ТОМСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ

Механико-математический факультет
кафедра общей математики

“Утверждаю”
Декан ММФ
_______Старченко А.В.
“_____”___ 2015 г.

Практическое руководство к адаптивному курсу
«Дифференциальные уравнения».
Для обеспечения самостоятельной работы студентов физических специальностей

Составители:
доцент Галанова Н. Ю.,
доцент Путятина Е. Н.

Томск − 2015

Одобрено кафедрой общей математики

Зав. кафедрой доцент Е.Н. Путятина

Рассмотрено и утверждено методической комиссией ММФ

Протокол № 5 от 14 мая 2015 г.

Председатель методической комиссии О. П. Федорова.

В данном сборнике представлены индивидуальные задания по темам: дифференциальные уравнения первого порядка, разрешённые и неразрешённые относительно производной и их особые решения; дифференциальные уравнения высших порядков, допускающие понижение порядка; линейные дифференциальные уравнения высших порядков; теорема Пикара для ДУ первого порядка и систем ДУ; нелинейные системы и ДУ в частных производных. Пособие содержит краткие методические указания и примеры решения задач.

Предложенные задания могут быть использованы для индивидуальной работы студентов дневной формы обучения ММФ, РФФ, ФТФ, ФФ.

СОДЕРЖАНИЕ

Часть 1.

ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ ПЕРВОГО ПОРЯДКА. ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ ВЫСШИХ ПОРЯДКОВ, ДОПУСКАЮЩИЕ ПОНИЖЕНИЕ ПОРЯДКА

В данной части представлены индивидуальные задания по темам: ДУ с разделяющимися переменными, однородные ДУ первого порядка, линейные ДУ первого порядка, ДУ Бернулли, Риккати, ДУ в полных дифференциалах, интегрирующий множитель, ДУ неразрешённые относительно производной и их особые решения; ДУ высших порядков, допускающие понижение порядка.

Виды уравнений первого порядка, разрешённые, относительно производной:

1. ДУ с разделяющимися переменными
   $M(x)N(y)dx + P(x)Q(y)dy = 0$,
2. Однородные ДУ $y' = f\left(\frac{y}{x}\right)$,
3. Линейные ДУ $y' + a(x)y = b(x)$,
4. Бернулли $y' + a(x)y = b(x)y^n$, где n - рациональное число,
5. Риккати $y' + a(x)y + b(x)y^2 = c(x)$,
6. ДУ в полных дифференциалах
   $P(x, y)dx + Q(x, y)dy = du(x, y) = 0$, необходимое и достаточное условие $\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}$,
7. Формулы для нахождения интегрирующего множителя

$$d \ln \mu(x) = \frac{\frac{\partial P}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial x}}{Q} dx , \quad d \ln \mu(x) = \frac{\frac{\partial P}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial x}}{-P} dy ,$$

$$d \ln \mu(\omega) = \frac{\frac{\partial P}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial x}}{Q\frac{\partial \omega}{\partial x} - P\frac{\partial \omega}{\partial y}} d\omega .$$

ДУ, неразрешенное относительно производной имеет вид $F(x,y,y')=0$.

ДУ Лагранжа $y=\varphi(y')x+\psi(y')$, ДУ Клеро $y=y'x+\psi(y')$.

Точка (x_0,y_0) называется **особой** точкой ДУ $F(x,y,y')=0$, если через эту точку проходят, по крайней мере, две интегральные кривые уравнения, имеющие в этой точке общую касательную. Интегральная кривая называется особой интегральной кривой, если каждая её точка является особой.

Для уравнения $y'=f\left(x,y\right)$ кривыми, подозрительными на особое решение, являются кривые, вдоль которых нарушается непрерывность функции $\dfrac{\partial f}{\partial y}$. Поставим тот же вопрос для ДУ $F\left(x,y,y'\right)=0$ (1). В разрешении уравнения (1) относительно производной нет необходимости, ибо интересующую нас производную $\dfrac{\partial f_k}{\partial y}\equiv\dfrac{\partial y'}{\partial y}$ можно найти и непосредственно из уравнения: $\dfrac{\partial F}{\partial y}+\dfrac{\partial F}{\partial y'}\cdot\dfrac{\partial y'}{\partial y}=0$

$\Rightarrow\quad \dfrac{\partial y'}{\partial y}=-\dfrac{\partial F/\partial y}{\partial F/\partial y'}$. Поэтому непрерывность производной $\dfrac{\partial f_k}{\partial y}$ нарушается вдоль кривых, где $\dfrac{\partial F}{\partial y'}=0$. Но это условие необходимо рассматривать совместно с уравнением (1), ибо нас интересуют не всякие кривые, вдоль которых $\dfrac{\partial y'}{\partial y}$ теряет непрерывность, а лишь кривые, являющиеся интегральными для ДУ (1). Следовательно, кривые, подозрительные на особое решение, могут быть найдены из системы уравнений:

$\begin{cases} F\left(x,y,y'\right)=0 \\ \dfrac{\partial F}{\partial y'}=0 \end{cases}$ исключением y'. В результате этого мы получим некоторую кривую $R\left(x,y\right)=0$, которая называется *дискриминантной* кривой ДУ (1). Найдя её, следует проверить, будет ли эта кривая интегральной и нарушается ли в каждой её точке единственность решения задачи Коши.

Примеры. [Матвеев] 1) $xy'^2 - 2yy' + 4x = 0$. Разрешая уравнение относительно y', получим два однородных ДУ: $y' = \dfrac{y \pm \sqrt{y^2 - 4x^2}}{x}$ $\left(y^2 - 4x^2 \geq 0,\ \ x^2 + y^2 \neq 0\right)$ - в точке $(0,0)$ направление поля не определено. Положим $y = ux$, $y' = u'x + u \ \Rightarrow\ u'x = \pm\sqrt{u^2 - 4}$ $\Rightarrow\ \dfrac{du}{\pm\sqrt{u^2 - 4}} = \dfrac{dx}{x}$ $\left(x \neq 0,\ \ u^2 - 4 \neq 0!!\right)$. Интегрируя, получим:
$u \pm \sqrt{u^2 - 4} = Cx$ или $C^2x^2 - 2Cy + 4 = 0$ - общий интеграл в каждой из областей 1) $y^2 - 4x^2 > 0,\ \ y > 0;$
2) $y^2 - 4x^2 > 0,\ \ y < 0$. Действительно, в каждой точке (x_0, y_0) из этих областей ДУ задаёт два направления поля:
$y_0' = \dfrac{y_0 \pm \sqrt{y_0^{\,2} - 4x_0^{\,2}}}{x_0}$ и через неё проходят две интегральных кривых семейства $C^2x^2 - 2Cy + 4 = 0$, причём эти кривые не касаются друг друга. Это *частные* решения.

Из равенств $x = 0$ и $u^2 - 4 = 0$ следует, что мы могли потерять решения $x = 0$ $(y \neq 0)$ и $y = \pm 2x$ $(x \neq 0)$. Нетрудно видеть, что полуоси $x = 0$ $(y \neq 0)$ являются частными решениями, ибо удовлетворяют ДУ и в каждой точке любого из них имеет место единственность решения задачи Коши. В самом деле, в точке $(0, y_0)$, где $y_0 \neq 0$, ДУ задаёт два направления поля $y_0' = 0$ и $y_0' = \infty$, и через неё проходят две интегральные кривые: $x^2 = y_0(y - y_0)$ и $x = 0$.

$\Big\{$ Если $x = 0,\ \ y = y_0$, то: а) $y' = \lim\limits_{x \to 0} \dfrac{y_0 + \sqrt{y_0^{\,2} - 4x^2}}{x} = \infty$; б)

$$y' = \lim_{x \to 0} \frac{y_0 - \sqrt{y_0 - 4x^2}}{x} = \lim_{x \to 0} \frac{y_0^{\,2} - y_0^{\,2} + 4x^2}{x\left(y_0 + \sqrt{y_0^{\,2} - 4x^2}\right)} = \lim_{x \to 0} \frac{4x}{2y_0} = 0;$$ реше-

ние для а) из общего следует при $C=\infty$, для б) – при $C=\dfrac{2}{y_0}$ $\Big\}$.

Полупрямые $y=\pm 2x$ $(x\neq 0)$ являются особыми решениями, ибо в любой точке $(x_0,\pm 2x_0)$ нарушается единственность: ДУ задаёт *одно* направление поля - $y_0'=\pm 2$, но через эту точку проходит и решение $y=\pm 2x$, и парабола $y=\pm\left(\dfrac{x^2}{x_0}+x_0\right)$, содержащаяся в общем интеграле при $C=\mp\dfrac{2}{x_0}$. Таким образом, в любой точке не на прямых $y=\pm 2x$ задаётся два направления поля и через неё проходит две интегральных кривых, а на $y=\pm 2x$ кривых опять две, а направление поле всего одно.

2) $y'^2-2xy'-y'+2x=0 \quad\Rightarrow\quad y'=2x,\ \ y'=1 \quad\Rightarrow\quad \begin{cases} y=x^2+C \\ y=x+C \end{cases}$ - общее решение данного уравнения. Дискриминантная кривая находится из системы уравнений:

$\begin{cases} y'^2-2xy'-y'+2x=0 \\ 2y'-2x-1=0 \end{cases} \quad\Rightarrow\quad x=\dfrac{1}{2}$. Вдоль этой линии единственность нарушена: оба уравнения задают одинаковое направление поля, через любую из точек $\left(\dfrac{1}{2},y_0\right)$ проходит две интегральных кривых, которые касаются друг друга, но линия $x=\dfrac{1}{2}$ не является решением данного ДУ, а является лишь линией особых точек. Данное уравнение показывает, что для ДУ (1) возможны решения, полученные путём склейки кусков только частных решений, в отличие от ДУ $y'=f(x,y)$, где подобные решения состоят из кусков частных и особых решений.

ДУ, допускающие понижение порядка:

1. $F(x,y^{(k)},y^{(k+1)},...,y^{(n)})=0$, замена $y^{(k)}=p(x)$,

2. $F(y, y', y'', ..., y^{(n)}) = 0$, замена $y' = p(y), y'' = p'p$, и т.д.,

3. $F(x, y, y', y'', ..., y^{(n)}) = 0$, однородное относительно $y, y', y'', ..., y^{(n)}$, замена $\dfrac{y'}{y} = p(x)$.

Вариант 1

1. $2x\sqrt{1-y^2}dx + ydy = 0$, $y(1) = 0$;

2. $\left(y^2 + xy^2\right)dx + \left(x^2 - yx^2\right)dy = 0$; **3.** $y' = xe^{2y-x}$;

4. $y' = y + x + 1,\ y(0) = -2$; **5.** $xy' = \sqrt{x^2 + y^2} + y$;

6. $(x + y - 2)y' = 1 - 2(x + y)$; **7.** $xy' = y + x\left(1 + e^{y/x}\right)$, $y(1) = 0$;

8. $(3x - 7y - 3)y' + 7x - 3y - 7 = 0$; **9.** $x^2y' - y = x^2e^{x - \frac{1}{x}}$, $y(1) = 2$;

10. $xy'\mathrm{tg}y + 1 = y'\sin 2y$, $y(0) = 0$;

11. $y' + 4x^3y^3 + 2xy = 0$, $y(0) = 1$; **12.** $xy' = y\left(1 + x^2y'\right)$, $y(1) = 1$;

13. $x(2x - 1)y' + y^2 + 4x = (4x + 1)y$;

14. $y' + y^2 + \dfrac{1}{4x^2} = 0$; **15.** $xy'(2y - 1) + y^2 - y = 2x$;

16. $\left(2x^2y - 2x^3\right)y' + 2xy^2 - 6x^2y + 4x^3 = 0$;

17. $x^2(3y + 2x)y' + 3x(y + x)^2 = 0$;

18. $\left(\dfrac{2y}{x} + \dfrac{3y^2}{x^2}\right)dx + \left(1 + \dfrac{6y}{x} - \dfrac{3y^2}{x^2}\right)dy = 0$;

19. $\left(3y^3 + 2xy^2 + 2xy\right)dx + \left(6xy^2 + x^2y + 3y\right)dy = 0$;

20. $\left(x^3 - xy^2 - y\right)dy + \left(x^2y - y^3 + x\right)dx = 0$, $\mu(\omega), \omega = x^2 - y^2$;

21. $y'^2 - 2yy' = y^2\left(e^{2x} - 1\right)$, $y(0) = 1$, $y'(0) = 2$;

22. $y'^3 - yy'^2 - x^2y' + x^2y = 0$; **23.** $y'^3 - 3y' + 1 = 0$;

24. $x = y'^2 + \ln y'$ **; 25.** $\dfrac{y}{\sqrt{1+y'^2}} = a$ **; 26.** $y'^2 - yy' + e^x = 0$ **;**

27. $y = xy'^2 + y'^2$ **; 28.** $y = xy' - a\sqrt{1+y'^2}$ **; 29.** $y^{(4)} = x - 1$ **;**

30. $2y'' - x - \sin y'' = 0$ **; 31.** $\left(1-x^2\right)y'' - xy' = 2$ **;**

32. $2y'^2 = y''\left(y-1\right)$ **; 33.** $y''\left(1+y'^2\right)^{\frac{3}{2}} = 0$ **; 34.** $xyy'' - xy'^2 + yy' = y^2$ **;**

35. $yy'' - y'^2 = \dfrac{yy'}{\sqrt{1+x^2}}$ **;**

36. $\left(1+x^2\right)y'' + 2xy' = x^3$ **,** $y\left(0\right) = 0$, $y'\left(0\right) = -2$; **37.** $y'''x\ln x = y''$ **.**

38. Моторная лодка движется в спокойной воде со скоростью 10 км/час. На полном ходу ее мотор был выключен и через $t = 20$ сек. Скорость лодки уменьшилась до 6 км/час. Считая, что сила сопротивления воды движению лодки пропорциональна ее скорости, найти скорость лодки через 2 минуты после остановки мотора. Найти расстояние, пройденное лодкой в течение одной минуты после остановки мотора.

39. Найти общее решение неоднородного линейного уравнения первого порядка, если известны два частных решения y_1 и y_2.

40. Найти особые решения уравнения: $2y\left(y'+2\right) = xy'^2$.

Вариант 2

1. $\left(xy+x\right)y' - y\left(x^2+1\right) = 0$, $y\left(1\right) = 1$;

2. $y' = e^{x+y} + e^{x-y}$, $y\left(0\right) = 0$; **3.** $y' = 3x^2y - x^2$ **; 4.** $y' = \sin\left(x-y\right)$ **;**

5. $\left(2x-y\right)dx + \left(4x-2y+1\right)dy = 0$ **;**

6. $\left(x^2+2xy-y^2\right)dx + \left(y^2+2xy-x^2\right)dy = 0$ **;**

7. $y' = e^{\frac{y}{x}} + \dfrac{y}{x}$ **,** $y\left(1\right) = -1$ **; 8.** $\left(x+2y-5\right)dx + \left(2x-y+4\right)dy = 0$ **;**

9. $xy' - y = x^3$ **,** $y\left(1\right) = 0$ **; 10.** $\left(y^4e^y + 2x\right)y' = 1$ **,** $y\left(1\right) = 0$ **;**

11. $xy' + y = xy^2$ **,** $y\left(1\right) = 2$ **; 12.** $1 + 2xyy' + x^2y^3y' = 0$ **,** $y\left(1\right) = 0$ **;**

13. $x^2y' - y^2 - 3xy = x^2$ **; 14.** $y' = \dfrac{m^2}{x^4} - y^2$ **;**

15. $y' + \mathrm{tg}y = \dfrac{x}{\cos y}$ **;**

16. $\left(3x^2 + \dfrac{2}{y}\cos\dfrac{2x}{y}\right)dx - \dfrac{2x}{y^2}\cos\dfrac{2x}{y}dy = 0$ **;**

17. $\left(1 - \dfrac{y}{x\ln^2 x}\right)dx + \dfrac{dy}{\ln x} = 0$ **;**

18. $\left(3 + 6\dfrac{y^2}{x}\right)dx + \left(6y + \dfrac{4y^3}{x^2}\right)dy = 0$ **;**

19. $\left(y^2 e^x + \dfrac{y^2}{x}\right)dx + \left(y - 2y^3\right)dy = 0$ **,** $y(1) = 1$ **;**

20. $\left(\dfrac{x-y}{x} - \dfrac{y^2}{x-y}\right)dx + \left(\dfrac{x^2}{x-y} - \dfrac{x-y}{y}\right)dy = 0$ **,** $\mu(\omega)$**,** $\omega = x - y$ **;**

21. $y'^2 - 2xy' - 8x^2 = 0$ **; 22.** $y'^3 - 2xy'^2 + y' = 2x$ **;**

23. $\arcsin y' + y' = 1$ **;**

24. $xy'^3 = y'^6 - 1$ **; 25.** $y = y' + \sin y' - y'\cos y'$ **;**

26. $y'^2 - 4xy' + 2y + 2x^2 = 0$ **,** $y(1) = \dfrac{1}{2}$, $y'(1) = 1$;

27. $y = 2xy' + \dfrac{1}{y'^2}$ **;**

28. $y = xy' + \dfrac{1}{y'}$ **; 29.** $y''' = \dfrac{\ln x}{x^2}$ **; 30.** $y'' - x + e^{-y'} = 0$ **;**

31. $y'' = 1 + \dfrac{x(y' - x)}{1 - x^2}$ **; 32.** $1 + y'^2 = 2yy''$ **;**

33. $\dfrac{\left(1 + y'^2\right)^{3/2}}{y''} = \left(y\sqrt{1 + y'^2}\right)^3$ **;**

34. $(2x+1)\left(yy'' - y'^2\right) = 4xy^2 + 2yy'$ **; 35.** $xyy' + (x+1)\left(yy'' - y'^2\right) = 0$ **;**

36. $xy''' + y'' = 1$**,** $y(1) = \dfrac{1}{2}$, $y'(1) = 2$, $y''(1) = 1$;

37. $y'^2 = \dfrac{yy'}{x-1} + yy''$.

38. Количество света, поглощаемого при прохождении через тонкий слой воды, пропорционально количеству падающего света и толщине слоя. Если при прохождении слоя воды толщиной в 3 метра поглощается половина первоначального количества света, то какая часть этого количества дойдет до глубины 15 метров?

39. Найти уравнения множества экстремальных точек решений уравнения $y' = f(x, y)$. Как отличить точки минимума от точек максимума?

40. Найти особые решения уравнения: $y = y'^2 - xy' + \dfrac{x^2}{2}$.

Вариант 3

1. $ye^{2x}dx + \left(1 + e^{2x}\right)dy = 0$, $y(0) = 2$; **2.** $(xy - x)dx + (xy + x - y - 1)dy = 0$;

3. $y' = \operatorname{sh}(x + y) + \operatorname{sh}(x - y)$; **4.** $y' = (x + y)^2$, $y(0) = \sqrt{3}$;

5. $(x + y - 1)dx + (3x + 3y + 4)dy = 0$; **6.** $xdy - ydx = \sqrt{x^2 + y^2}\,dx$;

7. $\dfrac{dx}{x^2 - xy + y^2} = \dfrac{dy}{2y^2 - xy}$; **8.** $(2x + y)dx + (3y - 5x + 11)dy = 0$;

9. $y' + y\cos x = \dfrac{1}{2}\sin 2x$, $y(0) = 0$; **10.** $y^2dx + (xy - 1)dy = 0$, $y(1) = 2$; **11.** $2(xy' + y) = xy^2$, $y(1) = 2$; **12.** $\left(x^3 + e^y\right)y' = 3x^2$;

13. $y' + 3y^2 - 8\dfrac{y}{x} = -\dfrac{6}{x^2}$, $y(4) = \dfrac{1}{2}$;

14. $y'\sin x - y\cos x + y^2 + \sin^2 x = 0$;

15. $\left(x^2 + y^2 + 2x - 2y\right)dx + 2(y - 1)dy = 0$;

16. $\left(3x^2 + 4y^2\right)dx + \left(8xy + e^y\right)dy = 0$, $y(1) = 1$;

17. $\left(\ln y + \dfrac{1}{\cos^2 x} + 2xy\right)dx + \left(\dfrac{x}{y} + x^2\right)dy = 0$;

18. $\left(2xy^3 + 3x^2y\right)dx + \left(2x^2y^2 + 3y^3 + y\right)dy = 0$;

19. $\left(2e^y+2y+\dfrac{y^3}{x}\right)dx+\left(xe^y+x+3y^2\right)dy=0$ **;**

20. $\left(x+y\sqrt{x^2-y^2}\right)dx+\left(x\sqrt{x^2-y}-y\right)dy=0$ **,** $\mu(\omega)$**,** $\omega=x^2-y^2$ **;**

21. $x^2y'^2+3xyy'+2y^2=0$**,** $y(2)=1$, $y'(2)=-\dfrac{1}{2}$;

22. $y'^3+(x+2)e^y=0$; **23.** $y'^2+e^{-y'}=2$**; 24.** $x=ay'+by'^2$ **;**

25. $y=y'\ln y'$ **; 26.** $x=\dfrac{y\ln y}{y'}-\dfrac{y'^2}{y^2}$, $y(0)=e$**; 27.** $2y=\dfrac{xy'^2}{y'+2}$ **;**

28. $y=xy'+y'+y'^2$ **; 29.** $y'''=x+\cos x$ **; 30.** $x=\dfrac{y''}{\sqrt{1+y''^2}}-\sqrt{y''}$ **;**

31. $y''-2x\left(x^2-y'\right)=0$**; 32.** $2y'^2=(y-1)y''$**; 33.** $yy''=y'^3$**;**

34. $y''+\dfrac{y'^2}{y}+\dfrac{y'}{x}=0$**; 35.** $xyy''-xy'^2-yy'-\dfrac{bxy'^2}{\sqrt{a^2-x^2}}=0$ **;**

36. $y^{(4)}\mathrm{th}x=y'''$ **; 37.** $yy''=y'^2+\dfrac{yy'}{x}$, $y(1)=1$, $y'(1)=2$.

38. Тело весом P, брошенное с поверхности Земли с начальной скоростью V_0 под углом α к горизонту, движется под влиянием силы тяжести. Определить наибольшую высоту h, считая сопротивление воздуха пропорциональным скорости: $R=-kPV$.

39. При каких α и β уравнение $y'=ax^\alpha+by^\beta$ приводится к однородному с помощью замены $y=z^m$?

40. Найти особые решения уравнения: $y'^3-4xyy'+8y^2=0$.

Вариант 4

1. $\dfrac{y}{x}y'=e^{x-y^2}$; **2.** $\sin y\cos x dx=\cos y\sin x dy$, $y\left(-\dfrac{\pi}{2}\right)=\dfrac{\pi}{6}$;

3. $y'=xy^3-xy$ **; 4.** $y'=\sin^2(x-y)$, $y(1)=1$**;**

5. $(x+y+1)dx+(2x+2y+1)dy=0$ **;**

6. $xy'-y=x\mathrm{tg}\dfrac{y}{x}$**,** $y(1)=\dfrac{\pi}{2}$**; 7.** $\left(x^2+y^2\right)dx+xydy=0$ **;**

8. $(x-y-1)dx+(2x+y)dy=0$;

9. $y'+y\mathrm{tg}x=\cos^2 x$, $y\left(\frac{\pi}{4}\right)=\frac{1}{2}$;

10. $2(4y^2+4y-x)y'=1$, $y(0)=0$;

11. $y'+4x^3y=4(x^3+1)e^{-4x}y^2$, $y(0)=1$; **12.** $dx+2xydy=x^2e^{y^2}dy$, $y(-1)=0$;

13. $y'+y^2+2\frac{y}{x}=\frac{2}{x^2}$; **14.** $y'e^{-x}-2ye^x+y^2=1-e^{2x}$;

15. $(x^2+y^2+1)dy+xydx=0$;

16. $\left(2x-1-\frac{y}{x^2}\right)dx-\left(2y-\frac{1}{x}\right)dy=0$, $y(2)=0$;

17. $(e^x\cos y+y)dx+(x-e^x\sin y)dy=0$;

18. $\left(\frac{1}{x}-xy\right)dx+(xy-x^2)dy=0$;

19. $(2xy^2-y)dx+(y^2+x+y)dy=0$;

20. $\mu(\omega)$: $\left(1+e^{-\frac{x}{y}}\right)dx+\left(1-\frac{x}{y}\right)dy=0$, $\omega=\frac{x}{y}$;

21. $y'^2=(2x+y)y'-x^2-xy$, $y(0)=1$, $y'(0)=-1$;

22. $y'^3-2xyy'^2-y'+2xy=0$; **23.** $y'^2+\ln y'-1=0$;

24. $x=y'\sin y'+\cos y'$; **25.** $y=e^{y'}(y'-1)$; **26.** $y=\frac{xy'}{2}+\frac{y'^2}{x^2}$;

27. $yy'=2xy'^2+1$; **28.** $y=\left(\frac{1}{x}+y'\right)x+y'^2$; **29.** $y''=\sin x+\cos x$;

30. $x+y''-y''^3=0$; **31.** $y''+y'\mathrm{tg}x=\sin 2x$;

32. $y''+2yy'^3=0$, $y(1)=1$, $y'(1)=\frac{1}{2}$; **33.** $y''(2y+3)-2y'^2=0$;

34. $yy''=y'^2+y^2x\cos x+\frac{yy'}{x}$; **35.** $(yy''-y'^2)\mathrm{ctg}x+yy'=2y^2$;

36. $y'''\text{th}7x = 7y''$; **37.** $y'y''' = y''^2 - \frac{y'y''}{x}$.

38. Материальная точка массой 1 г движется прямолинейно под действием силы, прямо пропорциональной времени, отсчитываемому от момента $t = 0$, и обратно пропорциональной скорости движения точки. В момент $t = 10$ сек. скорость равна $0,5$ м/сек, а сила – $4 \cdot 10^{-5}$ *н.* Какова будет скорость спустя минуту после начала движения?

39. Доказать, что дифференциальное уравнение
$f_1(x, y)dx + f_2(x, y)dy + \varphi(x, y)(xdx - ydy) = 0$, где
$f_1(x, y)$, $f_2(x, y)$, $\varphi(x, y)$ – однородные функции, причем
$f_1(x, y)$, $f_2(x, y)$ – одного измерения, сводится к уравнению Бернулли путем введения переменной $z = \frac{y}{x}$.

40. Найти особые решения уравнения: $2x^2 y = x^3 y' + 2y'^2$.

Вариант 5

1. $2y\sqrt{y - y^2}dx + (1 + x^2)dy = 0$, $y(0) = 1$; **2.** $y' = 2^{x+y} + 2^{x-y}$, $y(0) = 0$;

3. $e^{-x}(1 - x) + y'e^y \sin y = y'\text{tg}y$; **4.** $y' = \cos^2(x + y)$;

5. $xy' = \sqrt{x^2 - y^2} + y$;

6. $(2x - y)dx + (x + y)dy = 0$; **7.** $xe^{y/x}dy = \left(ye^{y/x} + x + xe^{2y/x}\right)dx = 0$, $y(1) = 0$;

8. $2(x + y)dy + (3x + 3y - 1)dx = 0$; **9.** $y' - \frac{y}{x+2} = x^2 + 2x$, $y(-1) = \frac{3}{2}$;

10. $(\cos 2y \cos^2 y - x)y' = \sin y \cos y$, $y(0,25) = \frac{\pi}{4}$;

11. $xe^{x+y}(1 + y') + e^{x+y} = \frac{1}{x}$;

12. $xy' - y = -y^2(\ln x + 2)\ln x$, $y(1) = 1$;

13. $\left(2x\mathrm{ctg}y + 2\sqrt{x}\sin^2 y\right)y' = 1$, $y(0,25) = \dfrac{\pi}{4}$;

14. $y' = y^2 + 4\dfrac{y}{x} - \dfrac{14}{x^2}$;

15. $y' - 2y\sin x + y^2 + \sin^2 x - \cos x = 0$;

16. $\left(y^2 + y\sec^2 x\right)dx + (2xy + \mathrm{tg}x)dy = 0$;

17. $\left(y\cos(xy) + 1\right)dx + \left(x\cos(xy) + 1\right)dy = 0$;

18. $\left(x^2 + y^2 + 1\right)dx + 2xydy = 0$;

19. $\left(3x^2\cos^2 y - \dfrac{1}{2}\sin 2y\right)dx - xdy = 0$;

20. $\mu(\omega)$**:** $2x\left(\sqrt{x^2 - y} + 1\right)dx - dy = 0$, $\omega = x^2 - y$;

21. $y'^2 + y(y - x)y' - xy^3 = 0$, $y(1) = -\dfrac{1}{2}$, $y'(1) = \dfrac{1}{4}$;

22. $y'^3 - x^4 + x^3 = 0$;

23. $y'^2 + \dfrac{1}{\sqrt{1 + y'}} = 2$; **24.** $x = e^{2y'}\left(2y'^2 - 2y' + 1\right)$;

25. $y' = \mathrm{arctg}\left(\dfrac{y}{y'^2}\right)$;

26. $y = -\dfrac{y'^3}{12} + \dfrac{xy'}{2} + \dfrac{y'^2}{4} + x + \dfrac{x^2}{y'^2}$; **27.** $y'^3 - 3y' = y - x$;

28. $y = xy' - e^{y'}$;

29. $y'' = xe^x$; **30.** $\ln y'' + x - \sin y'' = 0$; **31.** $xy'' - y' = x^2 e^x$;

32. $y''\mathrm{tg}y = 2y'^2$;

33. $y''(1 + y) = y'^2 + y'$; **34.** $y'' - \dfrac{y'^2}{y} = 2e^x y - y'$;

35. $yy'' - y'^2 = 3\sqrt[3]{y^4 y'^2}$;

36. $x^2y''+2xy'=2yy'$; **37.** $(1+\sin x)y'''=y''\cos x$, $y(0)=1$, $y'(0)=2$, $y''(0)=-1$.

38. Скорость охлаждения тела пропорциональна разности между температурами тела и среды. Коэффициент пропорциональности линейно зависит от времени: $k=k_0(1+\alpha t)$. Найти зависимость между температурой тела и временем t, полагая, что при $t=0$ $T=T_0$, а температура окружающей среды равна T_1.

39. Доказать, что линейное уравнение $y'=kx+f(x)$, где $k=const$ и $f(x)$ - периодическая функция с периодом ω, имеет одно периодическое частное решение с тем же периодом и найти его.

40. Найти особые решения уравнения: $2yy'=x\left(y'^2+4\right)$.

Вариант 6

1. $xydx+\left(1+y^2\right)\sqrt{1+x^2}\,dy=0$, $y(0)=1$; **2.** $y'\sin x=y\ln y$, $y\left(\dfrac{\pi}{2}\right)=2$;

3. $y'=\operatorname{sh}(x+2y)+\operatorname{sh}(x-2y)$; **4.** $y'(x+y)=1$;

5. $(3x-y+1)dx+(2y-6x-2)dy=0$; **6.** $xy'=y\ln\dfrac{y}{x}$, $y(e)=e^2$;

7. $xy+y^2=\left(2x^2+xy\right)y'$; **8.** $(x+2y+1)dx=(2x-3)dy$;

9. $y'-\dfrac{y}{x+1}=e^x(x+1)$, $y(0)=1$; **10.** $\left(x\cos^2 y-y^2\right)y'=y\cos^2 y$, $y(\pi)=\dfrac{\pi}{4}$;

11. $2(y'+xy)=\left(1+e^x\right)e^{x^2/2}y^2$, $y(0)=2$;

12. $2\ln y\,dx=\left(\dfrac{\cos y}{x}-\dfrac{x}{y}\right)dy$;

13. $y'-y\left(1+4e^{2x}\right)+2e^xy^2+2e^{3x}=0$; **14.** $y'+y^2=\dfrac{2}{x^2}$, $y(2)=1$;

15. $y'\cos y+\sin y=x+1$ **;**

16. $\left(3x^2y+2y+3\right)dx+\left(x^3+2x+3y^2\right)dy=0$ **;**

17. $\left(xye^x+ye^x+ye^y\right)dx+\left(xe^x+xe^y+xye^y\right)dy=0$ **,** $y(1)=1$ **;**

18. $\left(x-\dfrac{x^2}{y}\right)dx+\left(2x^2y+\dfrac{x^2}{y}+\dfrac{x^3}{y^2}\right)dy=0$ **;**

19. $\left(xy\operatorname{ch}y+y\operatorname{sh}x\right)dy+\left(y^2\operatorname{ch}x+y\operatorname{sh}y\right)dx=0$ **;**

20. $\mu(\omega)$**:** $\left(x^3+xy^2\right)dx+\left(x^2y+y^3\right)dy+ydx-xdy=0$ **,**
$\omega=x^2+y^2$ **;**

21. $y'^2+\left(\sin x-2xy\right)y'-2xy\sin x=0,\ \ y(0)=\dfrac{\pi}{2},\ \ y'(0)=1;$

22. $y'^3-\left(y+1\right)^2e^x=0;$ **23.** $y'^2+\dfrac{1}{y'}=1$ **; 24.** $\arcsin\left(\dfrac{x}{y'}\right)=y'$ **;**

25. $6x^2y-6y'^2-3x^3y'+12x^2y'-6x^4+x^5=0$ **; 26.** $y\left(1+y'^2\right)^{\frac{1}{2}}=y'$ **;**

27. $y=2xy'-y'^2$ **; 28.** $x=\dfrac{y}{y'}+\dfrac{1}{y'^2}$ **; 29.** $y''+x-\sqrt{1+y''^2}=0$ **;**

30. $y''\left(x+2\right)^5=1$ **; 31.** $\left(1+x^2\right)y''+4xy'=x^3$ **;**

32. $2\left(2a-y\right)y''=1+y'^2$ **;**

33. $yy''-y'^2+yy'\operatorname{tg}x=y^2\sec x$ **; 34.** $y''=y'e^y$ **;**

35. $y''\operatorname{cth}x-\dfrac{y'}{\operatorname{sh}^2x}=\operatorname{sh}x$ **;**

36. $x\left(y^2+y'^2\right)+2yy'-xyy''=0$ **; 37.** $2yy'e^x=y''-y'$ **,** $y(0)=1,$
$y'(0)=2$ **.**

38. Определить скорость v, с которой метеор ударяется о землю, если он падает с неограниченно большого расстояния из состояния покоя и если при его движении к Земле ускорение w обратно пропорционально квадрату его расстояния r от центра Земли (сопротивлением воздуха пренебречь).

39. Доказать, что линейное уравнение остается линейным при любой замене независимой переменной $x = \varphi(t)$ и любом линейном преобразовании искомой функции $y = \alpha(x)z + \beta(x)$.

40. Найти особые решения уравнения: $y'^2 - yy' + e^x = 0$.

Вариант 7

1. $y' + \cos(x + 2y) = \cos(x - 2y)$; **2.** $y' = \dfrac{1}{3x + y}$, $y(0) = 0$;

3. $e^y\left(1 + x^2\right)dy - 2x\left(1 + e^y\right)dx = 0$, $y(1) = 0$;

4. $dy + \left(xy + xy^3\right)dx = 0$;

5. $(x - 2y)dx + (4y - 2x + 3)dy = 0$;

6. $\left(y^4 - 2x^3y\right)dx + \left(x^4 - 2xy^3\right)dy = 0$;

7. $1 - \cos\dfrac{y}{x} - \dfrac{y}{x} + y' = 0$; **8.** $y' = \dfrac{x + y - 2}{y - x - 4}$;

9. $y' - \dfrac{y}{x} = x\sin x$, $y\left(\dfrac{\pi}{2}\right) = 1$;

10. $e^{y^2}(dx - 2xydy) = ydy$, $y(0) = 0$;

11. $3(xy' + y) = y^2 \ln x$, $y(1) = 3$;

12. $xy' + \sin y = (\cos y - 1)x^2y'$, $y\left(\dfrac{2}{\pi}\right) = \dfrac{\pi}{2}$;

13. $y' + y^2e^{2x} - \left(1 + 2e^{3x}\right)y + e^{4x} = 0$;

14. $4y' + y^2 = \dfrac{-4}{x^2}$; **15.** $y' + \sin y + x\cos y + x = 0$;

16. $\left(\dfrac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}} + \dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{y}\right)dx + \left(\dfrac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}} + \dfrac{1}{y} - \dfrac{x}{y^2}\right)dy = 0$, $y(1) = 1$;

17. $\left(y^2 - y\operatorname{tg}(xy)\right)dx + \left(2xy - x\operatorname{tg}(xy)\right)dx = 0$;

18. $\left(x-\dfrac{\sin^2 y}{x}\right)dx+\sin 2y dy=0$;

19. $\left(2xy^2-3y^3\right)dx+\left(7-3xy^2\right)dy=0$;

20. $\mu(\omega)$: $\left(1+\dfrac{y}{x+y}\right)dx+\dfrac{y}{x+y}dy=0$, $\omega=x+y$;

21. $y'^2-\left(y+x^2\right)y'+x^2y=0$, $y(0)=2$, $y'(0)=0$;

22. $y'\left(1+y'^2\right)^{\frac{3}{2}}=1$;

23. $\left(y'+\dfrac{2}{x}\right)^3=\left(2\ln x+y\right)^2$; **24.** $x=\ln y'\left(\ln y'+1\right)$;

25. $y'=y-y'^3$;

26. $x^4y'^2-xy'-y=0$; **27.** $y=x\left(1+y'\right)+y'^2$;

28. $xy'^2-yy'-y'+1=0$;

29. $y''=2x\ln x$; **30.** $\arcsin y''-x-y''^2=0$; **31.** $y''\mathrm{tg}x=y'+1$;

32. $y^4-y^3y''=1$; **33.** $y''=\dfrac{1}{3y\sqrt[3]{y^2}}$; **34.**

$yy''-\dfrac{yy'}{x\ln x}-y'^2=3x^2y^2\ln x$;

35. $x\left(yy''-y'^2\right)=yy'\ln\left(\dfrac{y'}{xy}\right)$;

36. $\left(1+x^2\right)y''+2xy'=12x^3$, $y(1)=\pi$, $y'(1)=2$;

37. $y''\mathrm{sh}x+y'\mathrm{ch}x=y'$.

38. Замедляющее действие на диск, вращающийся в жидкости, пропорционально угловой скорости вращения. Найти угловую скорость диска через 3 минуты после начала вращения со скоростью 200 об/мин., по истечении одной минуты диск вращается со скоростью 120 об/мин.

39. Найти общий интеграл уравнения Риккати, если известны три его частных решения y_1, y_2, y_3.

40. Найти особые решения уравнения: $y'^2-2xy'\sqrt{y}+4y\sqrt{y}=0$.

Вариант 8

1. $3e^x \operatorname{tg} y dx + \left(1-e^x\right)\cos^{-2} y dy = 0$, $y(1) = \dfrac{\pi}{4}$; **2.** $y' = 3^{2x+y} + 3^{2x-y}$;

3. $y\left(1+x^2\right)y' = 1+y^2$; **4.** $y' = 3x+4y$, $y(0) = -\dfrac{1}{4}$;

5. $y' = \dfrac{x+y-2}{4-x-y}$;

6. $y^2 - 4xy + 4x^2 y' = 0$; **7.** $xy' = y\left(1+\ln\dfrac{y}{x}\right)$, $y(1)=1$;

8. $(x-y+4)dy + (x+y-2)dx = 0$;

9. $y' + \dfrac{y}{x} = \sin x$, $y(\pi) = \dfrac{1}{\pi}$; **10.** $\left(104y^3 - x\right)y' = 4y$, $y(8)=1$;

11. $2y' + y\cos x = y^{-1}\cos x(1+\sin x)$, $y(0)=1$;

12. $2\sin y dx = x\left(x^2\sin^2 y - \cos y\right)dy$; **13.** $y' - 4y^2 + \dfrac{y}{x} + \dfrac{4}{x^2} = 0$;

14. $y' + y + e^x y^2 = e^{-x}$, $y(0) = 2$; **15.** $y'e^y + \dfrac{1}{x}e^y - e^x = 0$;

16. $(\sin 2x - 2\cos(x+y))dx - 2\cos(x+y)dy = 0$;

17. $\left(2\dfrac{x}{y^2} - 2\dfrac{y^2}{x^3}\right)dx + \left(2\dfrac{y}{x^2} - 2\dfrac{x^2}{y^3}\right)dy = 0$, $y(1)=1$;

18. $\left(\dfrac{y}{x} - 1\right)dy + \left(\dfrac{y^2}{x^2} - 3\dfrac{y}{x} + 2\right)dx = 0$;

19. $\left(\dfrac{y}{x^2} - y^2\right)dx + \left(y^2 - xy\right)dy = 0$;

20. $\mu(\omega)$: $\left(2+3\dfrac{y}{x}\right)dx + \left(\dfrac{x}{y} + 6 - 3\dfrac{y}{x}\right)dy = 0$, $\omega = xy$;

21. $y'^2 + y^2\left(\ln^2 y - 1\right) = 0$, $y\left(\dfrac{\pi}{6}\right) = \sqrt{e}$, $y'\left(\dfrac{\pi}{6}\right) = -\dfrac{\sqrt{3e}}{2}$;

22. $(x+1)^2 y'^3 + y = 1$; **23.** $y'e^{y'} - y'^2 = 1$; **24.** $x = \cos y' - y'^2$;

25. $y = \ln\left(y' + \sqrt{y'^2 - 1}\right)$; **26.** $y = -xy' + y'^2$;

27. $xy' = y + x^2\sqrt{1+y'^2}$ **;**

28. $\ln y' + 2\left(xy' - y\right) = 0$ **; 29.** $y^{(4)} = e^{ax}$ **; 30.** $xy'' = y'\ln\dfrac{y'}{x}$ **;**

31. $\mathrm{arctg}y'' - x + \ln y'' = 0$ **; 32.** $2yy'' = 3y'^3$ **; 33.** $yy'' = y'^2 + y^2y'$ **;**

34. $yy'' = y'^2 + y^2\sin x + yy'\mathrm{ctg}x$ **;**

35. $x\left(yy'' - y'^2\right) = yy' + y\sqrt{y'^2 + x^2y^2}$ **;**

36. $xy''' + y'' = \dfrac{1}{\sqrt{x}}$, $y(1) = \dfrac{2}{3}$, $y'(1) = -1$, $y''(1) = 1$ **;**

37. $\dfrac{y''}{x} - \dfrac{y'}{x^2} = 4yy'$ **.**

38. Найти давление воздуха P на высоте 1000 м, если давление воздуха равно 1 кг/см на уровне моря и 0,92 кг/см на высоте 500 м.

39. Доказать, что если три частных решения уравнения Риккати являются периодическими с периодом ω, то и все его решения будут периодическими с тем же периодом.

40. Найти особые решения уравнения: $y = xy' - a\sqrt{1+y'^2}$.

Вариант 9

1. $\left(y^4+1\right)xdx - y\left(1+x^2\right)dy = 0$, $y(1) = 0$;

2. $y' = 5^{2\left(x^2-y\right)}x$, $y(0) = 0$; **3.** $\left(1-x^2\right)y' - xy = xy^2$ **;**

4. $y' = \dfrac{2}{x+2y}$ **; 5.** $\left(4x - y + 5\right)y' + 2y - 8x = 0$ **; 6.** $y' = \dfrac{xy - y^2}{x^2 - 2xy}$ **;**

7. $\left(1 + e^{x/y}\right)dx + e^{x/y}\left(1 - \dfrac{x}{y}\right)dy = 0$, $y(0) = 1$ **;**

8. $\left(x - 2y + 3\right)dy + \left(2x + y - 1\right)dx = 0$ **;**

9. $y' + \dfrac{y}{2x} = x^2$, $y(1) = 1$ **; 10.** $dx + \left(xy - y^3\right)dy = 0$, $y(-1) = 0$ **;**

11. $y' + 4x^3y = 4y^2e^{4x}\left(1-x^2\right)$, $y(0) = -1$ **;**

12. $\left(x^2 + y^2 + 1\right)dy + xydx = 0$, $y(2) = 1$ **;**

13. $y'+(2x-1)y+y^2=x-x^2-1$; **14.** $y'=y^2-\dfrac{2}{x^2}$;

15. $\cos x dx-\dfrac{\sin y}{y}dy=\left(y^2+y\right)dy$;

16. $\left(xy^2+\dfrac{x}{y^2}\right)dx+\left(x^2y-\dfrac{x^2}{y^3}\right)dy=0$, $y(1)=2$;

17. $e^y(\cos x dy-\sin x dx)+e^x\left(y(1+x)dx+xdy\right)=0$;

18. $(3y+2x)dy+\left(3x+6y+3\dfrac{y^2}{x}\right)dx=0$;

19. $\left(\dfrac{2x}{\left(\dfrac{x}{y}\right)^2+1}-y\right)dx+\left(\dfrac{2y}{\left(\dfrac{x}{y}\right)^2+1}+x\right)dy=0$;

20. $\mu(\omega)$: $\left(3\dfrac{y}{x}+2+\dfrac{2}{y}\right)dx+\left(6+\dfrac{x}{y}+\dfrac{3}{xy}\right)dy=0$, $\omega=xy$;

21. $y'^2=y^3-y^2$, $y\left(\dfrac{\pi}{2}\right)=2$, $y'\left(\dfrac{\pi}{2}\right)=2$;

22. $\left(y'+2x-1\right)^3=x^2+x+y$;

23. $y'^3-\ln y'+1=0$; **24.** $y'=\ln\left(\dfrac{x}{y'^2}\right)$; **25.** $y=\operatorname{arctg}y'+y'^2$;

26. $y'^2+(x+a)y'-y=0$; **27.** $y=x+y'^2-y'$;

28. $xy'^3-yy'^2+1=0$;

29. $y'''=x+\cos 2x$; **30.** $\ln\left(y''+\sqrt{1+y''^2}\right)-x=0$;

31. $2y''=\dfrac{y'}{x}+\dfrac{x^2}{y'}$;

32. $yy''+y'^2=1$; **33.** $y''(1+yy')=y'\left(1+y'^2\right)$;

34. $yy''-yy'+y'^2+e^xy^2=0$;

35. $2x\left(yy''-y'^2\right)+y'^2=y^2$; **36.** $\left(1+x^2\right)y''-2yy'^2=\dfrac{y'\left(1+y^2\right)}{x}$;

37. $(x+1)y'''+y''=x+1$, $y(1)=\dfrac{4}{3}$, $y'(1)=1$, $y''(1)=0$.

38. Цепь длиной 6 м соскальзывает вниз со стола без трения. Если движение начинается, когда свисает 1 м цепи, то за какое время соскользнет вся цепь?

39. Доказать, что общее решение уравнения Риккати есть дробно-линейная функция от произвольной постоянной С.

40. Найти особые решения уравнения: $4(1-y)=(3y-2)^2\,y'^2$.

Вариант 10

1. $\ln(\cos y)dx+x\operatorname{tg}y dy=0$; **2.** $2yy'=e^{x-y^2}-e^{-x-y^2}$, $y(0)=1$;

3. $yy'=\dfrac{1-2x}{y}$, $y(1)=1$; **4.** $y'+\sin(3x-y)=0$;

5. $(x-y)dx+(3x-3x-1)dy=0$;

6. $\left(3x^2y-4xy^2\right)dx+\left(x^3-4x^2y+12y^3\right)dy=0$;

7. $x\sin\dfrac{y}{x}y'+x=y\sin\dfrac{y}{x}$, $y(1)=0$;

8. $(6x+y-1)dx+(4x+y-2)dy=0$;

9. $y'+\dfrac{2x}{1+x^2}y=\dfrac{2x^2}{1+x^2}$, $y(0)=\dfrac{2}{3}$;

10. $\left(3y\cos 2y-2y^2\sin 2y-2x\right)y'=y$, $y(16)=\pi$;

11. $3y'+2xy=2xy^{-2}e^{-2x^2}$, $y(0)=1$; **12.** $dx=2xy\left(x^2y^2-1\right)dy$;

13. $y'+(2x+1)y-y^2=x^2+x-5$; **14.** $y'+y^2=\dfrac{1}{x^4}$, $y(1)=0$;

15. $(y'+2x)e^y=2xe^{-x^2}$; **16.** $\left(\dfrac{1}{x^2}+3\dfrac{y^2}{x^4}\right)dx-\dfrac{2y}{x^3}dy=0$;

17. $\dfrac{2x\left(1-e^{y}\right)}{\left(1+x^{2}\right)^{2}}dx+\dfrac{e^{y}}{\left(1+x^{2}\right)}dy=0$**,** $y(1)=\dfrac{1}{2}$ **;**

18. $\left(x\cos y-y\sin y\right)dy+\left(x\sin y+y\cos y\right)dx=0$ **;**

19. $\left(3x^{2}y+y^{3}\right)dx+\left(5y-2x^{3}\right)dy=0$ **;**

20. $\mu(\omega)$**:** $ydx-\left(x^{2}+y^{2}+x\right)dy=0$**,** $\omega=x^{2}+y^{2}$ **;**

21. $xy'^{2}+y'\left(x-y-3x^{3}\right)-3x^{3}-y=0$**;** **22.** $y'^{3}-x^{2}y=y'\left(x^{2}-yy'\right)$**;**

23. $a^{2}=\dfrac{y'^{2}}{2}+y'^{2/3}$ **;** **24.** $x\left(y'+1\right)=y'^{2}+y'+1$ **;**

25. $y=\sqrt{y'+1}-\sqrt{y'-1}$ **;**

26. $y'^{2}-2xy'+y=0$ **;** **27.** $2yy'=x\left(y'^{2}+4\right)$ **;**

28. $\left(3x+1\right)y'^{2}-3\left(y+2\right)y'+9=0$ **;**

29. $y'''=27e^{3x}+120x^{3}$ **;** **30.** $y''\arcsin y''-x=0$ **;**

31. $y''=\dfrac{y'}{x}+x$ **;**

32. $2yy''+y'^{2}+y'^{4}=0$ **;** **33.** $yy''^{2}=1$ **;**

34. $\left(xyy''-y^{2}-xy'^{2}\right)\ln x=2yy'$ **;**

35. $yy'-yy''=xyy''-xy'^{2}$ **;** **36.** $y''\sin^{2}x+y'\sin 2x=2yy'$ **;**

37. $y''+\dfrac{2x}{1+x^{2}}y'=4x$ **,** $y(1)=\dfrac{\pi}{4}$**,** $y'(1)=\dfrac{5}{2}$ **.**

38. Скорость охлаждения тела в воздухе пропорциональна разности температур тела и воздуха. Если температура тела равна $20^{o}C$, и тело в течение часа охлаждается от $100^{o}C$ до $30^{o}C$, то через сколько минут с начала охлаждения его температура понизится до $60^{o}C$?

39. Доказать, что уравнение Риккати остается таковым при любой замене независимой переменной $x=\varphi(t)$ и любом дробно-линейном преобразовании искомой функции $y=\dfrac{\alpha(x)z+\beta(x)}{\gamma(x)z+\delta(x)}$,

$\alpha\delta-\beta\gamma=0$ при $a<x<b$.

40. Найти особые решения уравнения: $y'^2 - 2xy' + y = 0$.

Вариант 11

1. $y'\sin x = y\ln y$, $y\left(\dfrac{\pi}{2}\right) = e$; **2.** $y' = \operatorname{ch}(x+y) + \operatorname{ch}(x-y)$;

3. $x(1+y^2)dx + y(1+x^2)dy = 0$, $y(0) = 0$ **;**

4. $y' = \sqrt{2x+y-3}$ **; 5.** $(y-4x)dx + (3y-12x+4)dy = 0$ **;**

6. $x^2y' = y^2 + xy + x^2$, $y(e) = e$ **;**

7. $\left(\operatorname{tg}\dfrac{y}{x} + 1 + \dfrac{y}{\cos^2\dfrac{y}{x}}\right)dx - \dfrac{dy}{\cos^2\dfrac{y}{x}} = 0$ **;**

8. $(x-2)dx + (y-2x+1)dy = 0$ **; 9.** $y' - \dfrac{2x-5}{x^2}y = 5$, $y(2) = 4$ **;**

10. $8(4y^3 + xy - y)y' = 1$, $y(0) = 0$ **;**

11. $2xy' - 3y = -(5x^2+3)y^3$, $y(1) = \dfrac{1}{\sqrt{2}}$ **;**

12. $(xy + x^2y^3)y' = 1$, $y(1) = 0$ **;**

13. $y' - (2x-1)y + y^2 = x - x^2 + 3$ **;**

14. $y' - y(2e^x + 1) + y^2e^{2x} + 1 + 2e^{-x} = 0$ **;**

15. $(2x-1)dx - \left(\dfrac{x^2-x}{y} + 2y^2\right)dy = 0$ **;**

16. $\dfrac{y}{x^2}\cos\dfrac{y}{x}dx - \left(\dfrac{1}{x}\cos\dfrac{y}{x} + 2y\right)dy = 0$, $y(2) = \pi$ **;**

17. $\left(\dfrac{1}{y^2} + y - \dfrac{2y}{x^3}\right)dx + \left(\dfrac{1}{x^2} + x - \dfrac{2x}{y^3}\right)dy = 0$ **;**

18. $(2x^2y + 2y + 5)dx + (2x^3 + 2x)dy = 0$ **;**

19. $\dfrac{1}{y^2} + \sin 2x - \dfrac{2\cos^2 x}{y}y' = 0$ **;**

20. $\mu(\omega)$**:** $\left(2x^2y-x\right)y'-2xy^2-y=0$**,** $\omega=xy$ **;**

21. $yy'+y'^2=x^2+xy$**,** $y(1)=0$**,** $y'(1)=1$ **;**

22. $y'^3+2xy^2=y'\left(2xy'+y^2\right)$**;**

23. $\sin y'-y'=1$ **; 24.** $x+y'=\ln^2 y'$**; 25.** $\left(y'+y\right)^2 y'=1$ **;**

26. $yy'^2+2xy'-y'=0$**; 27.** $2y\left(y+1\right)=xy'^2$**;**

28. $y=\ln\left(y'+1\right)-y'+xy'$ **;**

29. $y'''=\dfrac{1}{x}$ **; 30.** $\ln\left(1+y''^2\right)-x=0$ **; 31.** $y''-2y'\mathrm{ctg}x=\sin^3 x$ **;**

32. $yy''=y'^2+1$**; 33.** $y\left(1-\ln y\right)y''+\left(1+\ln y\right)y'^2=0$**;**

34. $\left(yy''-y'^2\right)x^2\cos\dfrac{1}{x}-yy'\sin\dfrac{1}{x}=y^2$ **;**

35. $\left(1-x^2\right)\left(yy''-y'^2\right)+xyy'=0$ **;**

36. $x^3y''+3x^2y'=2yy'$ **;**

37. $y'''\mathrm{cth}2x=2y''$**,** $y(0)=1$**,** $y'(0)=1$**;** $y''(0)=$ **4.**

38. Тело массы m скользит по горизонтальной плоскости под действием толчка, давшего начальную скорость V_0. На тело действует сила трения, равная $-km$. Найти расстояние, которое тело способно пройти.

39. Доказать, что уравнение $y'+ay=P(x)$, где $a=const\neq 0$, $P(x)$ – многочлен степени m, имеет частное решение вида $y_1=Q(x)$, где $Q(x)$ – многочлен степени m.

40. Найти особые решения уравнения: $y=x+2y'-y'^2$.

Вариант 12

1. $\dfrac{dx}{\cos^2 x\cos y}=-\mathrm{ctg}x\sin y\,dy$, $y\left(\dfrac{\pi}{4}\right)=\dfrac{\pi}{2}$;

2. $y'\sin\left(x-y\right)=\mathrm{ctg}x-\mathrm{ctg}y$ **;**

3. $y-xy'=a\left(1+x^2y'\right)$; **4.** $y'=\cos\left(2x+y\right)$**,** $y(0)=\dfrac{\pi}{2}$ **;**

6. $\left(2y-x+1\right)dx+\left(2x-4y\right)dy=0$; **7.** $xy'\ln\frac{y}{x}=x+\ln\frac{y}{x}$, $y\left(1\right)=1$;

8. $xy'-y=\sqrt{x^2+y^2}$; **9.** $\left(x-y+2\right)dy-\left(x+3y+2\right)dx=0$;

10. $y'+\frac{y}{x}=\frac{x+1}{x}e^x$, $y\left(1\right)=e$;

11. $\left(2\ln y-\ln^2 y\right)dy=ydx-xdy$, $y\left(4\right)=e^2$;

12. $3xy'+5y=\left(4x-5\right)y^4$, $y\left(1\right)=1$;

13. $3x^2+\left(y+x^3\right)y'=0$, $y\left(2\right)=0$; **14.** $y'=y^2+x^2+1-2xy$;

15. $y'+\frac{2y}{x}+y^2+\frac{1}{4x^2}=0$; **16.** $\frac{y'}{\cos^2 y}+\frac{\mathrm{tg}y}{x}=2$;

16. $\left(\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}+y\right)dx+\left(x+\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}\right)dy=0$, $y\left(3\right)=4$;

17. $\left(\frac{1}{y}\cos\frac{x}{y}-\frac{y}{x^2}\cos\frac{y}{x}\right)dx+\left(\frac{1}{x}\cos\frac{y}{x}-\frac{x}{y^2}\cos\frac{x}{y}\right)dy=0$;

18. $\left(x^4\ln x-2xy^3\right)dx+3x^2y^2dy=0$;

19. $e^y-\left(2ye^{2y}+xe^y\right)y'=0$;

20. $\mu\left(\omega\right)$: $\left(x-\frac{1}{xy}\right)dy+\left(y-\frac{1}{xy}\right)dy=0$, $\omega=xy$;

21. $xy'^2-2yy'-x=0$, $y\left(3\right)=4$, $y'\left(3\right)=5$;

22. $(y'+(x+1)e^x)^3=xe^x+y$; **23.** $2y'^3=1+y'$;

24. $(y'-x)^3=(y'+1)^2$; **25.** $y'=\arccos(\frac{y}{y'^2})$; **26.** $y=x+2y'-y'^2$;

27. $y=2xy'+\ln y'$; **28.** $y=xy'-y'^3$; **29.** $y''=x\sin(x)$;

30. $x=y''e^{-y''^2}$; **31.** $x^2y''+xy'=1$; **32.** $y''=y'\left(\frac{y'}{y}-2\sqrt{\frac{y'}{y}-4}\right)$;

33. $y''=ae^y$; **34.** $x^2yy''-2x^2y'^2+xyy'+y^2=0$;

35. $2xyy''-2xy'^2-yy'=\left(1-\frac{2}{\sqrt{x}}\right)y^2$;

36. $x^3y''' + 3x^2y'' = 1$, $y(1) = \frac{1}{2}$, $y'(1) = -\frac{3}{2}$, $y''(1) = 2$;

37. $sh^2x \cdot y'' + y' \cdot sh2x = 2yy'$;

38. В спокойной воде катер движется со скоростью 10 км/час. На полном ходу его двигатель был выключен, и через 2 минуты скорость катера уменьшилась до 0,5 км/час. Определить скорость катера через 40 сек. после выключения двигателя (считать сопротивление воды пропорциональным скорости катера).

39. Пусть $\Psi(x, y) = C$ есть общий интеграл уравнения

$M(x, y)dx + N(x, y)dy = 0$.

Доказать, что $\Phi(\Psi(x, y)) = C$, где Φ – любая дифференцируемая функция, также является общим интегралом этого уравнения.

40. Найти особые решения уравнения: $y^2(1 + y'^2) = a^2$.

Вариант 13

1. $(1 + y^2)dx - \left(2y + \sqrt{1 + y^2}\right)(1 + x)^{3/2}dy = 0$; **2.** $(1 + e^x)yy' = e^x$;

3. $y' = \sin(2x + y) + \sin(2x - y)$, $y\left(\frac{\pi}{4}\right) = -\frac{\pi}{6}$; **4.** $y' = \sqrt[3]{2x + 3y + 1}$;

5. $(y - 3x)dx + (6x - 2y - 1)dy = 0$; **6.** $ydx + \left(2\sqrt{xy} - x\right)dy = 0$,

$y(1) = 1$;

7. $xy' - y = x\mathrm{tg}\frac{y}{x} + x$; **8.** $y' = \frac{2x + y + 1}{x + 2y - 1}$; **9.** $y' - \frac{y}{x} = \frac{-2\ln x}{x}$,

$y(1) = 1$;

10. $2(x + y^4)y' = y$, $y(-2) = 1$;

11. $2y' + 3y\cos x = e^{2x}(2 + 3\cos x)y^{-1}$, $y(0) = 1$;

12. $x^{n-1}(a + xy') = yy'$; **13.** $xy' = y^2 - (2x + 1)y + x^2 + 2x$;

14. $y'\cos x - y\sin x + y^2 = \cos^2 x$, $y(0) = \frac{1}{2}$; **15.** $y'\mathrm{ch}y - \mathrm{sh}y = e^x$;

16. $\frac{1 + xy}{x^2y}dx + \frac{1 - xy}{xy^2}dy = 0$, $y(1) = 1$;

17. $\left(\sin y + y\sin x + \dfrac{1}{x}\right)dx + \left(x\cos y - \cos x + \dfrac{1}{y}\right)dy = 0$ **;**

18. $\left(x + \sin x + \sin y\right)dx + \cos y dy = 0$ **;**

19. $\dfrac{y'}{x^3} - \dfrac{y}{x^2} - \dfrac{3y\ln y}{x^4} = 0$ **;**

20. $\mu(\omega)$**:** $\left(2x^2y + x\right)y' - x^2y^3 + 2xy^2 + y = 0$ **,** $\omega = xy$ **;**

21. $xy' = \sqrt{1 + y'^2}$ **,** $y(2) = 0$ **,** $y'(2) = \dfrac{1}{\sqrt{3}}$ **;**

22. $\left(y' + \dfrac{1}{\sqrt{x}}\right)^3 = 2\sqrt{x} + y$ **;**

23. $y' - \sqrt{1 + y'^2} = 6$ **; 24.** $x + 1 = y'^2 + \cos y'$ **; 25.** $y = y'^3 - y'^5 + 1$ **;**

26. $y\ln(-y') = x(1 + y')$ **; 27.** $y = 2xy' + \sin y'$ **;**

28. $y = (x - 4)y' + 2y'^2$ **;**

29. $y'''\sin^4 x = \sin 2x$ **; 30.** $\dfrac{2}{y''^3} - y''^2 - x = 0$ **;**

31. $yy'' - 2yy'\ln y = y'^2$ **;**

32. $y'' = \dfrac{1}{\sqrt{y}}$ **; 33.** $x^4y''' + 2x^3y'' = 1$ **;**

34. $xyy'' - 2yy' - xy'^2 = x^3y^2$ **;**

35. $x^2yy'' = \left(y - xy'\right)^2$ **; 36.** $y'' - y' = 2yy'e^x$ **;**

37. $xy''' + y'' = \dfrac{2}{x^2}$ **,** $y(1) = 2$ **,** $y'(1) = 0$ **,** $y''(1) = -1$ **.**

38. Материальная точка массы $m = 1$ движется прямолинейно, приближаясь к центру, отталкивающему ее с силой, равной k^2x (где x – расстояние точки от центра). При $t = 0$ $x = a$, $\dfrac{dx}{dt} = ka$. Найти закон движения точки.

39. Доказать, что для однородного уравнения

$M(x,y)dx+N(x,y)dy=0$ функция $\dfrac{1}{M(x,y)x+N(x,y)y}$ есть интегрирующий множитель.

40. Найти особые решения уравнения: $y^2y'^2-2xyy'+2y^3-x^2=0$.

Вариант 14

1. $e^{1+x^2}\operatorname{tg}y dx-\dfrac{e^{2x}}{x-1}dy=0$, $y(1)=2\pi$; **2.** $y'=2^{x-y}$;

3. $\left(x+\sqrt{1+x^2}\right)ydy+\sqrt{1-y^2}dx=0$;

4. $dy=\dfrac{dx}{\sin^2(y-x)}$, $y(0)=\dfrac{\pi}{4}$; **5.** $(5x-y)dx+(2y-10x+5)dy=0$;

6. $xy'-y=\dfrac{x}{\operatorname{arctg}\dfrac{y}{x}}$, $y(1)=1$;

7. $\left(x^4+6x^2y^2+y^4\right)dx+4xy\left(x^2+y^2\right)dy=0$;

8. $y'=\dfrac{x-2}{x+2y-4}$; **9.** $y'+\dfrac{2}{x}y=x^2$, $y(1)=-\dfrac{5}{6}$;

10. $y^3(y-1)dx+3xy^2(y-1)dy=(y+2)dy$;

11. $3(xy'+y)=xy^2$, $y(1)=3$;

12. $y'=\dfrac{2x}{x^2\cos y+2\sin 2y}$; **13.** $x^2y'=x^2y^2+xy+1$, $y(1)=-\dfrac{1}{2}$;

14. $y'-4y+y^2e^{-2x}+e^{2x}=0$;

15. $e^y\left(y'+\dfrac{1}{x}\right)=e^x$; **16.** $\dfrac{dx}{y}-\dfrac{x+y^2}{y^2}dy=0$, $y(2)=1$;

17. $\left(e^{x/y}+1\right)dx+e^{x/y}\left(1-\dfrac{x}{y}\right)dy=0$;

18. $\left(1-x^2y\right)dx+x^2\left(y-x\right)dy=0$ **;**

19. $\left(1-\dfrac{x^2}{x^2+y^2}+y\right)dx-\dfrac{xy}{x^2+y^2}dy=0$ **;**

20. $\mu\left(\omega\right)$**:** $\left(2x^3y^2+x^2y\right)dy+\left(2x^2y^3+xy^2-x^3y^3\right)dx=0$ **,** $\omega=xy$ **;**

21. $\left(xy'-y\right)^2=2xy\left(1+y'^2\right)$, $y\left(1\right)=2$ **,** $y'\left(1\right)=-\dfrac{4}{3}$ **;**

22. $y'^3+xy^3=y'\left(y^2+xyy'\right)$**;** **23.** $y'^3-y'^2+\dfrac{1}{y'}=1$ **;**

24. $x=y'+\ln\left(1+y'^2\right)$**;**

25. $y=y'\sqrt{y'+1}$ **;** **26.** $8y'^3-12y'^2=27\left(y-x\right)$**;** **27.** $y=xy'^2-\dfrac{1}{y'}$ **;**

28. $y=xy'+\sqrt{y'}$ **;** **29.** $y''=\operatorname{arctg}x$ **;** **30.** $e^{y''}-x=\sqrt{y''}$ **;**

31. $2x^3y'''-x^2y''=y''^3$ **;**

32. $2y''=3y^2$ **;** **33.** $yy''-y'^2-y^2\ln y=0$ **;** **34.** $xyy''+xy'^2=yy'$ **;**

35. $xyy''-xy'^2+x^2y^2+\left(x-1\right)yy'=0$ **;**

36. $y''\cos x+y'\sin x=2yy'\cos^2 x$ **;**

37. $x^4y'''+4x^3y''=2x$ **,** $y\left(1\right)=3$ **,** $y'\left(1\right)=2$ **,** $y''\left(1\right)=1$ **.**

38. Одно вещество преобразуется в другое со скоростью, пропорциональной количеству не преобразованного вещества (коэффициент пропорциональности равен -2). Через сколько времени после начала реакции останется 1 % от первоначального количества вещества?

39. Показать, что если одна из интегральных кривых однородного уравнения $M\left(x,y\right)dx+N\left(x,y\right)dy=0$ замкнута, то и все остальные интегральные кривые замкнуты.

40. Найти особые решения уравнения: $\sqrt{1+y'^2}\left(y-xy'\right)=ay'$.

Вариант 15

1. $\left(1+e^{2x}\right)y^2dy=e^xdx$, $y\left(0\right)=0$; **2.** $y\ln^3 y+y'\sqrt{x+1}=0$, $y\left(0\right)=e$;

3. $y'\operatorname{sh}\left(x-y\right)=\operatorname{th}x-\operatorname{th}y$; **4.** $y'=\operatorname{tg}\left(x+y\right)$ **;**

5. $(x+y+2)dx+(2x+2y-1)dy=0$; **6.** $y'=1+\frac{y}{x}+\left(\frac{y}{x}\right)^2$;

7. $3y\sin\frac{3x}{y}dx+\left(y-3x\sin\frac{3x}{y}\right)dy=0$; **8.** $y'=\frac{x+2y}{3x-y+1}$;

9. $y'-\frac{y}{x}=-\frac{8}{x^2}$, $y(1)=4$; **10.** $2y^2dx+\left(x+e^{1/y}\right)dy=0$, $y(e)=1$;

11. $y'-y=2xy^2$, $y(0)=\frac{1}{2}$; **12.** $1-9xy^2y'=\left(y^5+y^2\right)x^{2/3}y'$;

13. $x^2y'+x^2y^2-4xy+4=0$;

14. $y'\sin x+y\cos x-2y^2+1=0$, $y\left(\frac{\pi}{2}\right)=1$;

15. $\frac{xy'}{y}-2\ln y=x^3$; **16.** $\frac{y}{x^2}dx-\frac{xy+1}{x}dy=0$, $y(1)=-2$;

17. $\frac{y+\sin x\cos^2(xy)}{\cos^2(xy)}dx+\left(\frac{x}{\cos^2(xy)}+\sin y\right)dy=0$;

18. $\left(x+y^2\right)dx-2xydy=0$;

19. $\cos(xy)dx+\left(\frac{1}{y^2}\sin(xy)+\frac{x}{y}\cos(xy)\right)dy=0$;

20 $\mu(\omega)$: $x(xy-3)y'+xy^2-y=0$, $\omega=xy$;

21. $x^2y'^2-2xyy'+y^2=x^2y^2-x^4$, $y(1)=2$, $y'(1)=2+\sqrt{3}$;

22. $(y'-\sin x)^3=27(y+\cos x)$; **23.** $\cos 2y'-y'=4$;

24. $y=\ln\frac{x}{y'}$;

25. $y=\sqrt{y'^3}+\frac{1}{\sqrt{y'}}$; **26.** $(xy'-y)^2=y'^2-2\frac{y}{x}y'+1$;

27. $y=\frac{3}{2}xy'+e^{y'}$;

28. $y=xy'-\sqrt{y'+1}$; **29.** $y''=\frac{1}{1+x^2}$; **30.** $\operatorname{arctg}y''-x-\frac{1}{y''}=0$;

31. $(x+a)y''+xy'^2=y'$; **32.** $(y''')^2-y''y^{(4)}=0$; **33.** $y^3y''=1$;

34. $x\left(yy''-y'^2\right)-2yy'=2x^4y^2$; **35.** $\left(yy''-y'^2\right)(x+1)=yy'-y^2$;

36. $x^3y'''+3x^2y''=\sqrt{x}$, $y(1)=\dfrac{1}{2}$, $y'(1)=0$, $y''(1)=1$;

37. $x^2y''-2xy'=6x^4yy'$.

38. Материальная точка массы m притягивается каждым из двух центров с силой, пропорциональной расстоянию с коэффициентом пропорциональности k. Найти закон движения точки, зная, что расстояние между центрами $2b$. В начальный момент точка находилась на отрезке, соединяющем центры, на расстоянии C от его середины и мела скорость, равную 0.

39. Общее решение уравнения $y'+p(x)y=q(x)$ имеет вид $y=CA(x)+B(x)$. Доказать, что дифференциальное уравнение любого семейства кривых этого вида есть линейное уравнение.

40. Найти особые решения уравнения:

Вариант 16

1. $x\sqrt{1+y^2}dx+y\sqrt{1+x^2}dy=0$, $y(0)=0$;

2. $yy'=2x\sec y$, $y(0)=\pi$;

3. $yy'=e^{x-y^2}+e^{-x-y^2}$; **4.** $y'=\mathrm{tg}(2x+y)$;

5. $(2x-3y)dx+(6x-9y+15)dy=0$; **6.** $\dfrac{y}{y'}=x+y$;

7. $(y-x)ydx+x^2dy=0$, $y(e)=1$; **8.** $y'=2\left(\dfrac{y+2}{x+y+1}\right)^2$;

9. $y'+\dfrac{y}{x}=3x$, $y(1)=1$; **10.** $\left(xy+\sqrt{y}\right)dy+y^2dx=0$, $y(e)=1$;

11. $2xy'-3y=-\left(20x^2+12\right)y^3$, $y(1)=\dfrac{1}{2\sqrt{2}}$;

12. $\left(4y^2+x^2\right)y'=xy$; **13.** $xy'+(x-1)y+y^2=2x^2$, $y(1)=1$;

14. $y'-y^2+2y\sin x=\sin^2 x+\cos x$; **15.** $\mathrm{ctg}y-\dfrac{xy'}{\sin^2 y}=3x^2$;

16. $\left(xe^x+\frac{y}{x^2}\right)dx-\frac{dy}{x}=0$ **;**

17. $\left(3x^2\mathrm{tg}y-\frac{2y^3}{x^3}\right)dx+\left(x^3\sec^2 y+4y^3+\frac{3y^2}{x^2}\right)dy=0$ **;**

18. $\left(2x^2y^2+xy+x\right)dx+\left(2x^3y+x^2\right)dy=0$ **;**

19. $\left(7xy^3+y-5x\right)y'+y^4-5y=0$

20. $\mu(\omega)$**:** $\left(3y^2-x\right)dx+\left(2y^3-6xy\right)dy=0$, $\omega=x+y^2$ **;**

21. $y'^2-2yy'+y^2\sin^2 x=0$, $y(0)=1$, $y'(0)=2$ **;**

22. $y'^3+y^2=y'x\left(y'+\frac{y^2}{x^2}\right)$**;** **23.** $2y'+3y'^4=1$ **;**

24. $x=y'+\sqrt{y'+1}$ **;**

25. $y'+y=y'\mathrm{ch}y'-\mathrm{sh}y'$ **;** **26.** $xy'=2y+\sqrt{1+y'^2}$ **;**

27. $yy'^2-2xy'+y=0$ **;**

28. $y=xy'-y'^{3/2}$**;** **29.** $y''=\frac{1}{\cos^2 x}$**;** **30.** $y''^3-x+\ln y''=0$ **;**

31. $\left(1+x^2\right)y''+y'^2+1=0$ **;** **32.** $y''\cos y+y'^2\sin y=y'$ **;**

33. $y''=3y^3$ **;**

34. $(1-x)\left(yy''-y'^2\right)-yy'=0$**;** **35.** $x(2\ln x+1)y^2-yy'=xyy''-xy'^2$ **;**

36. $y'''\mathrm{cth}2x=2y''$ **;**

37. $y''\ln x-\frac{y'}{x}=2yy'\ln^2 x$, $y(e)=-1$, $y'(e)=1$ **.**

38. Силу сопротивления воздуха при падении тела можно считать пропорциональной квадрату скорости. Найти закон движения, если начальная скорость равна 0.

39. Доказать, что если уравнение $M(x,y)dx+N(x,y)dy=0$ – однородное, а $M(x,y)dx+N(x,y)dy$ – полный дифференциал, то общий интеграл уравнения имеет вид: $M(x,y)x+N(x,y)y=C$.

40. Найти особые решения уравнения: $x-y=\frac{4}{9}y'^2-\frac{8}{27}y'^3$.

Вариант 17

1. $\dfrac{dx}{x(y-1)}+\dfrac{dy}{y(x+2)}=0$, $y(1)=1$; **2.** $yy'=2x7^{x^2-y}$;

3. $\sqrt{\dfrac{1+\cos 2x}{1+\sin y}}+y'=0$, $y\left(\dfrac{\pi}{2}\right)=\dfrac{\pi}{2}$;

4. $y'=\sec^2(3x+2y)$; **5.** $(x+y-1)dx-(3x+3y+4)dy=0$;

6. $\left(\sqrt{xy}-x\right)dy+ydx=0$; **7.** $xy'=y\left(2+\ln\dfrac{y}{x}\right)$, $y(1)=e$;

8. $y'=\dfrac{3x-1}{6x+y-2}$;

9. $y'+\dfrac{3y}{x}=\dfrac{2}{x^3}$, $y(1)=1$;

10. $2y\sqrt{y}dx-\left(6x\sqrt{y}+7\right)dy=0$, $y(-4)=1$;

11. $xy'+y=y^2\ln x$, $y(1)=\dfrac{1}{2}$;

12. $dx+\left(xy-x^3y^3\right)dy=0$, $y(2)=0$; **13.** $y'+3\dfrac{y}{x}+y^2+\dfrac{1}{x^2}=0$;

14. $y'+y\left(1-2e^{2x}\right)+y^2e^x+e^{3x}-2e^x=0$;

15. $x\left(3y^2+1\right)y'-y^3-y=2x$;

16. $\left(\dfrac{y}{x}+\ln y+2xy\right)dx+\left(\ln x+\dfrac{x}{y}+x^2+1\right)dy=0$;

17. $\left(\dfrac{xy}{\sqrt{1+x^2}}+2xy-\dfrac{y}{x}\right)dx+\left(\sqrt{1+x^2}+x^2-\ln x\right)dy=0$;

18. $y^4-2\left(\dfrac{y}{x}\right)^3+\left(xy^3+2\right)y'=0$;

19. $\left(x^2+y^2\right)(xdy-ydx)=(a+x)x^4dx$;

20. $\mu(\omega)$: $\left(x^2+y^2\right)dx-2xydy=0$, $\omega=y^2-x^2$;

21. $y'^2+1=2y'\operatorname{ch}x$, $y(1)=1$, $y'(1)=e$;

22. $3\left(y'+\sqrt{x}\right)^3=2x\sqrt{x}+3y$ **;**

23. $\dfrac{1}{\sqrt{1+y'^2}}+y'=1$**;** **24.** $x=\sin y'+\dfrac{1}{y'}$**;** **25.** $y'^2+y=\ln\left(y'+1\right)$**;**

26. $y'^3-4xyy'+8y^2=0$ **;** **27.** $x^2y'^2-2xyy'-x^2=0$ **;**

28. $y=xy'+\dfrac{1}{\sqrt{y'}}$**;**

29. $\sqrt{1-x}\,y^{(4)}=\sqrt{1+x}$ **;** **30.** $\dfrac{1}{\left(y''-1\right)^2}-x=\dfrac{1}{\left(y''+1\right)^2}$**;**

31. $4y'+y''^2=4xy''$ **;**

32. $yy'y''=y'^3+y''^2$ **;** **33.** $y''=2yy'$**;**

34. $y^2-\sqrt{1-x^2}\left(yy''-y'^2\right)=0$**;**

35. $\left(yy''-y'^2\right)\cos x-yy'\sin x+y^2\sin 2x=0$ **;**

36. $y''\sin x-y'\cos x=2yy'\sin^2 x$ **;**

37. $xy'''+y''=\sqrt{x}$ **,** $y(0)=2$ **,** $y'(0)=-1$**,** $y''(0)=1$**.**

38. Груз весом 4 кг подвешен к пружине и увеличивает ее длину на 1 см. Найти закон движения этого груза, полагая, что верхний конец пружины совершает гармонические колебания, закон которого $y=\sin\sqrt{100g}t$, где y измеряется по вертикали.

39. Доказать, что всякие четыре частные решения y_1, y_2, y_3, y_4 уравнения Риккати связаны ангармоническим соотношением:

$$\frac{y_4-y_2}{y_4-y_1}\div\frac{y_3-y_2}{y_3-y_1}=const\ .$$

40. Найти особые решения уравнения: $x-y=\dfrac{4}{9}y'^2-\dfrac{8}{27}y'^3$.

Вариант 18

1. $5e^x\operatorname{cosec}y\,dx+\left(1-e^x\right)\sec^2 y\,dy=0$, $y(\ln 2)=0$;

2. $\dfrac{4+y^2}{\sqrt{x^2+4x+13}}=\dfrac{3y+2}{x+1}y'$;

3. $y' = 3^{2x-y} + 3^{2x+y}$, $y(0) = 0$; **4.** $y' = \mathrm{th}(x-2y)$;

5. $(6x-2y)dx + (y-3x+2)dy = 0$; **6.** $y' = \dfrac{y}{\sqrt{x^2-y^2}+x}$;

7. $\left(\ln^2\dfrac{y}{x} - 2\ln\dfrac{y}{x}\right)dx + \dfrac{x}{y}dy = 0$, $y(1) = 1$;

8. $(2x-y+3)^2 dy = (y-1)^2 dx$; **9.** $y' + \dfrac{1-2x}{x^2}y = 1$, $y(1) = 1$;

10. $(y^2+2y-x)y' = 1$, $y(2) = 0$;

11. $y'(1+x^2) - y + y^2\mathrm{arctg}x = 0$, $y(0) = 1$;

12. $4y + 3xy' - e^y x^5 y^4 y' = 0$;

13. $y' + y^2 - 2y - \dfrac{4y}{x} + \dfrac{2}{x} + \dfrac{4}{x^2} = 0$;

14. $xy' + (2x-1)y - y^2 = x^2$, $y(0) = 2$;

15. $\left(1 - \dfrac{1}{y^2}\right)y' - \dfrac{1}{x}\left(y + \dfrac{1}{y}\right) = x$;

16. $(2xy + y^3 - 2x)dx + (x^2 + 3xy^2 + 1)dy = 0$;

17. $\left(\dfrac{\cos y}{\cos^2 x} + y\cos(xy)\right)dx + (x\cos(xy) - \mathrm{tg}x\sin y)dy = 0$;

18. $(x\ln y + y + xy)dx + \left(\dfrac{x^2}{y} + x\ln x + x^2\right)dy = 0$;

19. $(ye^{x-y} + 1 + ye^{-y})dx + (e^{x-y} + x + xe^{-y})dy = 0$;

20. $\mu(\omega)$: $(x^2y + y^3 + x^2y^3 + y)dx + (x^3y^2 + x - xy^2 - x^3)dy = 0$, $\omega = xy$;

21. $y'^2 + 1 = y'(\mathrm{th}x + \mathrm{cth}x)$, $y(0) = 0$, $y'(0) = 0$;

22. $(y' + \ln x + 1)^3 = (y + x\ln x)^4$;

23. $e^{y'} - e^{y'^2} = 1$; **24.** $x = \sqrt{y'^2+1} - \ln y'$;

25. $y = y'\mathrm{tg}y' + \ln(\cos y')$;

26. $x^2(y - xy') = yy'^2$; **27.** $xy'^2 + xy' = y$; **28.** $y = xy' + e^{-y'-1}$;

29. $\left(x^2+2x\right)y''' = 4$ **;** **30.** $y''^3 - x = \dfrac{1}{y''^2}$ **;**

31. $1+y'^2+xy'y'' = ay''\sqrt{1+y'^2}$ **;**

32. $y''' = 3yy'$ **;** **33.** $y'' = 2y\left(1+y^2\right)\left(1+3y^2\right)y'$ **;**

34. $\left(1+x^2\right)\left(yy''-y'^2\right)-y^2 = 0$ **;**

35. $x\ln x\left(yy''-y'^2\right)+2y^2\ln x = 2yy'$ **;**

36. $y''\left(x+1\right)-y' = 2\left(x+1\right)^2 yy'$ **;**

37. $y'''\mathrm{tg}5x = 5y''$ **,** $y\left(\dfrac{\pi}{10}\right)=5$**,** $y'\left(\dfrac{\pi}{10}\right)=0$**,** $y''\left(\dfrac{\pi}{10}\right)=\dfrac{1}{5}$**.**

38. В резервуаре находится 100 литров раствора, содержащего 10 кг соли. В резервуар втекает вода со скоростью 3 л/мин., а смесь вытекает из резервуара со скоростью 2,5 л/мин., причем концентрация поддерживается равномерной путем перемешивания. Сколько соли останется в резервуаре по истечении часа?

39. Найти общее решение уравнения Риккати, если известны два его частных решения y_1 и y_2.

40. Найти особые решения уравнения: $\left(xy'-y^2\right)^2 = y'^2 - \dfrac{2yy'}{x}+1$.

Вариант 19

1. $\sec^2 x\mathrm{ctg}y dx + \sec^2 y\mathrm{tg}x dy = 0$, $y\left(\dfrac{\pi}{4}\right)=\dfrac{\pi}{3}$;

2. $xy^2+x+y'\sqrt{1-x^2} = 0$, $y\left(1\right)=1$;

3. $y' = e^{6x+y}+e^{6x-y}$; **4.** $y' = \mathrm{tg}^2\left(y-x\right)+2$ **;** **5.** $y' = \dfrac{2x-y}{2y-4x+2}$ **;**

6. $\left(x+6\sqrt{x^2+y^2}\right)dy = ydx$ **;** **7.** $1+\ln\dfrac{y}{x}+\ln^2\dfrac{y}{x} = \dfrac{x}{y}y'$ **,** $y\left(1\right)=1$ **;**

8. $\left(12y-5x-8\right)y'-5y+2x+3=0$ **;** **9.** $y' = \dfrac{y}{x}-\dfrac{2}{x^2}$ **,** $y\left(1\right)=1$ **;**

10. $dx+\left(2x+\sin 2y-2\cos^2 y\right)dy = 0$ **;** **11.** $xy'+y = xy^2$ **,** $y\left(1\right)=1$ **;**

12. $xy'-\sqrt{1-y^2} = x^2y'\arcsin y$ **;**

13. $y'e^x - 2ye^x + y^2e^{-x} = e^{3x}$, $y(0) = 3$;

14. $xy' + y(4x-3) + y^2 + 4x^2 - 4x + 2 = 0$; **15.** $\dfrac{y'}{y} - \dfrac{\ln y}{x} = x\ln x$;

16. $e^y dx + (\cos y + xe^y)dy = 0$, $y(2) = 0$;

17. $\dfrac{xdx + ydy}{\sqrt{1 + x^2 + y^2}} = \dfrac{xdy - ydx}{x^2 + y^2}$;

18. $3e^y dx + \left(xe^y - \dfrac{1}{x^2}\right)dy = 0$;

19. $(3x^2 - 4xy)dx + \left(\dfrac{x^3}{y} - 4x^2 + 12y^2\right)dy = 0$;

20. $\mu(\omega)$: ,$(2x + x^2 + y^2)dx + (2y + x^2 + y^2)dy = 0$, $\omega = x + y$;

21. $y'^2 - 2yy' + 4xy = 4x^2$, $y(2) = 5$, $y'(2) = 4$;

22. $(y' + \mathrm{ch}x)^5 = (y + \mathrm{sh}x)^2$;

23. $y' + \mathrm{tg}y' = 3$; **24.** $x = \arcsin y' + y'$; **25.** $y' = \sqrt{y - \sqrt{y'}}$;

26. $2y = 2x^2 + 4xy' + y'^2$; **27.** $y'^3 + xy'^2 = y$; **28.** $y = xy' + y' + \dfrac{1}{y'}$;

29. $\sqrt{1 + x^2} \cdot y''' - 1 = 0$; **30.** $\ln(1 + y'') + \sqrt{y''} = x$; **31.** $xy'' = y' + x^2$;

32. $y'' + y^2 = 2e^{-y}$; **33.** $y'' + y'\sin y = 0$;

34. $(1 + x^2)(yy'' - y'^2) - 2xyy' = (1 + x^2)^2 y^2$;

35. $\sqrt{1 - x^2}\,(yy'' - y'^2) + xy^2 = 0$; **36.** $y''\mathrm{sh}x - y'\mathrm{ch}x = 2yy'\mathrm{sh}^2 x$;

37. $xy''' + y'' = x + 1$, $y(1) = 1$, $y'\left(\dfrac{5}{4}\right)$, $y''(1) = \dfrac{1}{2}$.

38. Моторная лодка весом 300 кг движется прямолинейно с начальной скоростью 66 м/сек. Сопротивление воды пропорционально скорости и равно 10 кг при скорости 1 м/сек. Через сколько времени скорость будет равна 8 м/сек?

39. Найти частные производные от решения уравнения $y' + p(x)y = 0$ с начальными данными x_0, y_0 по этим начальным данным в точке (x_0, y_0).

40. Найти особые решения уравнения:
$\left((x-y)^2 - 1\right)y'^2 - 2y' + (x-y)^2 = 1$.

Вариант 20

1. $\left(\sqrt{xy} - \sqrt{x}\right)dx + \left(\sqrt{xy} + \sqrt{y}\right)dy = 0$, $y(0) = 4$;

2. $yy' = 2^{x-y^2}$, $y(0) = 0$;

3. $y' = \dfrac{\cos y - \sin y - 1}{\cos x - \sin x + 1}$; **4.** $y' = \operatorname{ctg}(x + 3y)$;

5. $(x - y - 1)dx + (4y - 4x + 3)dy = 0$;

6. $y - xy' = x + yy'$; **7.** $\left(\cos^2 \dfrac{y}{x} - \dfrac{y}{x \operatorname{tg} \dfrac{y}{x}}\right)dx + \dfrac{dy}{\operatorname{tg} \dfrac{y}{x}} = 0$, $y(1) = \dfrac{\pi}{4}$;

8. $y' = \dfrac{3x + 2y - 1}{2x + y + 1}$; **9.** $y' + 2xy = -2x^3$, $y(1) = e^{-1}$;

10. $dx = (\sin y + 3\cos y + 3x)dy$;

11. $4y' + x^3 y = \left(x^3 + 8\right)e^{-2x}y^2$, $y(0) = 1$;

12. $y'\left(x^3 \sin y - x\right) + 2y = 0$; **13.** $xy' - y\left(\dfrac{1}{x} - 1\right) + y^2 = \dfrac{12}{x^2}$, $y(7) = \dfrac{4}{7}$;

14. $y' - 2y\left(1 + 2e^{-x}\right) + 2y^2 + 2e^{-2x} + 3e^{-x} = 0$;

15. $y'x\cos y + \sin y = \sin x$;

16. $\left(y^3 \cos x\right)dx + \left(3xy^2 + e^y\right)dy = 0$, $y\left(\dfrac{\pi}{2}\right) = 0$;

17. $(y\operatorname{ch}x + \operatorname{sh}y)dx + (x\operatorname{ch}y + \operatorname{sh}x)dy = 0$;

18. $y+\left(xy^3+x\ln x\right)y'=0$ **;** **19.** $x^{y-1}dx+x^y\ln x\dfrac{dy}{y}=0$ **;**

20. $\mu(\omega)$**:** $x(1-y)dx+\left(y+x^2\right)dy=0$, $\omega=x^2+y^2$ **;**

21. $y'^2+xy=y'\left(x\mathrm{tg}x+y\mathrm{ctg}x\right)$, $y\left(\dfrac{\pi}{2}\right)=1$, $y'\left(\dfrac{\pi}{2}\right)=1$ **;**

22. $\left(xe^x y'+e^x(x+1)y\right)^3=y^4x^4e^{4x}$ **;** **23.** $\mathrm{ch}y'-y'=4$ **;**

24. $x=2\left(\arcsin\sqrt{y'}+y'\right)$**;**

25. $y=y'\ln y'(\ln y'-2)+2y'$ **;** **26.** $y^2\left(1+y'^2\right)=a\left(x+yy'\right)$**;**

27. $y+xy'=4\sqrt{y'}$ **;**

28. $y=xy'+y'-\ln y'$ **;** **29.** $y''^2-(1+x)^k=0$**;**

30. $e^{-y''}-x=\sqrt{1+y''^2}$ **;**

31. $y''-\dfrac{y'}{x}=\dfrac{1}{2y'}$ **;** **32.** $yy''-y'^2=y^2y'$ **;** **33.** $2y''=3yy'$ **;**

34. $\left(1-x^2\right)\left(yy''-y'^2\right)+xyy'=y^2$ **;**

35. $x^2\cos^2 x\left(yy''-y'^2\right)+\left(\cos^2 x-x^2\right)y^2=0$ **;**

36. $xy'''+y''+x=0$, $y(1)=\dfrac{1}{6}$, $y'(1)=0$, $y''(1)=\dfrac{1}{2}$ **;**

37. $y''\sqrt{x}-\dfrac{y'}{2\sqrt{x}}=2xyy'$**.**

38. В комнате, где температура $20^0 C$, некоторое тело остыло за 20 минут от $100^0 C$ до $60^0 C$. Найти закон охлаждения тела. Через сколько минут оно остынет до $30^0 C$? Повышением температуры в комнате пренебречь.

39. Найти частные производные от решения уравнения $y'+p(x)y=q(x)$ с начальными данными x_0, y_0 по этим начальным данным в точке (x_0, y_0).

40. Найти особые решения уравнения: $y'^3+(3x-6)y'=3y$.

Вариант 21

1. $\left(xy^2+x\right)dx+\left(y-x^2y\right)dy=0$, $y(2)=1$; **2.** $yy'=3^{x-y}+x3^{x^2-y}$;

3. $2x\mathrm{arctg}y dy-\left(1+y^2\right)dx=0$, $y(1)=0$; **4.** $y'=\sqrt{3x+y+1}$ **;**

5. $(4x-5y+1)dx+(10y-8x)dy=0$ **; 6.** $\left(y^2-3x^2\right)dy+2xydx=0$ **;**

7. $y'=\dfrac{y}{x}(1+\ln y-\ln x)$, $y(1)=3$ **; 8.** $4y'=\left(\dfrac{6x+y-2}{3x-1}\right)^2$ **;**

9. $y'+\dfrac{xy}{2\left(1-x^2\right)}=\dfrac{x}{2}$, $y(0)=\dfrac{2}{3}$ **; 10.** $2\left(\cos^2 y\cos 2y-x\right)y'=\sin 2y$ **;**

11. $8xy'-12y=-\left(5x^2+3\right)y^3$, $y(1)=\sqrt{2}$ **; 12.** $\left(x^2\ln y-x\right)y'=y$ **;**

13. $3y'-2y+y^2e^{-x}=2e^x$, $y(0)=0$ **;**

14. $xy'-y-y^2+9x^2+6x+2=0$ **;**

15. $y'\mathrm{sh}y+\dfrac{\mathrm{ch}y}{x}=2e^{x^2}$ **; 16.** $xe^{y^2}dx+\left(x^2ye^{y^2}+\mathrm{tg}^2 y\right)dy=0$ **;**

17. $\dfrac{2x}{y^3}dx+\dfrac{y^2-3x^2}{y^4}dy=0$, $y(1)=-1$ **;**

18. $\left(2x^3\sin\dfrac{y}{x}-y\cos\dfrac{y}{x}\right)dx+x\cos\dfrac{y}{x}dy=0$ **;**

19. $\left(y+\dfrac{y^3}{x^2}\right)dx-\left(\dfrac{y^2}{x}+x\right)dy=0$ **;**

20. $\mu(\omega)$**:** $\left(2x^3y^2-y\right)dx+\left(2x^2y^3-x\right)dy=0$, $\omega=xy$ **;**

21. $y'^2+xye^x=y'\left(x+ye^x\right)$, $y(0)=1$, $y'(0)=1$;

22. $\left(y'\ln x+\dfrac{y}{x}\right)^3=y^2\ln^2 x$;

23. $\sin y'+\cos y'+1=0$ **; 24.** $x=\mathrm{sh}y'+y'$ **;**

25. $y=2\left(\sqrt{y'}-\mathrm{arctg}\sqrt{y'}\right)$**;**

26. $x^2y'^2+x^2yy'+a^3=0$ **; 27.** $y=2xy'+y'(\ln y'-1)$ **;**

28. $y=\left(y'+\dfrac{2}{x}\right)x+y'^2$ **;**

29. $y''=\dfrac{1}{(x-1)^3}-\dfrac{1}{(x+1)^3}$ **;** **30.** $\cos y''+\sin y''=x$ **;**

31. $y''-\dfrac{y'}{x}=-\dfrac{x}{2}$ **;**

32. $yy''=1+y'^2$ **;** **33.** $y''=y'(\ln y+1)$ **;** **34.** $xyy''-yy'=(x+1)y'^2$ **;**

35. $\sqrt{1+x^2}\left(yy''-y'^2\right)-y^2=0$ **;** **36.** $y''\mathrm{ch}x-y'\mathrm{sh}x=2yy'\mathrm{ch}^2x$ **;**

37. $x^5y'''+5x^4y''=1$ **,** $y(1)=\dfrac{5}{6}$**,** $y'(1)=\dfrac{1}{3}$**,** $y''(1)=1$ **.**

38. Поглощение светового потока тонким слоем воды пропорционально толщине слоя и потоку, падающему на поверхность. Зная, что при прохождении через слой толщиной 2 м поглощается 1/3 первоначального светового потока, определить, какой процент его дойдет до глубины 12 м.

39. Доказать, что если некоторая кривая является интегральной кривой уравнения $M(x,y)dx+N(x,y)dy=0$, тои симметричная относительно начала координат кривая также является интегральной кривой.

40. Найти особые решения уравнения: $xy'^2-2xy'+4x=0$.

Вариант 22

1. $x\left(y^6+1\right)dx+y^2\left(x^4+1\right)dy=0$, $y(1)=1$;

2. $y'+\sin(x+y)=\sin(x-y)$, $y\left(\dfrac{\pi}{2}\right)=\dfrac{\pi}{4}$;

3. $y'=(x+y)\ln(x+y)-1$ **;** **4.** $(x+3y-1)dx+(3x+9y)dy=0$ **;**

5. $xyy'=y^2+2x^2$ **;** **6.** $x\ln\dfrac{x}{y}dy-ydx=0$ **,** $y(1)=e$ **;**

7. $y'=\dfrac{x-1}{2x-y-3}$ **;**

8. $y'+xy=-x^3$ **,** $y(0)=3$ **;** **9.** $\mathrm{ch}y\,dx=(1+x\mathrm{sh}y)dy$ **,** $y(1)=\ln 2$ **;**

10. $\left(e^y+1\right)y'-e^y-y=e^x$ **;** **11.** $2(y'+y)=xy^2$**,** $y(0)=2$ **;**

12. $2xy'+x^2y^4y'+y=0$ **;** **13.** $y'+y(2x+1)+y^2+x^2+x-1=0$ **;**

14. $y'-\frac{y}{x}+y^2+\frac{3}{4x^2}=0$ **;** **15.** $\left(e^y+1\right)y'-e^y-y=e^x$ **;**

16. $(2y-x-1)dy+(2x-y+1)dx=0$, $y(1)=1$ **;**

17. $\left(e^{\sin x\cos y}\cos x\cos y+\frac{1}{x}\right)dx+\left(\frac{1}{y}-e^{\sin x\cos y}\sin x\sin y\right)dy=0$ **;**

18. $\left(2xy\sin y-y^3\sin x\right)dx+\left(x^2y\cos y+2y^2\cos x\right)dy=0$ **;**

19. $\left(x^y+yx^{y-1}\mathrm{tg}x\right)dx+x^y\ln x\mathrm{tg}xdy=0$ **;**

20. $\mu(\omega)$**:** $\left(3x-\frac{2}{y}+\frac{1}{xy^2}\right)dx+\left(\frac{3x^2}{y}+\frac{1}{y^3}-\frac{2x}{y^2}\right)dy=0$, $\omega=\frac{x}{y}$ **;**

21. $y'^2+1=\frac{xy'}{y}+\frac{yy'}{x}$, $y(1)=2$, $y'(1)=\frac{1}{2}$ **;**

22. $y+\mathrm{ctg}x=\left(y'-\frac{1}{\sin^2 x}\right)^3$ **;**

23. $y'^3-y'^4=5$**;** **24.** $x+y'=\mathrm{sh}^2y'$ **;** **25.** $y=\frac{1}{3}\ln^3 y'-\frac{1}{y'}$ **;**

26. $y^2-\left(y'^2+y'^3\right)xy+x^2y'^3=0$**;** **27.** $y=\frac{xy'^2}{1+y'}+y'^2$**;**

28. $y=xy'+y'-\sqrt{y'}$ **;**

29. $y''=e^x+\frac{3}{4}x^{-5/2}$ **;** **30.** $y''\sin\left(y''^2\right)-x=0$**;**

31. $\left(1+x^2\right)y''-2xy'=0$**;**

32. $yy''+y'^3=0$**;** **33.** $y''-y'\cos y=0$**;** **34.** $yy''-y'^2=e^x(x+1)y^2$ **;**

35. $3x^2y^2\sin^3x+yy''-y'^2=3yy'\mathrm{ctg}x$**;** **36.** $y''\sqrt{x}+\frac{y'}{2\sqrt{x}}=yy'$ **;**

37. $x^2y'''+2xy''=\frac{2}{x^2}$, $y(1)=0$, $y'(1)=1$, $y''(1)=0$.

38. При исследовании роста информационных потоков в науке, то есть числа научных публикаций, исходят из допущения, что скорость роста пропорциональна достигнутому уровню числа публикаций. Через сколько лет этот уровень удвоится, если относительная скорость равна 7%?

39. Для однородного уравнения $M(x,y)dx+N(x,y)dy=0$ выяснить, что представляют собой особые решения (если они есть) – прямые, окружности и т.д.

40. Найти особые решения уравнения: $y'^2+y^2=1$.

Вариант 23

1. $yy'+e^y=0$; **2.** $\ln(\cos y)dx+x\mathrm{tg}y dy=0$, $y(1)=\dfrac{\pi}{3}$;

3. $y'\sin(x-y)=\mathrm{tg}x-\mathrm{tg}y$, $y(0)=\dfrac{\pi}{2}$;

4. $y'\sqrt{x+2y+3}=1$; **5.** $(x-5y+1)dx+(15y-3x+5)dy=0$;

6. $y'=\dfrac{y}{x}+\cos^2\dfrac{y}{x}$, $y(1)=\dfrac{\pi}{4}$; **7.** $(x^2-2y^2)dx+2xydy=0$;

8. $y'=\dfrac{x+2y-6}{x-2y+4}$;

9. $y'-\dfrac{2}{x+1}y=e^x(x+1)^2$; **10.** $(13y^3-x)y'=4y$, $y(5)=1$;

11. $y'+xy=(x-1)e^xy^2$, $y(0)=1$;

12. $y+xy'=x^4y^3y'$; **13.** $y'-\dfrac{y}{x}+y^2=\dfrac{3}{x^2}$, $y(1)=3$;

14. $y'+y(3-2x)+y^2=3x-x^2-1$;

15. $y'\sin 2y-\dfrac{1}{x}\sin^2 y=x\sin x$;

16. $\left(\cos(x+y^2)+\sin x\right)dx+2y\cos(x+y^2)dy=0$;

17. $(3x^2-2x-y)dx+(2y-x+3y^2)dy=0$, $y(1)=-1$;

18. $(ye^y+xye^y)dx+(xe^y+xye^y)dx=0$;

19. $y\cos(xy)dx+\left(x\cos(xy)+2y\sin(xy)\right)dy=0$;

20. $\mu(\omega)$**:** $x^2y^3 + y + \left(x^3y^2 - x\right)y' = 0$**,** $\omega = xy$**;**

21. $y'^2 - xe^x y' - xyy' + x^2ye^x = 0$**,** $y(1) = 2$**,** $y'(1) = e$;

22. $\left(y'x\ln x + y + y\ln x\right)^3 = x^2y^2\ln^2 x$**; 23.** $y'^2 + y'^{3/2} = 1$**;**

24. $x + y' = \mathrm{th}y'$ **; 25.** $4y = \left(2y'^2 - 1\right)\arcsin y' + y'\sqrt{1 - y'^2}$ **;**

26. $x\left(1 + y'^2\right)\left(y - xy'\right) = 2a^2$**;**

27. $y = xy' + xe^{y'}$ **; 28.** $y = xy' + 2y' + \dfrac{1}{2y'^2}$ **; 29.** $y''' = \sin x^2$**;**

30. $\arccos y'' - x + y''^2 = 0$**; 31.** $y'' + \dfrac{y'}{x} = 3x$**; 32.** $yy'' = y'^2 + y'$ **;**

33. $y'' - y'\mathrm{ch}y = 0$**; 34.** $yy'' - y'^2 + yy' + \dfrac{y^2}{x^2} = \dfrac{y^2}{x}$ **;**

35. $yy'' - y'^2 = \left(\ln x + 1\right)y^2$**;**

36. $y'''\left(\cos x + 1\right) - y''\sin x = 0$ **?** $y(0) = 1$**,** $y'(0) = -1$**,** $y''(0) = 2$**;**

37. $y''\mathrm{tg}x - \dfrac{y'}{\cos^2 x} = 2yy'\mathrm{tg}^2 x$ **.**

38. Тело массы m падает по вертикали с некоторой высоты без начальной скорости. При падении тело испытывает сопротивление воздуха, пропорциональное квадрату скорости тела. Найти закон сопротивления тела.

39. Доказать, что если какое-либо решения уравнения $y' + p(x)y = 0$ обращается в нуль в одной точке интервала (a,b) (где $p(x)$ непрерывна), то оно тождественно равно нулю во всем этом интервале; если же оно отлично от нуля хоть в одной точке (a,b), то оно не обращается в нуль ни в одной точке этого интервала.

40. Найти особые решения уравнения: $y'^3 - 4yy' = 0$.

Вариант 24

1. $\mathrm{tg}x dy - (1 + y)dx = 0$, $y\left(\dfrac{\pi}{3}\right) = 1$; **2.** $y'\ln y = xye^{x^2}$;

3. $y' = x^3 2^{x^2+y} + 2^{x+y}$, $y(0) = 0$;

4. $y'(2y + x) = 1$; **5.** $(2x + y - 1)dx + (6x + 3y)dy = 0$;

6. $\left(x - y\sin\dfrac{y}{x}\right)dx + x\sin\dfrac{y}{x}dy = 0$;

7. $\left(\dfrac{y}{x}\right)^3 + \left(\dfrac{y}{x}\right)^2 + \left(\dfrac{y}{x}\right) = y'$, $y(1) = 1$;

8. $y' = \dfrac{x + y - 6}{x - y}$; **9.** $y' + 2xy = xe^{-x^2}\sin x$, $y(0) = 1$;

10. $(y^2 + 4)dx - 2xydy = 2ydy$, $y(1) = 1$;

11. $3y^2 y' + y^3 = x + 1$, $y(1) = 1$;

12. $1 + y^2 = 2xyy' + 4y'\sqrt{x}\sqrt{1 - y^2}\operatorname{arctg} y$;

13. $y' - 2xy + y^2 = 2 - x^2$, $y(0) = 1$; **14.** $x^2 y' + xy + x^2 y^2 = 4$;

15. $xy'\sin 2y + \cos^2 y + x^2 = 0$;

16. $(3x^2 y + x + 1)dx + (x^3 + 1 + 4y^3)dy = 0$;

17. $\left(1 + \dfrac{1}{y}e^{x/y}\right)dx + \left(1 - \dfrac{x}{y^2}e^{x/y}\right)dy = 0$;

18. $\left(\dfrac{2y}{x} + \dfrac{y^2}{x^2} + 3\right)dx + \left(1 + \dfrac{2y}{x} + 3\dfrac{y^2}{x^2}\right)dy = 0$;

19. $(1 - y)dx + (2y + y^2 - xy)dy = 0$;

20. $\mu(\omega)$: $(xy - y^2 + x + y)dy + (x + y - x^2 + xy)dx = 0$, $\omega = x + y$;

21. $y'^2 - xy(x + y)y' + x^3 y^3 = 0$, $y(2) = 1$, $y'(2) = 2$;

22. $(2x^3 yy' + 3x^2 y^2)^3 = x^3 y^2$; **23.** $y'^2 + \ln(y' + 1) = 1$;

24. $x = \ln(1 + y') + \dfrac{1}{2}(1 - y')^2$; **25.** $y = \dfrac{1 + y'^2}{2}\operatorname{arctg} y' - \dfrac{y'}{2}$;

26. $y'^2 - 2xy'\sqrt{y} + 4y\sqrt{y} = 0$; **27.** $y = x + y'^2 - 2y'$;

28. $y = xy' + y' + e^{-y'}$;

29. $y''' = \dfrac{\sin x}{x}$; **30.** $y''^2 + \dfrac{1}{y'' - 1} - x = 0$; **31.** $xy'' - y' = y'^2$;

32. $3y'y''=2y$ **;**

33. $y''+y'\sin 2y=0$ **; 34.** $yy''-y'^2+yy'=(x+1)y^2$ **;**

35. $\left(x^2-1\right)^2\left(yy''-y'^2\right)+\left(1+x^2\right)y^2=0$ **;**

36. $y''x\ln x-y'(\ln x+1)=2yy'x^2\ln^2 x$ **;**

37. $x^2y'''+2xy''=1$**,** $y(1)=-1$**,** $y'(1)=1$**,** $y''(1)=2$ **.**

38. Определить закон движения материальной точки массы $m=2$ г, перемещающейся по прямой под действием силы , направленной к началу отсчета перемещений и прямо пропорциональной расстоянию точки от начала отсчета (коэффициент пропорциональности равен 8), если сопротивление среды отсутствует, но на точку действует внешняя сила $F=3\sin 2t$ **.**

39. Найти общее решение уравнения $y'+p(x)y=q(x)$, приведя его к уравнению, не содержащему члена с искомой функцией при помощи введения новой искомой функции по формуле $y=\alpha(x)z$, где $\alpha(x)$ – некоторая непрерывно дифференцируемая функция x.

40. Найти особые решения уравнения: $x^2y'^2-2(xy-2)y'+y^2=0$.

Вариант 25

1. $(1-\cos x)dy-\left(y^2+y\right)dx=0$; **2.** $y'=2x2^{y-x^2}$;

3. $y\left(1+x^2\right)y'=\left(1+y^2\right)\mathrm{arctg}x$; **4.** $y'=\mathrm{cosec}^2(x-y)$**,** $y\left(\frac{\pi}{4}\right)=0$**;**

5. $(x+y-1)dx+(4x+4y+1)dy=0$ **; 6.** $\mathrm{tg}^2\frac{y}{x}+2\mathrm{tg}\frac{y}{x}+\frac{y}{x}=y'$ **;**

7. $\left(3x^2e^{y/x}+2y^2\right)dx=2xydy$**,** $y(1)=0$ **; 8.** $y'(x+y-1)=3x$ **;**

9. $y'-\frac{2y}{x+1}=(x+1)^3$**,** $y(0)=\frac{1}{2}$**; 10.** $2\left(x+\ln^2 y-\ln y\right)y'=y$ **,** $y(2)=1$**;**

11. $y'-y=xy^2$**,** $y(0)=1$**; 12.** $y+xy'+x^2y'\ln y=0$**;**

13. $xy'-2y+4xy^2=\frac{1}{x}$**,** $y(1)=-\frac{2}{7}$**; 14.** $y'-2e^{x/2}y+y^2=\frac{1}{2}e^{x/2}-e^x$ **;**

15. $x(\ln y+1)y'+y\ln y=2x$;

16. $\left(\sin y+y\sin x+\dfrac{1}{x}\right)dx+\left(x\cos y-\cos x+\dfrac{1}{y}\right)dy=0$;

17. $\left(y^2e^x+2xe^y\right)dx+\left(2ye^x+x^2e^y\right)dy=0$, $y(1)=1$;

18. $(x\sin y+y)dx+\left(x^2\cos y+x\ln x\right)dy=0$;

19. $\left(1+3x^2\sin y\right)dx-x\mathrm{ctg}y\,dy=0$;

20. $\mu(\omega)$: $\left(y-x^2\right)dy-(x-xy)dx=0$, $\omega=x^2-y^2$;

21. $x^3+y'^2=x^2$, $y(0)=-\dfrac{4}{15}$; **22.** $(y'\sin x+y\cos x)^3=y^2\sin^2 x$;

23. $1-e^{y'}=y'^3$; **24.** $x=(1+y')\mathrm{arctg}\sqrt{y'}-\sqrt{y'}$;

25. $y=\ln\left(y'+\dfrac{1}{2}+\sqrt{y'^2+y'+1}\right)$; **26.** $y'=m\ln x+\ln(xy'-y)$;

27. $y=xy'^2-y'-\ln(y'-1)$; **28.** $y=xy'+\dfrac{1}{\sqrt{y'+1}}$; **29.** $y''=e^{-x^2}$;

30. $x=y''^2-\ln\left(y''^2-1\right)$; **31.** $xy''+2y'=x$; **32.** $3y''=y^{-5/3}$;

33. $y''\sin^2 y+y'=0$; **34.** $yy''-y'^2=2xy^2e^{2x}+2yy'$;

35. $2\mathrm{ch}^2x\left(yy''-y'^2\right)-y^2\mathrm{sh}x\cdot\mathrm{sh}2x=0$;

36. $y''\mathrm{ctg}x+\dfrac{y'}{\sin^2 x}=2yy'\mathrm{ctg}^2x$;

37. $y''(y+1)=y'^2$, $y(0)=1$, $y'(0)=2$.

38. Под действием постоянного излучения в газовой среде происходит процесс ионизации, при котором за 1 секунду образуется q положительных и q отрицательных ионов в данном объеме газа. Вследствие того, что положительные и отрицательные ионы снова соединяются между собой, количество их убывает. Найти зависимость количества ионов от времени t, если из общего количества N положительных ионов в каждую секунду соединяется часть, пропорциональная квадрату их количества.

39. Найти общее решение уравнения $y'+p(x)y=0$, где функция $p(x)$ непрерывна на (a,b), если известно ненулевое частное решение этого уравнения. Найти общее решение этого уравнения, приведя его к уравнению с постоянным коэффициентом при y с помощью соответствующей замены независимой переменной $t=\psi\left(x\right)$.

40. Найти особые решения уравнения: $y'^3+\left(y'^2-2y'\right)x=3y'-y$.

Часть 2.

ЛИНЕЙНЫЕ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ. ФУНДАМЕНТАЛЬНАЯ СИСТЕМА РЕШЕНИЙ. ОПРЕДЕЛИТЕЛЬ ВРОНСКОГО

В части 2содержатся индивидуальные задания по темам: линейные дифференциальные уравнения (ЛДУ), ФСР, определитель Вронского.

Линейное ДУ n-того порядка с непрерывными коэффициентами $p_i(x)$, $i=\overline{1,n}$ и непрерывной правой частью $f(x)$, $x\in(a,b)$ может быть записано в виде:

$$L[y]=y^{(n)}+p_1(x)y^{(n-1)}+...+p_{n-1}(x)y'+p_n(x)y=f(x) \qquad (1)$$

ЛО ДУ – линейное однородное, если $f(x)\equiv 0$ на (a,b),

ЛН ДУ – линейное неоднородное, если $f(x)$ не везде равно нулю на (a,b).

Опр. Любое множество, состоящее из n линейно независимых на (a,b) решений $y_1(x),y_2(x),...,y_n(x)$ однородного уравнения (1), называется *фундаментальной системой решений уравнения* (1) на (a,b).(ФСР)

Теорема. *Для любого линейного однородного ДУ с непрерывными коэффициентами на (a,b) существует ФСР.*

Теорема. *(Об общем решении линейного однородного ДУ.) Если $y_1(x),y_2(x),...,y_n(x)$ - ФСР на (a,b) линейного однородного ДУ $L[y]=y^{(n)}+p_1(x)y^{(n-1)}+...+p_{n-1}(x)y'+p_n(x)y=0$ с непрерывными на (a,b) коэффициентами, то общим решением ДУ $L[y]=0$ является*

$y(x) = C_1 y_1(x) + C_2 y_2(x) + \cdots + C_n y_n(x)$*, где* $C_1, C_2, ..., C_n$ *- произвольные постоянные.*

Теорема. *(Об общем решении линейного неоднородного ДУ).*
Если $y_1(x), y_2(x), ..., y_n(x)$ *- ФСР на* (a,b) *линейного однородного ДУ* $L[y]=0$*, с непрерывными на* (a,b) *коэффициентами, и* $\overline{y}(x)$ *- какое-либо частное решение неоднородного ДУ* $L[y]=f(x)$*, то общим решением ДУ* $L[y]=f(x)$ *является*

$y(x) = C_1 y_1(x) + C_2 y_2(x) + \cdots + C_n y_n(x) + \overline{y}(x)$*, где* $C_1, C_2, ..., C_n$ *- произвольные постоянные.*

Определитель Вронского для функций $y_1(x), y_2(x), ..., y_n(x)$:

$$W[y_1(x), y_2(x), ..., y_n(x)] = W(x) = \begin{vmatrix} y_1(x) & y_2(x) & ..... & y_n(x) \\ y_1'(x) & y_2'(x) & .... & y_n'(x) \\ .... & .... & .... \\ y_1^{(n-1)}(x) & y_2^{(n-1)}(x)... & & y_n^{(n-1)}(x) \end{vmatrix}$$

Теорема. *Если определитель Вронского для n-раз непрерывно дифференцируемых на* (a,b) *функций* $y_1(x), y_2(x), ..., y_n(x)$ *не равен нулю на* (a,b)*, то существует единственное однородное ЛДУ с непрерывными коэффициентами:* $y^{(n)} + h_1(x) y^{(n-1)} + \cdots + h_n(x) y = 0$*, для которого функции* $y_1(x), y_2(x), ..., y_n(x)$ *образуют ФСР.*

Пример. С помощью определителя Вронского проверить, что функции $y_1(x) = x,\ y_2(x) = e^x$ образуют ФСР некоторого однородного ЛДУ $y'' + h_1(x) y' + h_2(x) y = 0$ с непрерывными коэффициентами на промежутке $(0,1)$. Составить это ДУ.

Решение: вычислим определитель Вронского

$$W[y_1(x), y_2(x)] = W(x) = \begin{vmatrix} y_1(x) & y_2(x) \\ y_1'(x) & y_2'(x) \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x & e^x \\ 1 & e^x \end{vmatrix} = e^x(x-1) \neq 0,\ x \in (0,1).$$

$$\begin{cases} y_1'' + h_1(x) y_1' + h_2(x) y_1 = 0, \\ y_2'' + h_1(x) y_2' + h_2(x) y_2 = 0; \end{cases} \quad \begin{cases} 0 + h_1(x)\cdot 1 + h_2(x)\cdot x = 0, \\ e^x + h_1(x) e^x + h_2(x) e^x = 0; \end{cases}$$

$$\begin{cases} h_1(x) + h_2(x) \cdot x = 0, \\ h_1(x) + h_2(x) = -1; \end{cases}$$

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & x \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = -e^{-x} \begin{vmatrix} x & e^x \\ 1 & e^x \end{vmatrix} \neq 0,\ \Delta = (1-x)\ ,\ x \in (0,1)$$

По правилу Крамера $h_1(x) = \dfrac{\begin{vmatrix} 0 & x \\ -1 & 1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & x \\ 1 & 1 \end{vmatrix}} = \dfrac{x}{1-x},\ h_2(x) = \dfrac{\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 1 & -1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & x \\ 1 & 1 \end{vmatrix}} = \dfrac{-1}{1-x}.$

Линейные однородные ДУ с постоянными коэффициентами.

Чтобы решить $a_0 y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + a_2 y^{(n-2)} + \ldots + a_{n-1} y' + a_n y = 0$, надо составить характеристическое уравнение

$a_0 \lambda^n + a_1 \lambda^{n-1} + a_2 \lambda^{n-2} + \ldots + a_{n-1} \lambda + a_n = 0$ и найти все его корни $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$. Вещественному корню λ_k кратности m соответствует решение $(C_{k1} + C_{k2} x + C_{km} x^{m-1}) e^{\lambda_k x}$. Паре комплексно сопряжённых корней $\lambda_k, \overline{\lambda_k}$ кратности m соответствует решение

$e^{\alpha_k x}((C_{k1} + C_{k2} x + C_{km} x^{m-1}) \cos(\beta_k x) + (C_{k(m+1)} + C_{k(m+2)} x + C_{k(2m)} x^{m-1}) \sin(\beta_k x))$

где $\lambda_k = \alpha_k + i\beta_k$.

Формулы для извлечения корней из комплексного числа:

$\sqrt{-1} = \pm i$, $\sqrt{1} = \pm 1$,

$$\sqrt[n]{|z|(\cos(\varphi) + i\sin(\varphi))} = \left\{ \begin{array}{l} \sqrt[n]{|z|}(\cos(\dfrac{\varphi + 2k\pi}{n}) + i\sin(\dfrac{\varphi + 2k\pi}{n})), \\ k = \overline{0,(n-1)} \end{array} \right\}$$

Линейные неоднородные ДУ с постоянными коэффициентами.

$a_0 y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + a_2 y^{(n-2)} + \ldots + a_{n-1} y' + a_n y = f(x)$.

$\boxed{y_{он} = y_{оо} + y_{чн}}$

Если правая часть ЛН ДУ имеет специальный вид

$f(x) = e^{\alpha x}((p_0 + p_1 x + \ldots + p_s x^s) \cos(\beta x) + (q_0 + q_1 x + \ldots + q_l x^l) \sin(\beta x))$, то частное решение можно подобрать методом Эйлера (неопределённых коэффициентов).

Пусть r - кратность числа $\alpha + i\beta$ в характеристическом уравнении $a_0\lambda^n + a_1\lambda^{n-1} + a_2\lambda^{n-2} + \ldots + a_{n-1}\lambda + a_n = 0$; ($r = 0$, если $\alpha + i\beta$ не корень характеристического уравнения).

$$y_{чн} = x^r e^{\alpha x}(A_0 + A_1 x + \ldots + A_{\max\{s,l\}} x^{\max\{s,l\}})\cos(\beta x) +$$
$$+(B_0 + B_1 x + \ldots + B_{\max\{s,l\}} x^{\max\{s,l\}})\sin(\beta x))$$

$\alpha + i\beta$	$f(x)$	$y_{чн}(x)$
0	$p_0 + p_1 x + \ldots + p_s x^s$	$x^r(A_0 + A_1 x + \ldots + A_s x^s)$
α	$p_0 e^{\alpha x}$	$x^r A_0 e^{\alpha x}$
α	$(p_0 + p_1 x + \ldots + p_s x^s)e^{\alpha x}$	$x^r(A_0 + A_1 x + \ldots + A_s x^s)e^{\alpha x}$
$i\beta$	$(p_0 + p_1 x)\cos(\beta x)$	$x^r((A_0 + A_1 x)\cos(\beta x) +$ $+(B_0 + B_1 x)\sin(\beta x))$
$i\beta$	$p_0 \cos(\beta x) + q_0 \sin(\beta x)$	$x^r(A_0 \cos(\beta x) + B_0 \sin(\beta x))$
$\alpha + i\beta$	$(p_0 + p_1 x)\sin(\beta x)e^{\alpha x}$	$x^r((A_0 + A_1 x)\cos(\beta x) +$ $+(B_0 + B_1 x)\sin(\beta x))e^{\alpha x}$
$\alpha + i\beta$	$(p_0 \cos(\beta x) +$ $+(q_0 + q_1 x)\sin(\beta x))e^{\alpha x}$	$x^r((A_0 + A_1 x)\cos(\beta x) +$ $+(B_0 + B_1 x)\sin(\beta x))e^{\alpha x}$

Линейное неоднородное уравнение с непрерывными коэффициентами и любой непрерывной правой частью

можно решать методом вариации постоянных (Лагранжа).

Пусть $y_1(x), y_2(x), y_3(x)$ - ФСР ДУ

$y''' + h_1(x)y'' + h_2(x)y' + h_3(x)y = 0$. Частное решение ДУ

$y''' + h_1(x)y'' + h_2(x)y' + h_3(x)y = f(x)$ будем искать в виде:

$y_{чн} = C_1(x)y_1(x) + C_2(x)\ y_2(x) + C_3(x)\ y_3(x)$. Неизвестные функции $C_1(x), C_2(x), C_3(x)$ находятся из системы:

$$\begin{cases} C_1'(x)y_1(x) + C_2'(x)\ y_2(x) + C_3'(x)\ y_3(x) = 0, \\ C_1'(x)y_1'(x) + C_2'(x)\ y_2'(x) + C_3'(x)\ y_3'(x) = 0, \\ C_1'(x)y_1''(x) + C_2'(x)\ y_2''(x) + C_3'(x)\ y_3''(x) = f(x). \end{cases}$$

Уравнение **Эйлера** имеет вид:
$a_0x^ny^{(n)}+a_1x^{n-1}y^{(n-1)}+a_2x^{n-2}y^{(n-2)}+...+a_{n-1}xy'+a_ny=f(x)$, заменой $x=e^t\ (x>0)$ уравнение приводится к ЛН ДУ. Для уравнения $a_0x^3y'''+a_1x^2y''+a_2xy'+a_3y=f(x)$ можно составить характеристическое уравнение: $a_0\lambda(\lambda-1)(\lambda-2)+a_1\lambda(\lambda-1)+a_2\lambda+a_3=0$, и найти его корни $\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3$. По корням восстанавливаем ЛДУ.

Пример. Решить уравнение Эйлера $x^3y'''+2x^2y''+2xy'-2y=x^2$.
Составим характеристическое уравнение:
$\lambda(\lambda-1)(\lambda-2)+2\lambda(\lambda-1)+2\lambda-2=0$, $\lambda^3-\lambda^2+2\lambda-2=0$; по корням восстановим ЛДУ $y_t'''-y_t''+2y_t'-2y=e^{2t}$; находим корни характеристического уравнения $\lambda_1=1,\lambda_{2,3}=\pm\sqrt{2}i$; находим частное решение неоднородного ЛДУ $y_{чн}=Ae^{2t}$, $A=\dfrac{1}{6}$; тогда общее решение неоднородного ЛДУ

$$y_{он}=C_1e^t+C_2\cos(\sqrt{2}t)+C_3\sin(\sqrt{2}t)+\frac{1}{6}e^{2t}=$$

$$=C_1x+C_2\cos(\sqrt{2}\ln(x))+C_3\sin(\sqrt{2}\ln(x))+\frac{1}{6}x^2.$$

Задание.

1. **С помощью определителя Вронского проверить, что функции $y_1(x), y_2(x)$ образуют ФСР некоторого однородного ЛДУ $y''+h_1(x)y'+h_2(x)y=0$ с непрерывными коэффициентами на промежутке (a,b). Составить это ДУ.**

2. **Найти общее решение ЛО ДУ с постоянными коэффициентами.**

3. **Найти общее решение ЛН ДУ методом Эйлера (неопределённых коэффициентов).**

4. **Зная корни характеристического уравнения и правую часть ЛН ДУ с постоянными коэффициентами, записать вид его общего решения (не находя неизвестные коэффициенты частного решения).**

5. **Найти общее решение ЛН ДУ методом Лагранжа.**
6. **Найти общее решение ДУ Эйлера.**

Вариант 1.(ЛДУ)

1. $y_1(x) = 1,\ y_2(x) = x^2$, $(0,1)$.

2. **а).** $y^{(IV)} + 2y = 0$, **б).** $y^{(9)} + y'' = 0$.

3. **а).** $y'' - 3y' + 2y = (1+2x)e^x$,

б). $y'' + y = \cos(x) + 2e^x \sin(2x)$, **с).** $y''' - 3y'' = (1+2x)$.

4. $\lambda_{1,2} = 1+2i$, $\lambda_{3,4} = 1-2i$, $\lambda_{5,6,7} = 1$,

$f\left(x\right) = 3 + x + xe^x + 3e^x \sin 2x$.

5. **а).** $y'' + 3y' = \dfrac{1}{1+e^{3x}}$,

б). ФСР: $y_1(x) = x,\ y_2(x) = x^2,\ y_3(x) = x^3$, $f(x) = \sqrt[3]{x}$.

6. $x^3 y''' + x^2 y'' + xy' - 1 = \ln(x)$.

Вариант 2.(ЛДУ)

1. $y_1(x) = 1,\ y_2(x) = x^3$, $(0,1)$.

2. **а).** $y^{(IV)}+3y=0$, **б).** $y^{(9)}+2y''=0$.

3. **а).** $y''-y'-2y=(2+x)e^{2x}$,

б). $y''+4y=\cos(2x)+e^{2x}\sin(3x)$, **с).** $y'''+3y''=(2+x)$.

4. $\lambda_{1,2}=1+i$, $\lambda_{3,4}=1-i$, $\lambda_{5,6,7}=0$,

$f\left(x\right)=2+2x+3x^2e^x+3e^x\sin x$.

5. **а).** $y''+4y'=\dfrac{1}{1+e^{4x}}$,

б). ФСР: $y_1(x)=1,\ y_2(x)=\cos x,\ y_3(x)=\sin x$, $f(x)=\dfrac{1}{\sin x}$.

6. $x^3y'''+x^2y''+xy'=\sin\ln(x)$.

Вариант 3.(ЛДУ)

1. $y_1(x)=1,\ y_2(x)=x^4$, $(0,1)$.

2. **а).** $y^{(IV)}+4y=0$, **б).** $y^{(9)}+3y''=0$.

3. **а).** $y''-4y'+2y=(1+3x)e^x$,

б). $y''+y=\sin(x)+3e^x\sin(2x)$, **с).** $y'''-2y''=(1+3x)$.

4. $\lambda_{1,2}=1+2i$, $\lambda_{3,4}=1-2i$, $\lambda_{5,6}=2$,

$f\left(x\right)=3+2x+x^2+3x^2e^x+3e^x\cos 2x$.

5. **а).** $y''-3y'=\dfrac{e^{3x}}{e^{3x}-1}$,

б). ФСР: $y_1(x)=1,\ y_2(x)=\cos x,\ y_3(x)=\sin x$, $f(x)=\dfrac{1}{\cos x}$.

6. $x^3y'''+x^2y''+xy'=x$.

Вариант 4.(ЛДУ)

1. $y_1(x)=1,\ y_2(x)=x^5\ \ (0,1)$.

2. **а).** $y^{(IV)}+5y=0$, **б).** $y^{(9)}+4y''=0$.

3. **а).** $y''-2y'-3y=(2+x)e^{3x}$,

б). $y''+4y=\sin(2x)+e^{2x}\cos(3x)$, **с).** $y'''+2y''=(1-3x)$.

4. $\lambda_{1,2}=1+i$, $\lambda_{3,4}=1-i$, $\lambda_{5,6}=3$, $f\left(x\right)=x+e^{3x}+x^2+2e^x\cos x$.

5. **а).** $y''-4y'=\dfrac{e^{4x}}{e^{4x}-1}$,

б). ФСР: $y_1(x)=1,\ y_2(x)=\cos x,\ y_3(x)=\sin x$, $f(x)=tgx$.

6. $x^3y'''+3x^2y''+4xy'-1=0$.

Вариант 5.(ЛДУ)

1. $y_1(x)=1,\ y_2(x)=x^6,\ (0,1)$.

2. **а).** $y^{(IV)}+6y=0$, **б).** $y^{(9)}+5y''=0$.

3. **а).** $y''-5y'-4y=(1+4x)e^x$,

б). $y''+4y=2\sin(2x)+e^x\cos(x)$, **с).** $y'''+4y''=(2x+3)$.

4. $\lambda_{1,2}=1+i$, $\lambda_{3,4}=1-i$, $\lambda_{5,6,7}=4$, $f\left(x\right)=x+x^2e^{4x}+3e^x\sin 2x$.

5. **а).** $y''-4y'+3y=\dfrac{1}{1+e^{3x}}$,

б). ФСР: $y_1(x)=x,\ y_2(x)=x^2,\ y_3(x)=x^3$, $f(x)=x+\sqrt{x}$.

6. $x^3y'''+3x^2y''+4xy'=\ln(x)$.

Вариант 6.(ЛДУ)

1. $y_1(x)=1,\ y_2(x)=x^7$, $(0,1)$.

2. **а).** $y^{(IV)}+7y=0$, **б).** $y^{(9)}+6y''=0$.

3. **а).** $y''-3y'-4y=(4+x)e^{4x}$,

б). $y''+4y=2\cos(2x)+e^x\cos(2x)$, **с).** $y'''-4y''=(x-2)$.

4. $\lambda_{1,2}=1+3i$, $\lambda_{3,4}=1-3i$, $\lambda_{5,6,7}=2$,

$f\left(x\right)=x^2+\sin x+e^x+e^x\cos 3x$.

5. **а).** $y''-4y'+3y=\dfrac{1}{1+e^x}$,

б). ФСР: $y_1(x)=x,\ y_2(x)=x^2,\ y_3(x)=x^3$, $f(x)=\sqrt{x+1}$.

6. $x^3y'''-3x^2y''+xy'=3\ln(x)$.

Вариант 7.(ЛДУ)

1. $y_1(x)=1,\ y_2(x)=x^8$, $(0,1)$.

2. **а).** $y^{(IV)}+8y=0$, **б).** $y^{(9)}+7y''=0$.

3. **а).** $y''-6y'+5y=(1+5x)e^x$,

б). $y''+y=2\cos(x)+e^{2x}\sin(x)$, **с).** $y'''-5y''=(2x-1)$.

4. $\lambda_{1,2}=2i$, $\lambda_{3,4}=-2i$, $\lambda_{5,6,7}=0$,

$f\left(x\right)=x+2x^2+e^x\cos 2x+\sin 2x$.

5. **а).** $y''-5y'+4y=\dfrac{1}{1+e^{4x}}$,

б). ФСР: $y_1(x)=x,\ y_2(x)=x^2,\ y_3(x)=x^3$, $f(x)=\ln x$.

6. $x^3y'''-3x^2y''+xy'=\sin\ln(x)$.

Вариант 8.(ЛДУ)

1. $y_1(x)=1,\ y_2(x)=x^9\ ,(0,1)$.

2. **а).** $y^{(IV)}+9y=0$, **б).** $y^{(9)}+8y''=0$.

3. **а).** $y''-4y'-5y=(5+x)e^{5x}$,

б). $y''+y=2\sin(x)+\cos(x)+e^x\sin(2x)$, **с).** $y'''+5y''=(7x+2)$.

4. $\lambda_{1,2}=1+3i$, $\lambda_{3,4}=1-3i$, $\lambda_{5,6,7}=1$,

$f(x)=x+e^{3x}+1+e^x\sin 3x$.

5. **а).** $y''-5y'+4y=\dfrac{1}{1+e^x}$,

б). ФСР: $y_1(x)=1,\ y_2(x)=\cos 2x,\ y_3(x)=\sin 2x$, $f(x)=\dfrac{4}{\sin 2x}$.

6. $x^3y'''-5x^2y''+4xy'=x^4$.

Вариант 9.(ЛДУ)

1. $y_1(x)=x^2,\ y_2(x)=e^x\ ,(2,+\infty)$.

2. **а).** $y^{(IV)}+y''+3y=0$, **б).** $y^{(9)}+9y''=0$.

3. **а).** $y''-7y'+6y=(1+6x)e^x$,

б). $y''+y=2\cos(x)+\sin(x)+e^x\cos(x)$, **с).** $y'''+6y''=(3x+1)$.

4. $\lambda_{1,2}=2+i$, $\lambda_{3,4}=2-i$, $\lambda_5=2$, $f(x)=1+x+e^{2x}+5e^{2x}\cos x$.

5. **а).** $y''-4y'+4y=\dfrac{e^x}{\sqrt{1+e^{2x}}}$,

б). ФСР: $y_1(x)=1,\ y_2(x)=x,\ y_3(x)=e^x$, $f(x)=\sin x$.

6. $x^3y'''-5x^2y''+4xy'=\ln(x)$.

Вариант 10.(ЛДУ)

1. $y_1(x)=x^3,\ y_2(x)=e^x$, $(3,+\infty)$.

2. **а).** $2y^{(IV)}-y''+4y=0$, **б).** $y^{(7)}+2y''=0$.

3. **а).** $y''-5y'-6y=(6+x)e^{6x}$,

б). $y''+9y=\cos(3x)+e^x\sin(2x)$, **с).** $y'''-6y''=(2x+3)$.

4. $\lambda_{1,2}=2+2i$, $\lambda_{3,4}=2-2i$, $\lambda_{5,6}=3$,

$f(x)=1+x^2+e^{2x}+3e^{2x}\sin 2x$.

5. **а).** $y''+6y'+9y=\dfrac{1}{\sqrt{1+e^{3x}}}$,

б). ФСР: $y_1(x)=x,\ y_2(x)=1,\ y_3(x)=x^2$, $f(x)=\sin x$.

6. $x^3y'''+5x^2y''+9xy'=x^{-1}$.

Вариант 11.(ЛДУ)

1. $y_1(x)=x^4,\ y_2(x)=e^x$, $(4,+\infty)$.

2. **а).** $2y^{(IV)}+2y''+3y=0$, **б).** $y^{(7)}+3y''=0$.

3. **а).** $y''-5y'+6y=(1-x)e^{2x}$,

б). $y''+9y=\sin(3x)+2e^x\sin(2x)$, **с).** $y'''+7y''=(2x+5)$.

4. $\lambda_{1,2}=2+3i$, $\lambda_{3,4}=2-3i$, $\lambda_{5,6}=1$,

$f(x)=1+2x+3x^3+xe^{3x}+xe^{2x}\sin 3x$.

5. **а).** $y''+8y'+16y=\dfrac{1}{\sqrt{1+e^{4x}}}$,

б). ФСР: $y_1(x)=1,\ y_2(x)=x,\ y_3(x)=x^2$, $f(x)=\cos x$.

6. $x^3y'''+5x^2y''+9xy'=\ln(x)$.

Вариант 12.(ЛДУ)

1. $y_1(x)=x^5$, $y_2(x)=e^x$, $(5,+\infty)$.

2. **а).** $2y^{(IV)}-y''+4y=0$, **б).** $y^{(7)}+2y''=0$.

3. **а).** $y''-y'-6y=(x-1)e^{3x}$,

б). $y''+9y=2\cos(3x)+e^{2x}\sin(x)$, **с).** $y'''-7y''=(3x-2)$.

4. $\lambda_{1,2}=2+5i$, $\lambda_{3,4}=2-5i$, $\lambda_{5,6,7}=2$,

$f\left(x\right)=5+e^{5x}+e^{2x}\cos 5x+2x\sin 2x$.

5. **а).** $y''+4y=\dfrac{1}{\sin 4x}$,

б). ФСР: $y_1(x)=1,\ y_2(x)=x^2, y_3(x)=e^x$, $f(x)=\dfrac{1}{x}-1,\ x\in(1,+\infty)$.

6. $x^3y'''+x^2y''+2xy'=\sin\ln(x)$.

Вариант 13.(ЛДУ)

1. $y_1(x)=x^6$, $y_2(x)=e^x$, $(6,+\infty)$.

2. **а).** $2y^{(IV)}+3y''+5y=0$, **б).** $y^{(7)}+5y''=0$.

3. **а).** $y''-6y'+8y=(x-2)e^{2x}$,

б). $y''+9y=2\sin(3x)+e^{2x}\sin(x)$, **с).** $y'''+8y''=(7x-3)$.

4. $\lambda_{1,2}=2+6i$, $\lambda_{3,4}=2-6i$, $\lambda_{5,6}=3$,

$f\left(x\right)=3+2e^{6x}+e^{2x}\sin 6x+\sin 6x$.

5. **а).** $y''+9y=\dfrac{1}{\sin 6x}$,

б). ФСР: $y_1(x)=1,\ y_2(x)=x,\ y_3(x)=x^2$, $f(x)=e^x$.

6. $x^3y''' + x^2y'' + 2xy' = \cos\ln(x)$.

Вариант 14.(ЛДУ)

1. $y_1(x) = x^7$, $y_2(x) = e^x$, $(7, +\infty)$.

2. **а).** $2y^{(IV)} + 3y'' + 3y = 0$, **б).** $y^{(7)} + 6y'' = 0$.

3. **а).** $y'' - 2y' - 8y = (2 - x)e^{4x}$,

б). $y'' + y = 2\sin(x) + e^x\cos(x)$, **с).** $y''' - 8y'' = (6x + 5)$.

4. $\lambda_{1,2} = 1 + 5i$, $\lambda_{3,4} = 1 - 5i$, $\lambda_{5,6,7} = 1$,

$f(x) = 3 + x + e^{5x} + (1 - x)e^x\sin 5x + \cos 5x$.

5. **а).** $y'' + 4y = tg2x$,

б). ФСР: $y_1(x) = 1,\ y_2(x) = x,\ y_3(x) = x^2$, $f(x) = e^{2x}$.

6. $x^3y''' - x^2y'' + 2xy' = x$.

Вариант 15.(ЛДУ)

1. $y_1(x) = x^8$, $y_2(x) = e^x$, $(8, +\infty)$.

2. **а).** $2y^{(IV)} + 3y'' + 2y = 0$, **б).** $y^{(7)} + 7y'' = 0$.

3. **а).** $y'' - 7y' + 10y = (x - 3)e^{2x}$,

б). $y'' + 9y = 2\cos(3x) + \sin(3x) + e^x\sin(3x)$, **с).** $y''' + 9y'' = (6x + 1)$.

4. $\lambda_{1,2} = 1 + 6i$, $\lambda_{3,4} = 1 - 6i$, $\lambda_5 = 2$,

$f(x) = 2 + x + e^{2x} + e^x\sin 6x$.

5. **а).** $y'' + 9y = tg(6x)$,

б). ФСР: $y_1(x) = 1,\ y_2(x) = x,\ y_3(x) = x^2$, $f(x) = \dfrac{1}{1 + x^2}$.

6. $x^3 y''' - x^2 y'' + 2xy' = \cos\ln(x)$.

Вариант 16.(ЛДУ)

1. $y_1(x) = x^9$, $y_2(x) = e^x$, $(9, +\infty)$.

2. **а).** $3y^{(IV)} + y'' + y = 0$, **б).** $y^{(7)} + 8y'' = 0$.

3. **а).** $y'' - 3y' - 10y = (3 - x)e^{5x}$,

б). $y'' + 9y = \cos(3x) + 2\sin(3x) + e^x \sin(3x)$, **с).** $y''' + 2y'' = (3x + 2)$.

4. $\lambda_{1,2} = 3 + 2i$, $\lambda_{3,4} = 3 - 2i$, $\lambda_{5,6} = 3$,

$f\left(x\right) = 2 + x + xe^{3x} + xe^{3x} \sin 2x$.

5. **а).** $y'' + 4y = tg^2(2x)$,

б). ФСР: $y_1(x) = 1,\ y_2(x) = x,\ y_3(x) = e^x$, $f(x) = x$.

6. $x^3 y''' + 2x^2 y'' + 2xy' - 1 = 0$.

Вариант 17.(ЛДУ)

1. $y_1(x) = x^2$, $y_2(x) = e^{2x}$, $(1, +\infty)$.

2. **а).** $3y^{(IV)} + y'' + 2y = 0$, **б).** $y^{(7)} + 9y'' = 0$.

3. **а).** $y'' - 8y' + 12y = (2x - 1)e^{2x}$,

б). $y'' + 25y = \cos(5x) + e^x \sin(x)$, **с).** $y''' - 2y'' = (3x + 5)$.

4. $\lambda_{1,2} = 3 + 4i$, $\lambda_{3,4} = 3 - 4i$, $\lambda_{5,6,7} = 0$,

$f\left(x\right) = 3 + x^2 + xe^{3x} + xe^{3x} \cos 4x$.

5. **а).** $y'' + 9y = tg^2(3x)$,

б). ФСР: $y_1(x) = 1,\ y_2(x) = x,\ y_3(x) = e^x$, $f(x) = e^x$.

6. $x^3 y''' + 2x^2 y'' + 2xy' = x^2$.

Вариант 18.(ЛДУ)

1. $y_1(x) = x^2$, $y_2(x) = e^{3x}$, $(1, +\infty)$.

2. **а).** $y^{(IV)} - y'' + y = 0$, **б).** $y^{(11)} + 2y'' = 0$.

3. **а).** $y'' - 4y' - 12y = (3x-1)e^{6x}$,

б). $y'' + 25y = \sin(5x) + e^{2x}\sin(x)$, **с).** $y''' - 2y'' = (7x+1)$.

4. $\lambda_{1,2} = 3 + 5i$, $\lambda_{3,4} = 3 - 5i$, $\lambda_{5,6,7} = 1$,

$f\left(x\right) = -2 + x^2 + e^{3x}\sin 5x + \cos 5x$.

5. **а).** $y'' + 4y' + 4y = e^{-2x}\sqrt{x+2}$,

б). ФСР: $y_1(x) = 1,\ y_2(x) = x^2,\ y_3(x) = e^x$,

$f(x) = \dfrac{1-x}{x}(2x+3),\ x \in (1, +\infty)$.

6. $x^3 y''' + 2x^2 y'' + 3xy' = \sin\ln x$.

Вариант 19.(ЛДУ)

1. $y_1(x) = x^2$, $y_2(x) = e^{4x}$, $(1, +\infty)$.

2. **а).** $y^{(IV)} - y'' + 2y = 0$, **б).** $y^{(11)} + 3y'' = 0$.

3. **а).** $y'' - 9y' + 14y = (2x+1)e^{2x}$,

б). $y'' + 25y = \cos(5x) + 2\sin(5x) + e^x\sin(x)$, **с).** $y''' - 2y'' = (6x+5)$.

4. $\lambda_{1,2} = 3 + 4i$, $\lambda_{3,4} = 3 - 4i$, $\lambda_{5,6,7} = 2$,

$f\left(x\right) = 1 + x + (x-2)e^{3x} + 3e^{3x}\sin 4x$.

5. **а).** $y'' + 6y' + 9y = e^{-3x}\sqrt{x+3}$,

б). ФСР: $y_1(x) = 1,\ y_2(x) = x,\ y_3(x) = e^{2x}$, $f(x) = x$.

6. $x^3 y''' + 2x^2 y'' + 3xy' = \cos\ln(x)$.

Вариант 20.(ЛДУ)

1. $y_1(x) = x^2$, $y_2(x) = e^{5x}$, $(1,+\infty)$.

2. **а).** $2y^{(IV)} - y'' + y = 0$, **б).** $y^{(11)} + 4y^{(4)} = 0$.

3. **а).** $y'' - 5y' - 14y = (2x-1)e^{7x}$,

б). $y'' + 25y = \cos(5x) + e^x \sin(5x)$, **с).** $y''' + 2y'' = (3x+8)$.

4. $\lambda_{1,2} = 3+7i$, $\lambda_{3,4} = 3-7i$, $\lambda_{5,6,7} = 3$,

$f\left(x\right) = 3 + x + 7\sin 3x + xe^{3x}\sin 7x$.

5. **а).** $y'' + 4y' + 4y = e^{-2x}\sqrt{x^2+2}$,

б). ФСР: $y_1(x) = 1,\ y_2(x) = \cos 3x,\ y_3(x) = \sin 3x$, $f(x) = \dfrac{9}{\sin 3x}$.

6. $x^3 y''' + 2x^2 y'' + 4xy' = \sin\ln(x)$.

Вариант 21.(ЛДУ)

1. $y_1(x) = x^2$, $y_2(x) = e^{6x}$, $(1,+\infty)$.

2. **а).** $2y^{(IV)} - y'' + 2y = 0$, **б).** $y^{(11)} + 4y^{(4)} = 0$.

3. **а).** $y'' + 3y' + 2y = (2x+3)e^{-2x}$,

б). $y'' + 25y = \sin(5x) + e^x \cos(5x)$, **с).** $y''' + 3y'' = (6x+5)$.

4. $\lambda_{1,2} = -1+2i$, $\lambda_{3,4} = -1-2i$, $\lambda_{5,6,7} = 0$,

$f\left(x\right) = 5 + x^2 + e^{2x} + xe^{2x} + 4e^{-x}\cos 2x$.

5. **а).** $y'' - 6y' + 9y = e^{-3x}\sqrt{x^2-3}$,

б). ФСР: $y_1(x) = 1,\ y_2(x) = x,\ y_3(x) = e^x$, $f(x) = \cos 2x$.

6. $x^3 y''' + 2x^2 y'' + 4xy' = x$.

Вариант 22.(ЛДУ)

1. $y_1(x) = x^2,\ y_2(x) = e^{7x}$, $(1, +\infty)$.

2. **а).** $y^{(IV)} - y'' + 3y = 0$, **б).** $y^{(11)} + 5y^{(5)} = 0$.

3. **а).** $y'' + 5y' + 6y = (2x-3)e^{-2x}$,

б). $y'' + 25y = 2\cos(5x) + \sin(5x) + e^{2x}\sin(x)$, **с).** $y''' - 3y'' = (7x+1)$.

4. $\lambda_{1,2} = 2+7i$, $\lambda_{3,4} = 2-7i$, $\lambda_{5,6,7} = 1$,

$f(x) = 3x + x^2 + 7e^{2x} + e^{2x}\cos 7x + e^{7x}\sin 2x$.

5. **а).** $y'' - 4y' + 4y = \dfrac{\sqrt[3]{x-2}}{e^{2x}}$,

б). ФСР: $y_1(x) = 1,\ y_2(x) = \cos 4x,\ y_3(x) = \sin 4x$, $f(x) = x$.

6. $x^3y''' + 3x^2y'' + xy' = x$.

Вариант 23.(ЛДУ)

1. $y_1(x) = x^2,\ y_2(x) = e^{8x}$, $(1, +\infty)$.

2. **а).** $2y^{(IV)} - y'' + 5y = 0$, **б).** $y^{(11)} + 3y^{(5)} = 0$.

3. **а).** $y'' + 6y' + 8y = (3-4x)e^{-2x}$,

б). $y'' + y = \cos(x) + 3\sin(x) + e^{x}\sin(x)$, **с).** $y''' + 4y'' = (5x-1)$.

4. $\lambda_{1,2} = -1+3i$, $\lambda_{3,4} = -1-3i$, $\lambda_{5,6,7} = 2$,

$f(x) = (7x-3)e^{3x} + e^{-x}\cos 3x + \sin x$.

5. **а).** $y'' + 4y = \dfrac{1}{\cos^2(2x)}$,

б). ФСР: $y_1(x) = 1,\ y_2(x) = x,\ y_3(x) = e^{3x}$, $f(x) = x$.

6. $x^3y''' + 3x^2y'' + 2xy' = x^2$.

Вариант 24.(ЛДУ)

1. $y_1(x)=x^2$, $y_2(x)=e^{9x}$, $(1,+\infty)$.

2. **а).** $y^{(IV)}-2y''+3y=0$, **б).** $y^{(11)}+4y^{(5)}=0$.

3. **а).** $y''+7y'+10y=(4-3x)e^{-2x}$,

б). $y''+y=-\cos(x)+2\sin(x)+3e^{x}\sin(x)$, **с).** $y'''-4y''=(5x+2)$.

4. $\lambda_{1,2}=5+2i$, $\lambda_{3,4}=5-2i$, $\lambda_{5,6,7}=3$,

$f(x)=1+e^{5x}+xe^{5x}\sin 2x+\cos 2x$.

5. **а).** $y''+9y=\dfrac{1}{\cos^2(3x)}$,

б). ФСР: $y_1(x)=1,\ y_2(x)=x,\ y_3(x)=e^{2x}$, $f(x)=e^{x}$.

6. $x^3y'''+3x^2y''+3xy'=x$.

Вариант 25.(ЛДУ)

1. $y_1(x)=x^2$, $y_2(x)=e^{10x}$, $(1,+\infty)$.

2. **а).** $y^{(IV)}-4y'''+8y''-8y'+4y=0$, **б).** $y^{(11)}+5y^{(5)}=0$.

3. **а).** $y''+7y'+12y=(5-2x)e^{-3x}$,

б). $y''+y=2\cos(x)-\sin(x)+e^{2x}\sin(x)$, **с).** $y'''+5y''=(1+x)$.

4. $\lambda_{1,2}=-2+3i$, $\lambda_{3,4}=-2-3i$, $\lambda_{5,6,7}=0$,

$f(x)=1+2x+e^{-2x}+3e^{-2x}\cos 3x$.

5. **а).** $y''+2y'+y=\dfrac{2}{e^{x}(x+1)^3}$,

б). ФСР: $y_1(x)=1,\ y_2(x)=x,\ y_3(x)=e^{3x}$, $f(x)=\sin x$.

6. $x^4y'''+3x^3y''+3x^2y'=1$.

Часть 3.

ТЕОРЕМА ПИКАРА СУЩЕСТВОВАНИЯ И ЕДИНСТВЕННОСТИ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ КОШИ

Задача Коши для ДУ 1 порядка, разрешённого относительно производной: $y' = f(x, y)$, $y(x_0) = y_0$.

Говорят, что функция $f(x, y)$, определённая в прямоугольнике $\Pi = [x_0 - a, x_0 + a] \times [y_0 - b, y_0 + b]$ удовлетворяет *условию Липшица* по y в Π, если $\exists N > 0$ такое, что для любых $(x, y_1) \in \Pi$, $(x, y_2) \in \Pi$ выполняется $| f(x, y_1) - f(x, y_2) | \le N | y_1 - y_2 |$.

Теорема (Пикара) (Существование, единственность. Локальный вариант.) *Пусть функция* $f(x, y)$ *определена и непрерывна в некоторой ограниченной области* G *пространства переменных* (x, y)*. Тогда, какова бы ни была точка* $(x_0, y_0) \in G$*, существует решение уравнения* $y' = f(x, y)$*, определённое в некоторой окрестности точки* x_0 *и удовлетворяющее условию* $y(x_0) = y_0$. Если при этом функция $f(x, y)$ удовлетворяет условию Липшица по y в прямоугольнике $\Pi \subset G$, то решение уравнения $y' = f(x, y)$ определяется начальными данными $y(x_0) = y_0$ однозначно.

Замечание. Если $\dfrac{\partial f}{\partial y}$ ограничена в Π, то условие Липшица выполняется в Π, и задача Коши локально существует и единственна. Последовательность приближений задачи Коши задаётся формулой: $y_0(x) = y_0$, $y_n(x) = y_0 + \int\limits_{x_0}^{x} f(t, y_{n-1}(t))dt$, $n = \overline{1, \infty}$.

Задача Коши для нормальной системы двух ДУ:

$$\begin{cases} x' = f_1(t, x, y), \\ y' = f_2(t, x, y). \end{cases}, \ x(t_0) = x_0, y(t_0) = y_0.$$

В условии Липшица в этом случае будет
$|f_i(t,x_1,y_1)-f_i(t,x_2,y_2)| \le N(|x_1-x_2|+|y_1-y_2|)$, $i=1,2$.

Если $\left|\dfrac{\partial f_i}{\partial y_j}\right| \le N, i=1,...,n,\ j=1,...,n,$ то условие Липшица выполняется.

Последовательность приближений задачи Коши задаётся формулой: $x_0(t)=x_0$, $y_0(t)=y_0$ $x_n(t)=x_0+\int\limits_{t_0}^{t} f_1(t,x_{n-1}(t),y_{n-1}(t))dt$,

$$y_n(t)=y_0+\int\limits_{t_0}^{t} f_2(t,x_{n-1}(t),y_{n-1}(t))dt,\ n=\overline{1,\infty}.$$

Пример. (№221б, Филиппов) Проверить, что функция $f(x,y)=1+x\sin(y)$ на множестве $\Pi=[0,2\pi]\times[\pi,3\pi]$ удовлетворяет условию Липшица по y. Построить последовательные приближения $y_0(x)$, $y_1(x)$, $y_2(x)$ к решению задачи Коши:
$y'=f(x,y)$, $y(\pi)=2\pi$.

Решение: на множестве $(x,y)\in[0,2\pi]\times[\pi,3\pi]$ оценим

$$|f(x,y_1)-f(x,y_2)|=|(1+x\sin(y_1))-(1+x\sin(y_2))|=|x||\sin(y_1)-\sin(y_2)|=$$
$$=|x|\cdot 2\cdot|\sin\frac{y_1-y_2}{2}\cos\frac{y_1+y_2}{2}|\le|x||y_1-y_2|\le 2\pi|y_1-y_2|.$$

Условие Липшица выполняется, например, с константой $N=2\pi$.

Построим приближения:

$$y_0(x)=2\pi,$$

$$y_1(x)=2\pi+\int\limits_{\pi}^{x}(1+x\sin(2\pi))dx=2\pi+\int\limits_{\pi}^{x}dx=2\pi+(x-\pi)=\pi+x,$$

$$y_2(x)=2\pi+\int\limits_{\pi}^{x}(1+x\sin(\pi+x))dx=2\pi+\int\limits_{\pi}^{x}\left(1-x\sin(x)\right)dx=$$

$$=2\pi+(x-\pi)-\int\limits_{\pi}^{x}x\sin(x)dx=x+2\pi+x\cos x-\sin x.$$

Пример. (№222б, Филиппов) Построить последовательные приближения $y_0(t)$, $y_1(t)$, $y_2(t)$, $x_0(t)$, $x_1(t)$, $x_2(t)$ к решению системы $x'(t) = y$, $y'(t) = x^2$, $x(0) = 1$, $y(0) = 2$.

Решение: $x_0(t) = 1$, $y_0(t) = 2$.

$$x_1(t) = x_0(t) + \int_0^t f_1(x_0(t), y_0(t))dt = 1 + \int_0^t 2dt = 1 + 2t,$$

$$y_1(t) = y_0(t) + \int_0^t f_2(x_0(t), y_0(t))dt = 2 + \int_0^t 1^2 dt = 2 + t,$$

$$x_2(t) = x_0(t) + \int_0^t f_1(x_1(t), y_1(t))dt = 1 + \int_0^t (2+t)dt = 1 + 2t + \frac{t^2}{2},$$

$$y_2(t) = y_0(t) + \int_0^t f_2(x_1(t), y_1(t))dt = 2 + \int_0^t (1+2t)^2 dt = 2 + t + 2t^2 + \frac{4}{3}t^3.$$

Задание.

1. **Для ДУ $y' = f(x, y)$ с начальным условием $y(x_0) = y_0$ построить последовательность приближений $y_n(x)$ решений задачи Коши, используя теорему Пикара на множестве Π. Найти предел последовательности $(y_n(x))_{n=1}^{\infty}$. Проверить, решив уравнение.**

2. **Проверить, что функция $f(x, y)$ на множестве Π удовлетворяет условию Липшица по y. Построить последовательные приближения $y_0(x)$, $y_1(x)$, $y_2(x)$ к решению задачи Коши: $y' = f(x, y)$, $y(x_0) = y_0$.**

3. **Построить последовательные приближения $y_0(t)$, $y_1(t)$, $y_2(t)$, $x_0(t)$, $x_1(t)$, $x_2(t)$ к решению системы $x'(t) = f_1(x, y)$, $y'(t) = f_2(x, y)$, $x(t_0) = x_0$, $y(t_0) = y_0$.**

Вариант 1. (т. Пикара).

1. $y' = x^3 y$, $y(0) = 3$, $\Pi = [-3,3] \times [2,4]$.

2. $f(x, y) = 2 + (x-1)\sin(y)$, $\Pi = [0,2] \times [0,2\pi]$, $y(1) = \pi$.

3. $x'(t) = y+1$, $y'(t) = x^2$, $x(0)=1$, $y(0)=2$.

Вариант 2. (т. Пикара).

1. ДУ $y' = 2xy$, $y(0)=1$, $\Pi = [-3,3]\times[0,2]$.

2. $f(x,y) = -1+(x+2)\sin(y)$, $\Pi = [-3,-1]\times[0,2\pi]$, $y(-2)=\pi$.

3. $x'(t) = y+2$, $y'(t) = x^2$, $x(0)=1$, $y(0)=2{,}5$.

Вариант 3. (т. Пикара).

1. $y' = 4xy$, $y(0)=2$, $\Pi = [-3,3]\times[0,4]$.

2. $f(x,y) = 3+(x-2)\sin(y)$, $\Pi = [1,3]\times[0,2\pi]$, $y(2)=\pi$.

3. $x'(t) = y+1$, $y'(t) = x^2$, $x(0)=1$, $y(0)=3$.

Вариант 4. (т. Пикара).

1. $y' = 6xy$, $y(0)=3$, $\Pi = [-3,3]\times[2,4]$.

2. $f(x,y) = -2+(x+1)\sin(y)$, $\Pi = [-2,0]\times[0,2\pi]$, $y(-1)=\pi$.

3. $x'(t) = y+2$, $y'(t) = x^2$, $x(0)=1$, $y(0)=-2$.

Вариант 5. (т. Пикара).

1. $y' = 8xy$, $y(0)=1$, $\Pi = [-3,3]\times[0,2]$.

2. $f(x,y) = 2+(x+1)\cos(y)$, $\Pi = [-2,0]\times[0,2\pi]$, $y(-1)=\pi$.

3. $x'(t) = y+1$, $y'(t) = x^2$, $x(0)=1$, $y(0)=-1$.

Вариант 6. (т. Пикара).

1. $y' = -2xy$, $y(0)=2$, $\Pi = [-3,3]\times[0,4]$.

2. $f(x,y) = -1+(x+2)\cos(y)$, $\Pi = [-3,-1]\times[0,2\pi]$, $y(-2)=\pi$.

3. $x'(t) = y+2$, $y'(t) = x^2$, $x(0)=1$, $y(0)=1$.

Вариант 7. (т. Пикара).

1. $y' = -4xy$, $y(0)=4$, $\Pi = [-2,2]\times[2,6]$.

2. $f(x,y) = 3+(x-1)\cos(y)$, $\Pi = [0,2]\times[0,2\pi]$, $y(1)=\pi$.

3. $x'(t) = y+2$, $y'(t) = x^2$, $x(0)=1$, $y(0)=-1$.

Вариант 8. (т. Пикара).

1. $y' = -6xy$, $y(0)=1$, $\Pi = [-1,1]\times[0,2]$.

2. $f(x,y) = 2+x^2\sin(y/2)$, $\Pi = [0,2]\times[\pi,3\pi]$, $y(1)=2\pi$.

3. $x'(t) = y+2$, $y'(t) = x^2$, $x(0)=1$, $y(0)=3$.

Вариант 9. (т. Пикара).

1. $y' = -8xy$, $y(0) = 2$, $\Pi = [-2,2]\times[0,4]$.
2. $f(x,y) = 1 + x^2\sin(y/3)$, $\Pi = [1,3]\times[2\pi,4\pi]$, $y(2) = 3\pi$.
3. $x'(t) = y + 2$, $y'(t) = x^2$, $x(0) = 1$, $y(0) = 4$.

Вариант 10. (т. Пикара).

1. $y' = 2xy$, $y(0) = 2$, $\Pi = [-1,1]\times[1,3]$.
2. $f(x,y) = 1 + x^2 s\,\mathrm{in}(y/4)$, $\Pi = [0,2]\times[3\pi,5\pi]$, $y(1) = 4\pi$.
3. $x'(t) = y - 2$, $y'(t) = x^2$, $x(0) = 1$, $y(0) = 2$.

Вариант 11. (т. Пикара).

1. $y' = 2xy$, $y(0) = 3$, $\Pi = [-3,3]\times[2,4]$.
2. $f(x,y) = 2 + x^2\sin(2y)$, $\Pi = [0,2]\times[0,\pi]$, $y(1) = \pi/2$.
3. $x'(t) = y - 2$, $y'(t) = x^2$, $x(0) = 1$, $y(0) = 2$.

Вариант 12. (т. Пикара).

1. $y' = 4xy$, $y(0) = 1$, $\Pi = [-3,3]\times[-1,3]$.
2. $f(x,y) = 3 + x^2\sin(3y)$, $\Pi = [1,3]\times[0,2\pi/3]$, $y(2) = \pi/3$.
3. $x'(t) = y - 2$, $y'(t) = x^2$, $x(0) = 1$, $y(0) = 3$.

Вариант 13. (т. Пикара).

1. $y' = 4xy$, $y(0) = 3$, $\Pi = [-3,3]\times[2,4]$.
2. $f(x,y) = 1 + x^2\cos(y/2)$, $\Pi = [0,2]\times[\pi,3\pi]$, $y(1) = 2\pi$.
3. $x'(t) = 2y$, $y'(t) = x^2$, $x(0) = 1$, $y(0) = 2$.

Вариант 14. (т. Пикара).

1. $y' = 6xy$, $y(0) = 2$, $\Pi = [-3,3]\times[-1,5]$.
2. $f(x,y) = 2 + x^2\cos(y/3)$, $\Pi = [0,2]\times[2\pi,4\pi]$, $y(1) = 3\pi$.
3. $x'(t) = 2y + 3$, $y'(t) = x^2$, $x(0) = 1$, $y(0) = 1$.

Вариант 15. (т. Пикара).

1. $y' = 6xy$, $y(0) = 2$, $\Pi = [-2,2]\times[1,3]$.
2. $f(x,y) = -1 + x^2\cos(y/4)$, $\Pi = [-2,0]\times[3\pi,5\pi]$, $y(-1) = 4\pi$.

3. $x'(t) = 2y - 1$, $y'(t) = x^2$, $x(0) = 1$, $y(0) = 2$.

Вариант 16. (т. Пикара).

1. $y' = 8xy$, $y(0) = 2$, $\Pi = [-4,4]\times[1,3]$.

2. $f(x,y) = y^4 x + e^x$, $\Pi = [-2,4]\times[-2,2]$, $y(1) = 0$.

3. $x'(t) = 3y + 1$, $y'(t) = x^2$, $x(0) = 1$, $y(0) = 2$.

Вариант 17. (т. Пикара).

1. $y' = 8xy$, $y(0) = 3$, $\Pi = [-3,3]\times[2,4]$.

2. $f(x,y) = y^2 x^2 + e^x$, $\Pi = [0,2]\times[-4,4]$, $y(1) = 0$.

3. $x'(t) = 3y + 2$, $y'(t) = x^2$, $x(0) = 1$, $y(0) = -2$.

Вариант 18. (т. Пикара).

1. $y' = -2xy$, $y(0) = 1$, $\Pi = [-3,3]\times[0,2]$.

2. $f(x,y) = y^2 x + e^x$, $\Pi = [-1,3]\times[-2,2]$, $y(1) = 0$.

3. $x'(t) = 3y + 2$, $y'(t) = x^2$, $x(0) = 1$, $y(0) = 3$.

Вариант 19. (т. Пикара).

1. $y' = -2xy$, $y(0) = 3$, $\Pi = [-3,3]\times[2,4]$.

2. $f(x,y) = y^2 x + \sin(x)$, $\Pi = [0,2\pi]\times[-1,1]$, $y(\pi) = 0$.

3. $x'(t) = y - 5$, $y'(t) = x^2$, $x(0) = 1$, $y(0) = 2$.

Вариант 20. (т. Пикара).

1. $y' = -4xy$, $y(0) = 1$, $\Pi = [-3,3]\times[-1,3]$.

2. $f(x,y) = y^2 x + \cos(x)$, $\Pi = [0,2\pi]\times[-1,1]$, $y(\pi) = 0$.

3. $x'(t) = 2y - 3$, $y'(t) = x^2$, $x(0) = 1$, $y(0) = 2$.

Вариант 21. (т. Пикара).

1. $y' = -4xy$, $y(0) = 2$, $\Pi = [-1,1]\times[0,4]$.

2. $f(x,y) = y^2 \sin(x) + \cos(x)$, $\Pi = [0,2\pi]\times[-1,1]$, $y(\pi) = 0$.

3. $x'(t) = 2y + 5$, $y'(t) = x^2$, $x(0) = 1$, $y(0) = 3$.

Вариант 22. (т. Пикара).

1. $y' = -4xy$, $y(0) = 3$, $\Pi = [-3,3]\times[2,4]$.

2. $f(x,y) = y^2 \cos x + \sin(x)$, $\Pi = [-\pi,3\pi]\times[-1,1]$, $y(\pi) = 0$.

3. $x'(t) = 3y - 1$, $y'(t) = x^2$, $x(0) = 1$, $y(0) = 2$.

Вариант 23. (т. Пикара).

1. $y' = -6xy$, $y(0) = 2$, $\Pi = [-3,3]\times[0,4]$.

2. $f(x, y) = y^2 e^x + x$, $\Pi = [0,2]\times[-1,1]$, $y(1) = 0$.

3. $x'(t) = 3y + 1$, $y'(t) = x^2$, $x(0) = 1$, $y(0) = 3$.

Вариант 24. (т. Пикара).

1. $y' = -6xy$, $y(0) = 3$, $\Pi = [-3,3]\times[2,4]$.

2. $f(x, y) = y^2 e^x + \sin(x)$, $\Pi = [0,2]\times[-1,1]$, $y(1) = 0$.

3. $x'(t) = y + 5$, $y'(t) = x^2$, $x(0) = 1$, $y(0) = 1$.

Вариант 25. (т. Пикара).

1. $y' = 4x^3 y$, $y(0) = 1$, $\Pi = [-3,3]\times[0,2]$.

2. $f(x, y) = y^3 x + e^x$, $\Pi = [0,2]\times[-1,1]$, $y(1) = 0$.

3. $x'(t) = y + 4$, $y'(t) = x^2$, $x(0) = 1$, $y(0) = 1$.

Часть 4.

НЕЛИНЕЙНЫЕ СИСТЕМЫ И ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ В ЧАСТНЫХ ПРОИЗВОДНЫХ

Система двух ОДУ в симметричной форме:

$$\frac{dx}{a_1(x, y, z)} = \frac{dy}{a_2(x, y, z)} = \frac{dz}{a_3(x, y, z)} \qquad (1)$$

Функции $a_i(x, y, z)$ непрерывно дифференцируемы и не равны одновременно нулю в каждой точке некоторой области G.

Первым интегралом системы (1) называется непрерывно дифференцируемая функция $\Phi(x, y, z)$, отличная от тождественной постоянной, которая равна константе при подстановке любого решения (x, y, z) системы (1) в области G.

Первые интегралы $\Phi_1(x,y,z),\Phi_2(x,y,z)$ системы (1) называются *независимыми* в области G, если ранг матрицы $\begin{pmatrix} \frac{\partial\Phi_1}{\partial x} & \frac{\partial\Phi_1}{\partial y} & \frac{\partial\Phi_1}{\partial z} \\ \frac{\partial\Phi_2}{\partial x} & \frac{\partial\Phi_2}{\partial y} & \frac{\partial\Phi_2}{\partial z} \end{pmatrix}$ равен 2 в области G.

Общее решение системы (1) в области G равносильно нахождению двух независимых в области G первых интегралов системы (1).

Уравнение вида

$$a_1(x,y,z)\frac{\partial u}{\partial x}+a_2(x,y,z)\frac{\partial u}{\partial y}+a_3(x,y,z)\frac{\partial u}{\partial z}=0 \qquad (2)$$

называется *линейным ДУ в частных производных.*

Общее решение ДУ (2) имеет вид: $u=\Psi(\Phi_1(x,y,z),\Phi_2(x,y,z))$, где $\Phi_1(x,y,z),\Phi_2(x,y,z)$ - независимые первые интегралы в области G соответствующей системы (1), $\Psi(t_1,t_2)$ - произвольная дифференцируемая функция.

Уравнение вида

$$a_1(x,y,z)\frac{\partial z}{\partial x}+a_2(x,y,z)\frac{\partial z}{\partial y}=a(x,y,z) \qquad (3)$$

называется *квазилинейным ДУ в частных производных.*

Общее решение ДУ (3) имеет вид: $\Psi(\Phi_1(x,y,z),\Phi_2(x,y,z))=0$, где $\Phi_1(x,y,z),\Phi_2(x,y,z)$ - независимые первые интегралы в области G соответствующей системы $\frac{dx}{a_1(x,y,z)}=\frac{dy}{a_2(x,y,z)}=\frac{dz}{a(x,y,z)}$,

$\Psi(t_1,t_2)$ - произвольная дифференцируемая функция.

Найти общее решение линейного ДУ в частных производных.

1. $(x+2y)\frac{\partial u}{\partial x}-\frac{\partial u}{\partial y}+z\frac{\partial u}{\partial z}=0$; **2.** $(x+3y)\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial u}{\partial y}+z^2\frac{\partial u}{\partial z}=0$;

3. $(x+e^{2y})\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial u}{\partial y}+\sin(z)\frac{\partial u}{\partial z}=0$; **4.** $(x+e^{-y})\frac{\partial u}{\partial x}-\frac{\partial u}{\partial y}+\sqrt{z}\frac{\partial u}{\partial z}=0$;

5. $(2x+\sqrt{y})\frac{\partial u}{\partial x}+y\frac{\partial u}{\partial y}+z\frac{\partial u}{\partial z}=0$; **6.** $(3x+y^2)\frac{\partial u}{\partial x}+\sqrt{y}\frac{\partial u}{\partial y}+z\frac{\partial u}{\partial z}=0$;

7. $(-x+y^2)\frac{\partial u}{\partial x}-y\frac{\partial u}{\partial y}+\sqrt{z}\frac{\partial u}{\partial z}=0$; **8.** $x\frac{\partial u}{\partial x}+(y+\sqrt{x})\frac{\partial u}{\partial y}+z\frac{\partial u}{\partial z}=0$;

9. $x\frac{\partial u}{\partial x}+(2y+x)\frac{\partial u}{\partial y}+z^2\frac{\partial u}{\partial z}=0$; **10.** $x^2\frac{\partial u}{\partial x}+y\frac{\partial u}{\partial y}+(z+\sqrt{x})\frac{\partial u}{\partial z}=0$;

11. $\sqrt{x}\frac{\partial u}{\partial x}+y^2\frac{\partial u}{\partial y}+(z+2x)\frac{\partial u}{\partial z}=0$;

12. $2x\frac{\partial u}{\partial x}+\sqrt{y}\frac{\partial u}{\partial y}+(\sqrt{y}+z)\frac{\partial u}{\partial z}=0$; **13.** $(3x+\sqrt{y})\frac{\partial u}{\partial x}+2y\frac{\partial u}{\partial y}+z\frac{\partial u}{\partial z}=0$

14. $(5x+y^2)\frac{\partial u}{\partial x}+2\sqrt{y}\frac{\partial u}{\partial y}-z\frac{\partial u}{\partial z}=0$;

15. $(-2x+y^2)\frac{\partial u}{\partial x}-y^2\frac{\partial u}{\partial y}+\sqrt{z}\frac{\partial u}{\partial z}=0$;

16. $x\frac{\partial u}{\partial x}+(2y+\sqrt{x})\frac{\partial u}{\partial y}+3z\frac{\partial u}{\partial z}=0$;

17. $(x+\sqrt{y})\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial u}{\partial y}+z\frac{\partial u}{\partial z}=0$; **18**. $(2x+y^2)\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial u}{\partial y}-\frac{\partial u}{\partial z}=0$;

19. $(3x+y^2)\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial u}{\partial y}+\sqrt{z}\frac{\partial u}{\partial z}=0$; **20.** $(x-y^2)\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial u}{\partial y}-\frac{\partial u}{\partial z}=0$;

21. $(y^2-x)\frac{\partial u}{\partial x}+2\frac{\partial u}{\partial y}-\frac{\partial u}{\partial z}=0$; **22.** $(\sqrt{y}-x)\frac{\partial u}{\partial x}+3\frac{\partial u}{\partial y}+z^3\frac{\partial u}{\partial z}=0$;

23. $(\sqrt[3]{y}+x)\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial u}{\partial z}=0$; **24.** $(x+y)\frac{\partial u}{\partial x}+y^2\frac{\partial u}{\partial y}+z\frac{\partial u}{\partial z}=0$;

25. $(y-x)\frac{\partial u}{\partial x}+\sqrt{y}\frac{\partial u}{\partial y}+z\frac{\partial u}{\partial z}=0$.

Найти общее решение квазилинейного ДУ в частных производных.

1. $2y\frac{\partial z}{\partial x}+x\frac{\partial z}{\partial y}=z$; **2.** $y\frac{\partial z}{\partial x}+2x\frac{\partial z}{\partial y}=z$; **3.** $x\frac{\partial z}{\partial x}+2z\frac{\partial z}{\partial y}=y$;

4. $x\frac{\partial z}{\partial x}+4z\frac{\partial z}{\partial y}=y$; **5.** $(3y-z)\frac{\partial z}{\partial x}+y\frac{\partial z}{\partial y}=z$;

6. $x\frac{\partial z}{\partial x}+(2x-z)\frac{\partial z}{\partial y}=z$; **7.** $(y-2z)\frac{\partial z}{\partial x}+y\frac{\partial z}{\partial y}=z$;

8. $(y-2x)\frac{\partial z}{\partial x}+y\frac{\partial z}{\partial y}=z$; **9.** $x^2\frac{\partial z}{\partial x}+y\frac{\partial z}{\partial y}=x+2y$;

10. $x^2\frac{\partial z}{\partial x}+y\frac{\partial z}{\partial y}=x-2y$; **11.** $x^2\frac{\partial z}{\partial x}+y\frac{\partial z}{\partial y}=x+3y$;

12. $x^2\frac{\partial z}{\partial x}+y\frac{\partial z}{\partial y}=x-3y$; **13.** $x\frac{\partial z}{\partial x}+y^2\frac{\partial z}{\partial y}=x+2y$;

14. $x\frac{\partial z}{\partial x}+y^2\frac{\partial z}{\partial y}=x-y$; **15.** $(xy+2z)\frac{\partial z}{\partial x}+y\frac{\partial z}{\partial y}=x$;

16. $y\frac{\partial z}{\partial x}+x\frac{\partial z}{\partial y}=xy+3z$; **17.** $z\frac{\partial z}{\partial x}+(x-2)z\frac{\partial z}{\partial y}=y$;

18. $(z-2)\frac{\partial z}{\partial x}+(z-2)x\frac{\partial z}{\partial y}=y$; **19.** $z\frac{\partial z}{\partial x}+xz\frac{\partial z}{\partial y}=y+2$;

20. $z\frac{\partial z}{\partial x}+y\frac{\partial z}{\partial y}=y+x+z^2$; **21.** $x\frac{\partial z}{\partial x}+y\frac{\partial z}{\partial y}=y+z-x^2$;

22. $x\frac{\partial z}{\partial x}+y\frac{\partial z}{\partial y}=y+z+x^3$; **23.** $x\frac{\partial z}{\partial x}+y\frac{\partial z}{\partial y}=-2x+y+z$;

24. $x\frac{\partial z}{\partial x}+y\frac{\partial z}{\partial y}=3x+y+z$; **25.** $x\frac{\partial z}{\partial x}+y\frac{\partial z}{\partial y}=y+z+5x$.

ЛИТЕРАТУРА

1. Матвеев Н.М. Методы интегрирования обыкновенных дифференциальных уравнений. Учебник. Минск: «Вышэйшая школа», 1974, - 768с.
2. Невидимова М.И., Поломошнова Р.С. Дифференциальные уравнения. Учебное пособие. Томск: Изд. ТГУ, 1993, - 176с.
3. Понтрягин Л.С. Обыкновенные дифференциальные уравнения. Учебное пособие. М.: Наука, 1982, - 331с.
4. Степанов В.В. Курс дифференциальных уравнений. Учебник. М.: Физматгиз, 1959, - 468с.
5. Матвеев Н.М. Сборник задач и упражнений по обыкновенным дифференциальным уравнениям. Минск: «Вышэйшая школа», 1987, - 292с.
6. Филиппов А.Ф. Сборник задач по дифференциальным уравнениям. М: Наука, 1973, - 127с.
7. Самойленко А.М., Кривошея С.А., Перестюк Н,А. Дифференциальные уравнения. Примеры и задачи. М.: Высш. шк., 1989, - 383 с.

Издание подготовлено в авторской редакции

Отпечатано на участке цифровой печати
Издательского Дома Томского государственного университета
Заказ № 1145 от 30. 06. 2015 г. Тираж 100 экз.