Кемеровский государственный университет

Томский государственный университет

Кемеровский научный центр Сибирского отделения РАН

Филиал Кемеровского государственного университета

в г. Анжеро-Судженске

Посвящается 65-летию Победы

в Великой Отечественной войне

НАУЧНОЕ ТВОРЧЕСТВО МОЛОДЕЖИ

Материалы XIV Всероссийской

научно-практической конференции

15–16 апреля 2010 г.

Часть 1

Издательство Томского университета

2010

ИССЛЕДОВАНИЕ RQ-СИСТЕМЫ МЕТОДОМ АСИМПТОТИЧЕСКОГО АНАЛИЗА

А. А. Назаров, И. А. Семенова
Томский государственный университет

Рассмотрим RQ-систему (Retrial Queue), то есть однолинейную систему массового обслуживания с источником повторных вызовов, на вход которой поступает простейший поток заявок с интенсивностью λ. Считается, что требование, заставшее прибор свободным, занимает его для обслуживания в течение случайного времени, распределенного по экспоненциальному закону с параметром μ. Если прибор занят, то поступившая заявка переходит в источник повторных вызовов (ИПВ), где осуществляет случайную задержку, продолжительность которой имеет экспоненциальное распределение с параметром σ. Из ИПВ после случайной задержки заявка вновь обращается к прибору с повторной попыткой его захвата. Если прибор свободен, то заявка из ИПВ занимает его на случайное время обслуживания, если же он занят, то заявка мгновенно возвращается в источник повторных вызовов для реализации следующей задержки случайной продолжительности [4].

Пусть $i(t)$– число заявок в ИПВ, а $l(t)$– определяет состояние прибора следующим образом:

$$l(t)=\begin{cases}0, \text{ если прибор свободен,}\\ 1, \text{ если прибор занят.}\end{cases}$$

Обозначим

$$P\{l(t)=l, i(t)=i\}=P(l,i,t)$$

вероятность того, что прибор в момент времени t находится в состоянии l и в источнике повторных вызовов находится i заявок.

Процесс $\{l(t), i(t)\}$ изменения во времени состояний описанной системы является марковским.

Для распределения вероятностей $P(l,i,t)$ состояний $\{l,i\}$ рассматриваемой RQ-системы составим дифференциальные уравнения Колмогорова, по формуле полной вероятности записав равенства

$$\begin{cases}\dfrac{\partial P(0,i,t)}{\partial t}=-(\lambda+i\sigma)P(0,i,t)+\mu P(1,i,t),\\ \dfrac{\partial P(1,i,t)}{\partial t}=-(\lambda+\mu)P(1,i,t)+\lambda P(0,i,t)+\sigma(i+1)P(0,i+1,t)+\lambda P(1,i-1,t).\end{cases} \quad (1)$$

Из (1) получим систему уравнений, определяющих характеристические функции [1]

$$\begin{cases}-\sigma j\dfrac{\partial H(0,u)}{\partial u}=-\lambda H(0,u)+\mu H(1,u),\\ \sigma j e^{-ju}\dfrac{\partial H(0,u)}{\partial u}=\lambda H(0,u)+\left(\lambda\left(e^{ju}-1\right)-\mu\right)H(1,u),\end{cases} \quad (2)$$

решение $\{H(0,u),H(1,u)\}$ которой удовлетворяет условию нормировки

$$H(0,0)+H(1,0)=1. \tag{3}$$

Систему (2) будем решать методом асимптотического анализа в условии большой задержки в ИПВ, то есть при $\sigma \to 0$.

Метод асимптотического анализа в матричном виде

Для простоты и компактной записи вычислений дальнейшие исследования будем проводить в матричном виде [2].

Обозначив вектор-строку $H(u)=\{H(0,u),H(1,u)\}$, систему (4) перепишем в матричном виде

$$\sigma j \frac{\partial H(u)}{\partial u} A(ju)=H(u)B(ju), \tag{5}$$

$$H(0)E=1, \tag{6}$$

где равенство (6) – условие нормировки, а матрицы $A(ju)$ и $B(ju)$ имеют вид

$$A(ju)=\begin{pmatrix} -1 & e^{-ju} \\ 0 & 0 \end{pmatrix}=\sum_{\nu=0}^{\infty}\frac{(ju)^{\nu}}{\nu!}A_{\nu},$$

$$B(ju)=\begin{pmatrix} -\lambda & \lambda \\ \mu & \lambda\left(e^{-ju}-1\right)-\mu \end{pmatrix}=\sum_{\nu=0}^{\infty}\frac{(ju)^{\nu}}{\nu!}B_{\nu}.$$

Асимптотика первого порядка

Для нахождения асимптотики первого порядка обозначим $\sigma=\varepsilon$ и в системе (5–6) выполним замены

$$u=\varepsilon w, \quad H(u)=F_1(w,\varepsilon). \tag{7}$$

Тогда уравнение (5) примет вид

$$j\frac{\partial F_1(w,\varepsilon)}{\partial w}A(j\varepsilon w)=F_1(w,\varepsilon)B(j\varepsilon w), \tag{8}$$

а равенство (6) запишем следующим образом:

$$F_1(0,\varepsilon)E=1. \tag{9}$$

В задаче (8)–(9) выполним предельный переход при $\varepsilon \to 0$, получим систему [3]

$$\begin{cases} j\dfrac{\partial F_1(w)}{\partial w}A_0=F_1(w)B_0, \\ F_1(0)E=1, \end{cases}$$

решение $F_1(w)$ которой запишем в виде произведения

$$F_1(w)=R\Phi_1(w)=R\cdot\exp\{jw\kappa_1\} \tag{10}$$

вектора R, определяемого системой

$$\begin{cases} R\left(B_0+\kappa_1 A_0\right)=0, \\ RE=1 \end{cases} \tag{11}$$

и скалярной функцией $\Phi_1(w)$, вид которой определен равенством (10). Значения величины κ_1 определим следующим образом:

Сложим все уравнения системы (8), умножив это равенство справа на единичный вектор-столбец E, и выполним разложение матриц, получим

$$j\frac{\partial F_1(w,\varepsilon)}{\partial w}j\varepsilon wA_1E = F_1(w,\varepsilon)j\varepsilon wB_1E + O(\varepsilon^2),$$

где, выполнив предельный переход, получим нелинейное скалярное уравнение относительно величины κ_1

$$R(B_1 + \kappa_1 A_1)E = 0. \qquad (12)$$

Откуда, выполнив обратные замены, получим функцию, которую будем называть *асимптотикой первого порядка* характеристической функции $h_1(u)$ числа заявок $i(t)$ в источнике повторных вызовов [3]

$$h_1(u) = \exp\left\{ju\frac{\kappa_1}{\sigma}\right\}. \qquad (13)$$

Асимптотика второго порядка

Для нахождения асимптотики второго порядка в уравнении (5) выполним замены

$$H(u) = \exp\left\{j\frac{u}{\sigma}\kappa_1\right\}H_2(u),\ \sigma = \varepsilon^2,\ u = \varepsilon w,\quad H_2(u) = F_2(w,\varepsilon).$$

Получим задачу

$$j\varepsilon\frac{\partial F_2(w,\varepsilon)}{\partial w}A(j\varepsilon w) = F_2(w,\varepsilon)\{B(j\varepsilon w) + \kappa_1 A(j\varepsilon w)\}, \qquad (14)$$

$$F_2(0,\varepsilon)E = 1. \qquad (15)$$

Далее, выполняя аналогичные действия, что и в первой асимптотике, получим асимптотику второго порядка характеристической функции $h_2(u)$ числа заявок $i(t)$ в источнике повторных вызовов

$$h_2(u) = \exp\left\{ju\frac{\kappa_1}{\sigma} + \frac{(ju)^2}{2}\frac{\kappa_2}{\sigma}\right\},$$

где

$$\kappa_2 = \frac{-g_1(B_1 + \kappa_1 A_1)E + \frac{1}{2}R(B_2 + \kappa_1 A_2)E}{g(B_1 + \kappa_1 A_1)E + RA_1E}, \qquad (16)$$

А векторы g и g_1 определяются неоднородными системами линейных алгебраических уравнений

$$g(B_0 + \kappa_1 A_0) + RA_0 = 0,$$

$$g_1(B_0 + \kappa_1 A_0) + R(B_1 + \kappa_1 A_1) = 0.$$

Асимптотика (*n*+1)-го порядка

Для нахождении асимптотики произвольного порядка будем применять метод математической индукции.

Пусть вектор – функция $H_n(u)$ $(n \geq 3)$ удовлетворяет уравнению

$$\sigma j\frac{\partial H_n(u)}{\partial u}A(ju)=H_n(u)\left\{B(ju)+\kappa_1A(ju)+\sum_{\nu=1}^{n-2}\frac{(ju)^\nu}{\nu!}\kappa_{\nu+1}A(ju)\right\},\quad(17)$$

в которых известны все κ_ν при $\nu=1,2,...,n-1$.

Пусть применяя уравнение (17), найдено значение величины κ_n, тогда в (17) выполним замены

$$H_n(u)=\exp\left\{\frac{(ju)^n}{n!}\frac{\kappa_n}{\sigma}\right\}H_{n+1}(u),\ \sigma=\varepsilon^{n+1},\ u=\varepsilon w,\quad H_{n+1}(u)=F_{n+1}(w,\varepsilon).$$

Получим задачу

$$j\varepsilon^n\frac{\partial F_{n+1}(w,\varepsilon)}{\partial w}A(j\varepsilon w)=$$
$$=F_{n+1}(w,\varepsilon)\left\{B(j\varepsilon w)+\kappa_1A(j\varepsilon w)+\sum_{\nu=1}^{n-1}\frac{(j\varepsilon w)^\nu}{\nu!}\kappa_{\nu+1}A(j\varepsilon w)\right\}\quad(18)$$

$$F_{n+1}(0,\varepsilon)E=1.\quad(19)$$

Далее, выполняя аналогичные действия, что и в первой, и во второй асимптотиках, получим асимптотику (n+1)-го порядка характеристической функции $h_{n+1}(u)$ числа заявок $i(t)$ в источнике повторных вызовов [3]

$$h_{n+1}(u)=\exp\left\{\sum_{\nu=1}^{n+1}\frac{(ju)^\nu}{\nu!}\frac{1}{\sigma}\kappa_\nu\right\},\quad(20)$$

где

$$\kappa_{n+1}=-\left\{g_n(B_1+\kappa_1A_1)E+\tfrac{1}{n+1}\sum_{\nu=1}^{n-1}C_{n+1}^\nu f_\nu\left(B_{m+1-\nu}+\sum_{k=0}^{n-\nu}C_{n+1-\nu}^k\kappa_{k+1}A_{n+1-\nu-k}\right)E+,\right.$$
$$\left.+\tfrac{1}{n+1}R\left(B_{n+1}+\sum_{k=0}^{n-1}C_{n+1}^k\kappa_{k+1}A_{n+1-k}\right)E\right\}\Big/\left\{g(B_1+\kappa_1A_1)E+RA_1E\right\}.$$

А векторы g и g_n определяются неоднородными системами линейных алгебраических уравнений

$$g(B_0+\kappa_1A_0)+RA_0=0,$$
$$g_n(B_0+\kappa_1A_0)+\sum_{\nu=1}^{n-1}C_n^\nu f_\nu\left(B_{n-\nu}+\sum_{k=0}^{n-\nu}C_{n-\nu}^k\kappa_{k+1}A_{n-\nu-k}\right)+$$
$$+R\left(B_n+\sum_{k=0}^{n-1}C_n^k\kappa_{k+1}A_{n-k}\right)=0.$$

Таким образом, в работе получено асимптотическое распределение вероятностей числа заявок в источнике повторных вызовов (n+1)-го порядка, в условии большой задержки.

Литература

1. Гнеденко Б. В., Коваленко И. Н. Введение в теорию массового обслуживания. – М.: ЛКИ, 2007. – 400 с.

2. Назаров А. А., Терпугов А. Ф. Теория вероятностей и случайных процессов. – Томск: Изд-во НТЛ, 2006. – 204 с.

3. Назаров А. А., Моисеева С. П. Метод асимптотического анализа в теории массового обслуживания. – Томск : НТЛ, 2006. – 112 с.
4. Назаров А. А., Терпугов А. Ф. Теория массового обслуживания. – Томск: НТЛ, 2004. – 228 с.

Работа выполнена при поддержке АВЦП «Развитие научного потенциала высшей школы (2009–2010 годы)», проект № 4761 «Разработка методов исследования немарковских систем массового обслуживания и их применение к сложным экономическим системам и компьютерным сетям связи».

РАСЧЕТ ДИСПЕРСИЙ ЧИСЛЕННОСТИ ВОЗРАСТНЫХ ГРУПП В МОДЕЛИ ДВИЖЕНИЯ НАСЕЛЕНИЯ ТЕРРИТОРИИ

И. В. Новикова
Филиал Кемеровского государственного университета в г. Анжеро-Судженске

Рассматривается модель динамики возрастного состава населения [1], которая представлена в векторно-матричном виде следующим образом:

$$x(k+1) = A(k)x(k), x(0) = x_0, \tag{1}$$

где $x(k)$ – m-мерный вектор составов населения территории; $A(k)$ – матрица естественного движения населения.

Обозначим $M\{x_0\} = \bar{x}_0$; $D(0) = D(x_0) = D_0$.

Предположим, что коэффициенты рождаемости являются случайными последовательностями. Поэтому матрица A имеет вид:

$$A(k) = \overline{A} + \widetilde{A}(k), \tag{2}$$

где $\overline{A}$ – матрица естественного движения населения со средними значениями коэффициентов, а матрица $\widetilde{A}$ имеет вид:

$$\widetilde{A} = \begin{pmatrix} 0 & \cdots & 0 & a_l & a_{l+1} & \cdots & a_{l+m} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}, \tag{3}$$

где $a_i\,(i = \overline{l, l+m})$ – случайные отклонения от средних значений, которые описываются стохастическими разностными уравнениями вида:

$$a_j(k+1) = \gamma_j a_j(k) + \rho_j w_j(k), \tag{4}$$

где $a_j(0) \sim N(0; \sigma^2_{a\,j})$; $w(k)$ – дискретный гауссовский белый шум с характеристиками $w_j \sim N(0;1)$; $w_j \perp w_i\ \forall i \neq j$.

Введем обозначения:

1) $\mu(k) = M\{x(k)\}$;
2) $\widetilde{x}(k) = x(k) - \mu(k)$;
3) $D(k) = M\{\widetilde{x}(k)\widetilde{x}^T(k)\}$;