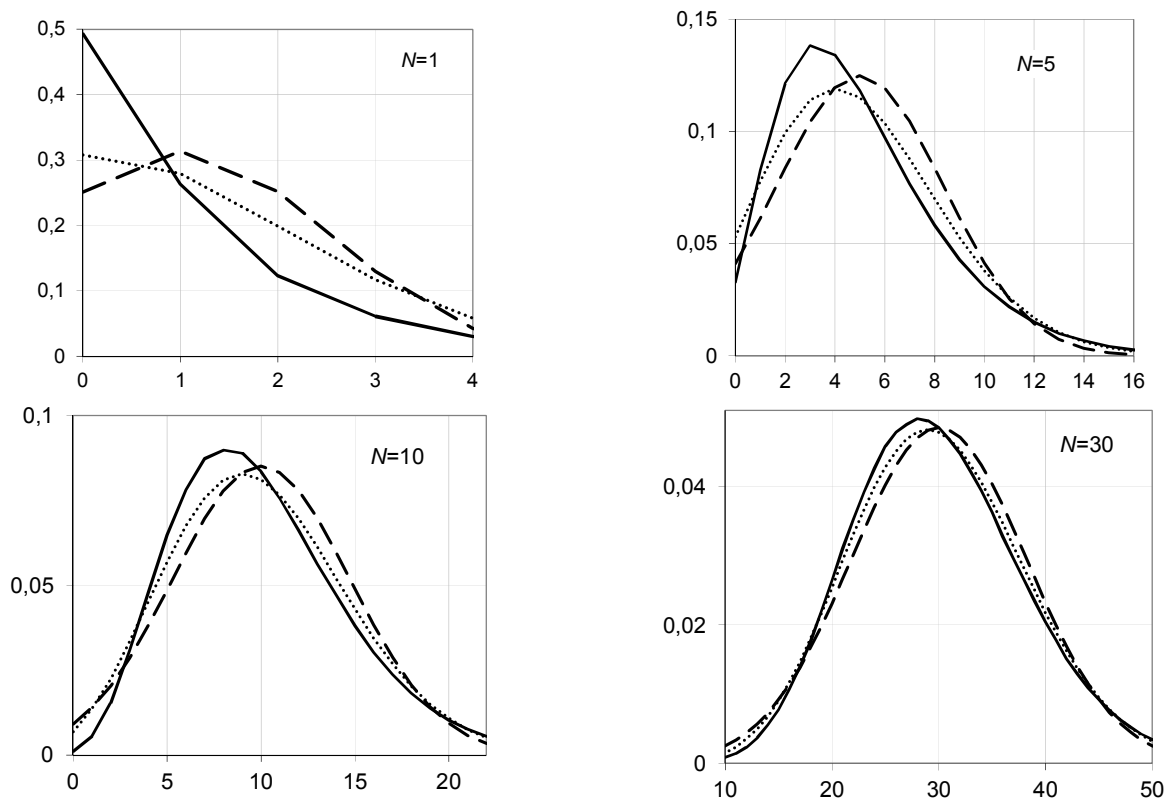


Рис. 1. Сравнение законов распределения вероятностей для эмпирического распределения (сплошная линия), гауссовской аппроксимации (пунктирная линия) и аппроксимации третьего порядка (точечная линия)

На рис. 1 представлены графики законов распределения вероятностей для эмпирического распределения, составленного на основе результатов имитационного моделирования, и распределений, полученных на основе аппроксимаций (19) и (29). Из графиков видно, что при достаточно больших значениях N ($N \geq 10$) распределение по форме близко к нормальному.

Для числовой оценки точности аппроксимаций воспользуемся расстоянием Колмогорова [22]. В таблице приведены значения расстояния Колмогорова для различных значений величины N . Если в качестве допустимой погрешности выбрать расстояние Колмогорова, равное 0,03, то из таблицы видно, что третья асимптотика дает достаточно точную аппроксимацию уже при $N = 10$, в то время как гауссовская аппроксимация дает такую же точность только при $N = 30$.

Расстояние Колмогорова между эмпирическим распределением и аппроксимациями второго и третьего порядка для различных значений интенсивности входящего потока N

Интенсивность входящего потока N	Расстояние Колмогорова	
	для аппроксимации второго порядка (гауссовской)	для аппроксимации третьего порядка
1	0,242	0,186
5	0,099	0,048
10	0,060	0,027
30	0,029	0,013
100	0,017	0,007

Заключение

В работе представлено исследование системы массового обслуживания с неограниченным числом приборов, входящим MAP-поток и произвольным распределением времени обслуживания. Исследование выполнено в асимптотическом условии растущей интенсивности входящего потока. Показано, что для достаточно больших значений параметра N интенсивности входящего потока стационарное распределение вероятностей числа заявок в системе аппроксимируется гауссовским (нормальным) распределением, параметры которого получены в работе. Для повышения степени точности выполнен асимптотический анализ третьего порядка и получены параметры аппроксимации третьего порядка для стационарного распределения вероятностей числа заявок в системе.

Числовые примеры показывают, что гауссовская аппроксимация дает достаточно малую погрешность при $N \geq 30$, где N – параметр, определяющий, во сколько раз интенсивность входящего потока превышает интенсивность обслуживания. Аппроксимация третьего порядка расширяет область применимости до значений $N \geq 10$, что существенно увеличивает точность полученных результатов. Однако при использовании полученных в работе аппроксимационных формул следует учитывать, что гауссовская аппроксимация более проста в применении. Таким образом, при $N \geq 30$ целесообразно использовать более удобную гауссовскую аппроксимацию, а для меньших значений N следует воспользоваться аппроксимацией третьего порядка.

Результаты могут быть использованы для анализа систем массового обслуживания вида MАР/GI/∞, а методика исследования – для выполнения исследования многофазных систем и сетей массового обслуживания с входящим высокоинтенсивным MАР-поток.

ЛИТЕРАТУРА

1. Грачев В.В., Моисеев А.Н., Назаров А.А., Ямпольский В.З. Многофазная модель массового обслуживания системы распределенной обработки данных // Доклады ТУСУР. 2012. № 2(26), ч. 2. С. 248–251.
2. Матальцкий М.А., Статкевич С.Э. НМ-сети как новые стохастические модели прогнозирования доходов различных объектов // Вестник ГрГУ. Сер. 5. Экономика. 2009. № 1. С. 107–115.
3. Гарайшина И.Р. Исследование математических моделей процессов государственного пенсионного страхования : дис. ... канд. физ.-мат. наук. Томск : ТГУ, 2005. 148 с.
4. Гасников А.В. и др. Введение в математическое моделирование транспортных потоков : учеб. пособие / под ред. А.В. Гасникова. М. : МФТИ, 2010. 362 с.

5. Heyman D.P., Lucantoni D. Modelling multiple IP traffic streams with rate limits // IEEE/ACM Trans. on Networking. 2003. V. 11, No. 6. P. 948–958.
6. Neuts M.F. A versatile Markovian arrival process // J. of Appl. Prob. 1979. V. 16. P. 764–779.
7. Lucantoni D.M. New results on the single server queue with a batch Markovian arrival process // Stochastic Models. 1991. V. 7. P. 1–46.
8. Breuer L., Baum D. An introduction to queueing theory and matrix-analytic methods. Springer, 2005. 271 p.
9. Kendall D.G. Stochastic processes occurring in the theory of queues and their analysis by the method of the imbedded Markov chains // Ann. Math. Statist. 1953. V. 24(3). P. 338–354.
10. Whitt W. On the heavy-traffic limit theorem for GI/G/∞ queues // J. Adv. Appl. Prob. 1982. V. 14. P. 171–190.
11. Kingman J.F.C. On queues in heavy traffic // J. of the Royal Statistical Society. 1962. Series B 24(2). P. 383–392.
12. Iglehart D.L., Whitt W. Multiple channel queues in heavy traffic // Adv. Appl. Prob. 1970. V. 2. P. 150–172.
13. Iglehart D.L. Limit diffusion approximations for the many server queue and the repairman problem // J. of Appl. Prob. 1965. V. 2. P. 429–441.
14. Боровков А.А. О предельных законах для процессов обслуживания в многоканальных системах // Сибирский математический журнал. 1967. Т. 8, № 5. С. 983–1004.
15. Горбатенко А.Е., Назаров А.А. Исследование MAP-потока в условиях растущей интенсивности // Вестник Томского государственного университета. Управление, вычислительная техника и информатика. 2008. № 3(4). С. 66–70.
16. Лопухова С.В. Исследование ММР-потока асимптотическим методом m -го порядка // Вестник Томского государственного университета. Управление, вычислительная техника и информатика. 2008. № 3(4). С. 71–76.
17. Назаров А.А., Семенова И.А. Исследование системы ММР|GI|∞ методом просеянного потока // Вестник Томского государственного университета. Управление, вычислительная техника и информатика. 2011. № 4(17). С. 74–84.
18. Моисеев А.Н., Назаров А.А. Исследование системы массового обслуживания HIGI|GI|∞ // Вестник Томского государственного университета. Управление, вычислительная техника и информатика. 2013. № 2(23). С. 75–83.
19. Cox D.R. The analysis of non-Markovian stochastic processes by the inclusion of supplementary variables // Proc. Camb. Phil. Soc. 1955. V. 51. P. 433–441.
20. Henderson W. Alternative approaches to the analysis of M/G/1 and G/M/1 queue // J. Oper. Res. Soc. Japan. 1972. V. 15. P. 92–101.
21. Назаров А.А., Моисеева С.П. Метод асимптотического анализа в теории массового обслуживания. Томск : Изд-во НТЛ, 2006. 112 с.
22. Рыков В.В., Иткин В.Ю. Математическая статистика и планирование эксперимента : учеб. пособие. М. : МАКС Пресс, 2010. 308 с.

Моисеев Александр Николаевич, канд. техн. наук, доцент. E-mail: moiseev.tsu@gmail.com
Томский государственный университет

Поступила в редакцию 20 апреля 2015 г.

Moiseev Alexander N. (Tomsk State University, Russian Federation).

Asymptotic analysis of queueing system MAP/GI/∞ with high-rate arrivals

Keywords: queueing system; Markovian arrival process; infinite-server system; asymptotic analysis.

DOI 10.17223/19988605/32/6

In the paper, the infinite-server queueing system with the Markovian arrival process and with the general form of service time distribution is considered. The analysis is performed under the asymptotic condition of arrivals' rate infinite growth. The high intensive Markovian arrival process is defined by representation $(N\mathbf{D}_0, N\mathbf{D}_1)$, where N is the scalar that characterizes the high rate of arrivals. Let \mathbf{D}_0 and \mathbf{D}_1 be square matrices. A rate of the arrivals is equal to $N\lambda$. Here $\lambda = \boldsymbol{\theta}\mathbf{D}_1\mathbf{e}$, $\boldsymbol{\theta}$ is a row vector of stationary probability distribution of the embedded Markov chain of the MAP, \mathbf{e} is the column vector with entries all equal to 1. The service time for each customer is a random variable with the cumulative distribution function $B(t)$.

The approximations of the 2nd and 3rd orders for the characteristic function of number of customers in the stationary regime are obtained. The approximation of the second order is the Gaussian distribution with mean $N\lambda b$ and variance $[N\lambda b + N\kappa\beta]$. Here

$b = \int_0^{\infty} (1 - B(t)) dt$ is the average service time, $\beta = \int_0^{\infty} (1 - B(t))^2 dt$, κ is defined by the expression $\kappa = 2\mathbf{g}(\mathbf{D}_1 - \lambda\mathbf{I})\mathbf{e}$, and the row

vector \mathbf{g} satisfies the linear matrix equation $\mathbf{g}\mathbf{D} = \boldsymbol{\theta}(\lambda\mathbf{I} - \mathbf{D}_1)$, where $\mathbf{D} = \mathbf{D}_0 + \mathbf{D}_1$ and \mathbf{I} is the identity matrix.

The approximation of the third order is equal to

$$h(u) = \exp \left\{ juN\lambda b + \frac{(ju)^2}{2} [N\lambda b + N\kappa\beta] + \frac{(ju)^3}{6} [N\lambda b + 3N\kappa\beta + N\mu\gamma] \right\},$$

where $j = \sqrt{-1}$, $\gamma = \int_0^{\infty} (1 - B(t))^3 dt$, $\mu = 6\mathbf{g}_2(\mathbf{D}_1 - \lambda\mathbf{I})\mathbf{e} - 3\kappa\mathbf{g}$, the row vector \mathbf{g}_2 satisfies the following linear matrix equation

$$\mathbf{g}_2 \mathbf{D} = \boldsymbol{\theta} \left[\left(\frac{\kappa}{2} - \lambda \right) \mathbf{I} - \mathbf{D}_1 \right] + \lambda \mathbf{g}.$$

The numerical analysis of the applicability of the obtained asymptotic results is also performed. It is shown that the asymptotic approximation of the second order (Gaussian approximation) provides enough accuracy when the arrivals rate is greater than rate of the servicing by 30 times or more ($N \geq 30$). On other hand, the third order approximation provides the similar accuracy for values $N \geq 10$. Therefore, it is reasonable to use the obtained Gaussian approximation as a more comfortable form for usage when $N \geq 30$, and we need take the approximation of the third order when a value of the parameter N is less than 30.

REFERENCES

1. Grachev, V.V., Moiseev, A.N., Nazarov, A.A. & Yampol'skiy, V.Z. (2012) Multi-stage queueing model of distributed data processing system. *Doklady TUSUR – Proceedings of TUSUR*. 2(26/2). pp. 248-251. (In Russian).
2. Matalytskiy, M.A. & Statkevich, S.E. (2009) NM-seti kak novye stokhasticheskie modeli prognozirovaniya dokhodov razlichnykh ob"ek-tov [HM-networks as new stochastic models for forecasting of revenues of different objects]. *Vestnik GrGU. Ser. 5. Ekonomika*. 1. pp. 107-115.
3. Garayshina, I.R. (2005) *Issledovanie matematicheskikh modeley protsessov gosudarstvennogo pensionnogo strakhovaniya* [Investigation of mathematical models of the State pension insurance processes]. Physics and Mathematics Cand. Dis. Tomsk: Tomsk State University.
4. Gasnikov, A.V. et al. (2010) *Vvedenie v matematicheskoe modelirovanie transportnykh potokov* [Introduction into mathematical modeling of traffic flows]. Moscow: MFTI.
5. Heyman, D.P. & Lucantoni, D. (2003) Modelling multiple IP traffic streams with rate limits. *IEEE/ACM Trans. on Networking*. 11 (6). pp. 948-958.
6. Neuts, M.F. (1979) A versatile Markovian arrival process. *Journal of Applied Prob.* 16. pp. 764-779.
7. Lucantoni, D.M. (1991) New results on the single server queue with a batch Markovian arrival process. *Stochastic Models*. 7. pp. 1-46. DOI: 10.1080/15326349108807174
8. Breuer, L. & Baum, D. (2005) *An introduction to queueing theory and matrix-analytic methods*. Springer.
9. Kendall, D.G. (1953) Stochastic processes occurring in the theory of queues and their analysis by the method of the imbedded Markov chains. *The Annals of Mathematical Statistics*. 24(3). pp. 338-354.
10. Whitt, W. (1982) On the heavy-traffic limit theorem for GI/G/∞ queues. *Journal of Advances in Applied Probability*. 14. p. 171-190. DOI: 10.2307/1426738
11. Kingman, J.F.C. (1962) On queues in heavy traffic. *Journal of the Royal Statistical Society. B* 24(2). pp. 383-392.
12. Iglehart, D.L. & Whitt, W. (1970) Multiple channel queues in heavy traffic. *Journal of Advances in Applied Probability*. 2. pp. 150-172.
13. Iglehart, D.L. (1965) Limit diffusion approximations for the many server queue and the repairman problem. *Journal of Applied Probability*. 2. pp. 429-441. DOI: 10.2307/3212203
14. Borovkov, A.A. (1967) O predel'nykh zakonakh dlya protsessov obsluzhivaniya v mnogokanal'nykh sistemakh [On limit laws for service processes in multi-channel systems]. *Sibirskiy matematicheskiy zhurnal – Siberian Mathematical Journal*. 8 (5). pp. 983-1004.
15. Gorbatenko, A.E. & Nazarov, A.A. (2008) Issledovanie MAR-potoka v usloviyakh rastushchey intensivnosti [The research of MAP in conditions of growing intensity]. *Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo universiteta. Upravlenie, vychislitel'naya tekhnika i informatika – Tomsk State University Journal of Control and Computer Science*. 3(4). pp. 66-70.
16. Lopukhova, S.V. (2008) Issledovanie MMR-potoka asimptoticheskim metodom m-go poryadka [Research of MMP-process by the asymptotical analysis method of the m-th order]. *Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo universiteta. Upravlenie, vychislitel'naya tekhnika i informatika – Tomsk State University Journal of Control and Computer Science*. 3(4). pp. 71-76.
17. Nazarov, A.A. & Semenova, I.A. (2011) Investigation of non-Markovian system of mass service with unlimited number of servers and input MMP-flow by the method of sifted flow. *Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo universiteta. Upravlenie, vychislitel'naya tekhnika i informatika – Tomsk State University Journal of Control and Computer Science*. 4(17). pp. 74-84. (In Russian).
18. Moiseev, A.N. & Nazarov, A.A. (2013) Investigation of queueing system HIGI|GI|∞. *Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo universiteta. Upravlenie, vychislitel'naya tekhnika i informatika – Tomsk State University Journal of Control and Computer Science*. 2(23). pp. 75-83. (In Russian).
19. Cox, D.R. (1955) The analysis of non-Markovian stochastic processes by the inclusion of supplementary variables. *Mathematical Proceedings of the Cambridge Philosophical Society*. 51. pp. 433-441. DOI: 10.1017/S0305004100030437
20. Henderson, W. (1972) Alternative approaches to the analysis of M/G/1 and G/M/1 queue. *J. Oper. Res. Soc.* 15. pp. 92-101.
21. Nazarov, A.A. & Moiseeva, S.P. (2006) *Metod asimptoticheskogo analiza v teorii massovogo obsluzhivaniya* [Asymptotic analysis method in queueing theory]. Tomsk: NTL.
22. Rykov, V.V. & Itkin, V.Yu. (2010) *Matematicheskaya statistika i planirovanie eksperimenta* [Mathematical statistics and design of experiments]. Moscow: MAKS Press.