УДК 519.46
DOI 10.17223/19988621/34/3

Г.Г. Пестов, А.И. Забарина, А.А. Тоболкин, Е.А. Фомина

О 2-УПОРЯДОЧЕННЫХ ГРУППАХ

Приведены новые примеры двумерно упорядоченных групп. Доказано, что в двумерно упорядоченной группе существует не более одной инволюции. Доказано, что в двумерно упорядоченной группе прямая $l_{e,a}$ является подгруппой, если и только если она замкнута относительно возведения каждого элемента группы в квадрат.

Ключевые слова: *двумерный порядок*, *2-упорядоченная группа*, *инволюция*, *прямая.*

Исследование алгебраических систем, снабжённых различными структурами порядка, имеет давнюю и богатую историю. Сюда относятся работы по линейно упорядоченным группам, решёточно упорядоченным группам, по частично упорядоченным кольцам и телам и линейно упорядоченным полям.

В эту область математики внесли выдающийся вклад Р. Дедекинд, Д. Гильберт, Дж. Нойман, Г. Биркгоф, А. И. Мальцев, Ф. Холл, Р. Бэр, Е. Артин, О. Шрайер, И. Капланский, Ю. Л. Ершов, А. И. Кокорин, В. М. Копытов.

Настоящая статья относится к этой быстро развивающейся области математики. Она содержит новые интересные результаты по теории двумерно упорядоченных групп.

1. Основные понятия и результаты теории 2-упорядоченных групп

Напомним основные понятия, связанные с двумерно упорядоченными группами [1].

Определение двумерного порядка в аксиоматической форме.

Определение 1.1. Пусть M – непустое множество и на M^3 задана функция $\zeta(x, y, z)$, принимающая значения 0, 1, –1 и удовлетворяющая следующим условиям:

A1. Функция $\zeta(x, y, z)$ меняет значение на противоположное при каждой перестановке двух аргументов.

A2. Если $A \subset M$, $|A|= 4$ и существуют $a, b, c \in A$, такие, что $\zeta(a, b, c) \neq 0$, то:

a) Для каждой пары $x, y \in A$ найдётся $z \in A$, такое, что $\zeta(x, y, z) \neq 0$;

b) существует такая пара $a, b \in A$, что для $x, y \in A\backslash\{a, b\}$ выполнено $\zeta(a, b, x) = \zeta(a, b, y) \neq 0$.

A3. $(A \subset M, |A| = 5 \wedge a, b \in A) \to \exists c \in A \wedge \exists \varepsilon = \pm 1\ (\forall x \in A\backslash\{a, b\}\ (\zeta(a, c, x) \neq 0 \to \zeta(a, b, x) = \varepsilon\zeta(a, c, x)))$.

Пара $\langle M, \zeta\rangle$ называется **2-упорядоченным (или двумерно упорядоченным) множеством.** Функция $\zeta(x, y, z)$ называется **функцией двумерного порядка** на множестве M.

Определим двумерный порядок через отображение в ориентированную плоскость.

Определение 1.2. Введём естественную ориентацию плоскости. Пусть x, y, z есть точки плоскости $\mathbf{R}^2$. Если обход тройки точек (x, y, z) происходит против часовой стрелки, то полагаем $\eta(x, y, z) = 1$. Если обход происходит по часовой стрелке, полагаем $\eta(x, y, z) = -1$. Наконец, если точки x, y, z расположены на одной прямой, то принимаем $\eta(x, y, z) = 0$. Функцию $\eta(x, y, z)$ назовём **естественной ориентацией плоскости $\mathbf{R}^2$**. Разумеется, функцию $\eta(x, y, z)$ легко задать как знак соответствующего определителя:

$$\eta(x, y, z) = \mathrm{sg}\begin{vmatrix} 1 & x_1 & x_2 \\ 1 & y_1 & y_1 \\ 1 & z_1 & z_2 \end{vmatrix}.$$

Определение 1.3. Если для множества $A \subset M$, $|A| \le 5$ существует инъективное отображение ϕ: $A \to \mathbf{R}^2$, такое, что

$$\forall x, y, z \in A\ \zeta(x, y, z) = \eta(\phi(x), \phi(y), \phi(z)),$$

то говорят, что ϕ есть реализация множества A в плоскости $\mathbf{R}^2$ или что множество A реализуемо в $\mathbf{R}^2$.

Если каждое множество $A \subset M$, $|A| \le 5$, реализуемо в $\mathbf{R}^2$, то пара $\langle M, \zeta\rangle$ называется **двумерно упорядоченным множеством**. В дальнейшем вместо «двумерно упорядоченное множество $\langle M, \zeta\rangle$» будем часто говорить «двумерно упорядоченное множество M». Порядок ζ в двумерно упорядоченном множестве $\langle M, \zeta\rangle$ называется ***невырожденным***, если $\zeta(x, y, z)$ не обращается тождественно в нуль на M. Более полные сведения о двумерно упорядоченных множествах представлены в [1].

Определение 1.4. Пусть на группе G задан двумерный порядок $\zeta(x, y, z)$. Будем говорить, что порядок $\zeta(x, y, z)$ **согласован с групповой операцией**, если для всех элементов x, y, z, a группы G выполнено

$$\zeta(ax, ay, az) = \zeta(xa, ya, za) = \zeta(x, y, z).$$

Группу с заданным на ней двумерным порядком, согласованным с групповой операцией, назовём ***двумерно упорядоченной группой***.

Более общее определение n-упорядоченной группы см. в [2].

2. Примеры 2-упорядоченных групп

Пример 2.1. Простейшим примером 2-упорядоченной группы является аддитивная группа комплексных чисел со стандартным 2-порядком $\langle \mathbf{C}, +, \eta\rangle$.

Пример 2.2. Мультипликативная группа комплексных чисел со стандартным 2-порядком $\langle \mathbf{C}^*, \cdot, \eta\rangle$.

Пример 2.3. Каждая циклически упорядоченная группа $\langle G, \cdot, \omega\rangle$ является двумерно упорядоченной группой [3].

Пример 2.4. Внешняя 2-упорядоченная группа.

Теорема 2.1. Пусть $\langle G, \cdot, \zeta\rangle$ есть 2-упорядоченная группа. Тогда ультрастепень $\langle {}^*G, \cdot, {}^*\zeta\rangle$ также есть 2-упорядоченная группа.

Доказательство. Напомним аксиомы двумерного порядка:

$$\text{A1. } \forall x, y, z \in G\ \zeta(x, y, z) = -\zeta(y, x, z),\ \zeta(x, y, z) = -\zeta(z, y, x).$$

$$\text{A2a. } (A \subset G \wedge |A| = 4 \wedge \exists a, b, c \in A\ \zeta(a, b, c) \ne 0) \to (\forall x, y \in A\ \exists z \in A\ \zeta(x, y, z) \ne 0),$$

$$\text{A2б. } \exists a, b \in A\ \forall x, y \in A \setminus \{a, b\}\ (\zeta(a, b, x) = \zeta(a, b, y) \ne 0).$$

$$\text{A3. } (A \subset M, |A| = 5 \wedge a, b \in A) \to \exists c \in A \wedge \exists \varepsilon = \pm 1\ (\forall x \in A \setminus \{a, b\}\ (\zeta(a, c, x) \ne 0 \to \zeta(a, b, x) = \varepsilon\zeta(a, c, x))).$$

Применяя к A1 – A3 принцип переноса (*transfer principle*) [4], получим

$$A1^*.\ \forall x, y, z \in {}^*G\ \zeta(x, y, z) = -\zeta(y, x, z),\ \zeta(x, y, z) = -\zeta(z, y, x).$$

$$A2^*\text{а}.\ (A \subset {}^*G \wedge |A| = 4 \wedge \exists a, b, c \in A\ \zeta(a, b, c) \neq 0) \to$$
$$(\forall x, y \in A\ \exists z \in A\ \zeta(x, y, z) \neq 0),$$

$$A2^*\text{б}.\ \exists a, b \in A\ \forall x, y \in A \setminus \{a, b\}\ (\zeta(a, b, x) = \zeta(a, b, y) \neq 0).$$

$$A3^*.\ (A \subset {}^*G \wedge |A| = 5 \wedge a, b \in A) \to$$
$$[\exists c \in A \wedge \exists \varepsilon = \pm 1\ (\forall x, y \in A \setminus \{a, b\}\ (\zeta(a, c, x) \neq 0 \to \zeta(a, b, x) = \varepsilon\zeta(a, c, x))].$$

Итак, ${}^*G$ есть 2-упорядоченное множество.

Далее, порядок в группе G согласован с операцией умножения:

$$\forall x, y, z, a \in G\ \zeta(ax, ay, az) = \zeta(xa, ya, za) = \zeta(x, y, z).$$

По принципу переноса имеем

$$\forall x, y, z, a \in {}^*G\ \zeta(ax, ay, az) = \zeta(xa, ya, za) = \zeta(x, y, z).$$

Порядок в ${}^*G$ согласован с алгебраической операцией.

Пример внешней 2-упорядоченной группы

Мультипликативная группа комплексных чисел **C** со стандартным 2-порядком η есть 2-упорядоченная группа. Группа $\langle {}^*\mathbf{C}, \cdot, {}^*\eta \rangle$, согласно теореме 2.1 также есть двумерно упорядоченная группа. Обозначим через H подмножество ${}^*\mathbf{C}$, состоящее из таких элементов $x \in {}^*\mathbf{C}$, что $(|x| - 1)$ есть бесконечно малая. Итак:

$$H = \{x \in {}^*\mathbf{C} \mid (|x| - 1) \in \mu(0)\}.$$

Покажем, что H есть подгруппа группы ${}^*\mathbf{C}$. Пусть $x, y \in H$. Тогда

$$x = 1 + \alpha,\ y = 1 + \beta;\ \alpha, \beta \in \mu(0).$$

Имеем

$$xy = 1 + (\alpha + \beta) + \alpha\beta = 1 + \gamma;\ \gamma \in \mu(0),$$

отсюда $xy \in H$.

Далее:

$$x^{-1} = (1 + \alpha)^{-1},$$

$$\left|1 - x^{-1}\right| = \left|\frac{\alpha}{1+\alpha}\right| < \frac{|\alpha|}{1 - \frac{1}{2}} = 2|\alpha|.$$

Итак, $|1 - x^{-1}| \in \mu(0)$, значит, $x^{-1} \in H$. Таким образом, H – подгруппа ${}^*\mathbf{C}$. Так как ${}^*\mathbf{C}$ – абелева группа, то $H \lhd {}^*\mathbf{C}$.

Докажем, что группа H есть внешнее множество. Прямая $l_{0,1}$ есть внутреннее множество. Пересечение $H \cap l_{0,1}$ есть множество $\mu(-1) \cap \mu(1)$. Это внешнее множество. Поскольку пересечение двух внутренних множеств есть внутреннее множество, то множество H – внешнее. Итак, $\langle H, \cdot, {}^*\eta \rangle$ является внешней двумерно упорядоченной группой.

Пример 2.5. На каждой линейно упорядоченной, в том числе и неабелевой, группе можно задать 2-порядок, согласованный с операцией [5]. Таким образом, получаем целый класс неабелевых 2-упорядоченных групп.

Теорема 2.2. Каждая конечная двумерно упорядоченная группа является абелевой, более того, циклической группой [3].

Следствие 2.3. Каждая двумерно упорядоченная неабелева группа – бесконечна.

Пример 2.6. Нестандартный двумерный порядок на **C**.

Теорема 2.4. Пусть T_0 – тороидальная группа, L – произвольная линейно упорядоченная группа, тогда $T_0 \times L$ допускает 2-упорядочивание.

Доказательство. Обозначим двумерную функцию порядка на группе T_0 через ω, а линейную функцию порядка на группе L через ζ_1. Группу T_0 будем интерпретировать как окружность, а L будем называть прямой. Тогда структура группы $G = T_0 \times L$ выглядит так: в каждой точке окружности проведена перпендикулярная ориентированная прямая (направление от центра окружности) бесконечно малого масштаба по сравнению с самой окружностью. Каждый элемент $g = (t, l)$ группы G в этой интерпретации определяется следующим образом: первая координата показывает, что этот элемент принадлежит прямой с индексом t и на этой прямой занимает место l.

Введем на группе G двумерную функцию порядка ζ_2. Покажем, как действует ζ_2 на кортеже:

$$g = (g_1, g_2, g_3) \in G^3, \text{ где } g_k = (t_k, l_k),\ t_k \in T_0,\ l_k \in L.$$

Для удобства положим: $t = (t_1, t_2, t_3)$, $l = (l_1, l_2, l_3)$. Рассмотрим несколько случаев по мощности $\mathrm{set}(t)$.

Случай первый: $|\mathrm{set}(t)| = 3$, т. е. все элементы t попарно различны. Положим

$$\zeta_2(g) = \omega(t).$$

Второй случай: $|\mathrm{set}(t)| = 2$, т. е. среди элементов t ровно два одинаковых. Не умаляя общности, можно считать $t_1 = t_2$. Покажем, как ζ_2 действует на тройки (t_1, l_1), (t_2, l_2), (t_3, l_3). Так как функция порядка должна согласовываться с алгебраической структурой группы, то умножим исходную тройку на $(t_1^{-1}, 1)$ – поворот на «угол» t_1 по часовой стрелке. Получим

$$(1, l_1), (1, l_2), (t_1^{-1}t_3, l_3).$$

Прямая $(1, L)$ разбивает окружность на положительный (верхний) и отрицательный (нижний) конусы.

Пусть $l_1 < l_2$. Тогда:

Если $t_1^{-1}t_3$ попадает в строго положительный конус, то положим $\zeta_2(g) = 1$.

Если $t_1^{-1}t_3$ попадает в строго отрицательный конус, то положим $\zeta_2(g) = -1$.

Если $t_1^{-1}t_3$ принадлежит пересечению конусов, то положим $\zeta_2(g) = 0$.

Если $l_1 > l_2$, то все знаки меняются на противоположные.

Если $l_1 = l_2$, то положим $\zeta_2(g) = 0$ независимо от того, куда попадает $t_1^{-1}t_3$. Другими словами, положим

$$\zeta_2(g) = \zeta_1(l_1, l_2)\omega(t_3^{-1}t_1, 1, t_1^{-1}t_3).$$

В случае $|\mathrm{set}(t)| = 1$ положим $\zeta_2(g) = 0$.

Функция ζ_2 задается явным образом как произведение функций порядка ζ_1 и ω, которые согласованы с алгебраической структурой групп L и T_0 соответственно. Поэтому ζ_2 согласована с алгебраической структурой группы G.

Проверим реализацию $\langle G, \zeta_2\rangle$ на $\langle \mathbf{R^2}, \eta\rangle$. Покажем, что для каждого $S \subset G$, $|S| = 5$, существует инъекция $\phi\colon S \to \mathbf{R^2}$ такая, что $\forall g \in S^3$ выполняется: $\zeta_2(g) = \eta(\phi(g))$.

Переобозначим некоторые ранее введенные переменные. Пусть

$$s \in S^5,\ s_j = (t_j, l_j),\ t_j = \exp(\alpha_j i),\ t = (t_1, \ldots, t_5),\ l = (l_1, \ldots, l_5),\ j = \overline{1,\ 5}\,.$$

Шаг 1. Отметим на комплексной плоскости $\mathbf{C}$ точки $t_j = \exp(\alpha_j i)$. Если $|\mathrm{set}(t)| \le 2$, то сразу переходим ко второму шагу. Если $|\mathrm{set}(t)| \ge 3$, то выберем из t произвольную тройку различных элементов t_{j1}, t_{j2}, t_{j3} $(1 \le j_1 \le j_2 \le j_3 \le 5)$. Рассмотрим функцию

$$\rho(x, y, z)\colon G^3 \to [0, +\infty),$$

которая равна расстоянию от точки z до прямой, проходящей через точки x и y.

Если $x = y$, то значение функции $\rho(x, y, z)$ равно расстоянию между точками x и z. Точки t_{j1}, t_{j2}, t_{j3} являются различными точками окружности, поэтому $\rho(t_{j1}, t_{j2}, t_{j3}) > 0$. Пусть

$$\varepsilon = \min_{j_1, j_2, j_3} \rho(t_{j_1}, t_{j_2}, t_{j_3}) .$$

В силу непрерывности ρ получаем

$$\exists\ \delta > 0\ \forall\ \tau_{j1}, \tau_{j2}, \tau_{j3} \in \mathbf{C}.$$

Как только выполнены неравенства

$$\rho(\tau_{j1}, t_{j1}) < \delta,\ \rho(\tau_{j2}, t_{j2}) < \delta,\ \rho(\tau_{j3}, t_{j3}) < \delta,$$

то справедливо неравенство

$$\rho(\tau_{j1}, \tau_{j2}, \tau_{j3}) > \varepsilon.$$

Шаг 2. В δ-окрестности каждой точки t_j проведём ориентированные отрезки (направление от центра), перпендикулярные окружности $|z| = 1$. Отрезок, проходящий через точку t_j, обозначим a_j. Если на прямой (t_j, L) в группе G расположена только одна точка s_j, то положим $\phi(s_j) = t_j$. Если таких точек несколько $s_{j1}, \ldots, s_{jn}$ (без потери общности можно считать $l_{j1} <_L \ldots <_L l_{jn}$), то на отрезке a_j выберем произвольные n точек

$$z_{j_1} <_{a_j} \ldots <_{a_j} z_{j_n},$$

причём положим $\phi(s_{j_k}) = z_{j_k}$, где $k = \overline{1,5}$. Таким образом, мы построили алгоритм реализации 5-элементного множества $S \subset G$.

Итак, функция ζ_2 согласована с алгебраической структурой группы G, и каждое 5-элементное подмножество G реализуемо в $\mathbf{R}^2$, т.е. $\langle G, \zeta_2 \rangle$ есть 2-упорядоченная группа. #

Следствие. Мультипликативная группа комплексных чисел допускает нестандартный 2-порядок.

3. Свойства двумерно упорядоченных групп

Определение 3.1. Пусть $\langle M, \zeta \rangle$ есть 2-упорядоченное множество, $a, b \in M$; $a \neq b$. Множество всех таких $x \in M$, что $\zeta(a, b, x) = 0$, называется *прямой*, проходящей через a и b, и обозначается $l_{a,b}$ [1].

Определение 3.2. Если для всех $x \in M \setminus \{a, b\}$ выполнено $\zeta(a, b, x) > 0$, то $\{a, b\}$ называется *внешней гранью* множества $\langle M, \zeta \rangle$ [1].

В [6] доказана

Теорема 3.1. Пусть $\langle G, \cdot, \zeta \rangle$ есть невырожденная двумерно упорядоченная группа и для некоторого натурального n выполнено $g^n \in Z(G)$. Тогда $g \in Z(G)$.

Следствие 3.2. Периодическая часть двумерно упорядоченной группы есть её нормальный делитель.

Обратимся к инволюциям двумерно упорядоченной группы. Пусть

$$H = \{x \in G \mid x^2 = e\}$$

или, что то же самое, $$H = \{x \in G \mid x = x^{-1}\}.$$

Справедлива следующая

Теорема 3.3. Для каждой 2-упорядоченной группы $\langle G, \cdot, \zeta \rangle$ с невырожденным порядком выполнено неравенство $|H| \leq 2$.

Иными словами, в каждой невырожденной двумерно упорядоченной группе существует не более одной инволюции.

Доказательство от противного. Предположим, что $|H| > 2$. Заметим, что H – подгруппа G.

Действительно, так как $H \subset Z(G)$, то

$$\forall\ h_1, h_2 \in H\ (h_1 h_2^{-1})^2 = h_1 h_2^{-1} h_1 h_2^{-1} = h_1 h_2 h_1 h_2 = h_1 h_1 h_2 h_2 = h_1^{\ 2} h_2^{\ 2} = e.$$

Следовательно, имеем

$$|H| \geq 4.$$

Рассмотрим $S \subset H$: $S = \{e, \alpha, \beta, \alpha\beta\}$. Здесь все элементы попарно различны.

1) Предположим, что $\zeta(e, \alpha, \beta) \neq 0$.

Не нарушая общности, можно считать, что $\zeta(e, \alpha, \beta) = 1$. Отсюда, в силу инвариантности ζ, получаем

$$\zeta(\alpha, e, \alpha\beta) = 1,\ \zeta(\beta, \alpha\beta, e) = 1,\ \zeta(\alpha\beta, \beta, \alpha) = 1.$$

Покажем, что в невырожденном множестве $\langle S, \zeta\rangle$ нет внешних граней. Действительно, так как

$$\zeta(e, \alpha, \alpha\beta) \neq \zeta(e, \alpha, \beta),$$

множество $\{e, \alpha\}$ не является внешней гранью. Непосредственно проверяется, что каждое из множеств

$$\{e, \beta\}, \{e, \alpha\beta\}, \{\alpha, \beta\}, \{\alpha, \alpha\beta\}, \{\beta, \alpha\beta\}$$

также не является внешней гранью в $\langle S, \zeta\rangle$. Получили противоречие с аксиомой A2 в определении двумерно упорядоченного множества. Следовательно, $\zeta(e, \alpha, \beta) = 0$. Отсюда: $\zeta(\alpha, e, \alpha\beta) = \zeta(e, \beta, \alpha\beta) = 0$.

2) Рассмотрим прямую

$$l_{e,\alpha} = \{x \in G \mid \zeta(e, \alpha, x) = 0\}\ .$$

Если $$\forall g \in G\ (g \in l_{e,\alpha}),$$

то $$\zeta \equiv 0 \text{ на } G.$$

Следовательно, существует $c \in G \setminus l_{e,\alpha}$. Бинарное отношение, заданное на $l_{e,\alpha}$:

$$\forall x, y \in l_{e,\alpha}\ (x < y \leftrightarrow \zeta(c, x, y) = 1),$$

является отношением линейного порядка на $l_{e,\alpha}$ [1].

Не нарушая общности, будем считать, что

$$\zeta(c, e, \alpha) = 1.$$

Для краткости обозначим

$$\zeta(c, e, \alpha) = \zeta_c(e, \alpha)$$

(Функция ζ_c называется проекцией двумерного порядка ζ на прямую $l_{e,\alpha}$ из c [1].)

Заметим, что

$$\zeta(c\alpha, \alpha, e) = 1.$$

Тогда $$\zeta(c\alpha, e, \alpha) = -1.$$

Следовательно, $$c\alpha \notin l_{e,\alpha},$$

причём $$\zeta_c(e, \alpha) = -\zeta_{c\alpha}(e, \alpha).$$

Согласно [1],

$$\forall x, y \in l_{e,\alpha}\ (\zeta_c(x, y) = -\zeta_{c\alpha}(x, y)).$$

Так как $$\forall x, y \in S\ (\alpha x \in S, \alpha y \in S),$$

то $$\zeta_c(\alpha x, \alpha y) = -\zeta_{c\alpha}(\alpha x, \alpha y) = -\zeta_c(x, y).$$

Заметим, что $\beta \in l_{e,\alpha}$, следовательно, $l_{e,\alpha} = l_{e,\beta}$. Значит,

$$\forall x, y \in S\ (\zeta_c(\beta x, \beta y) = -\zeta_c(x, y)).$$

Таким образом, $\forall x, y \in S\ (\zeta_c(\alpha x, \alpha y) = \zeta_c(\beta x, \beta y))$.

Положим $x = \beta, y = \alpha$.

Имеем $\zeta_c(\alpha\beta, e) = \zeta_c(e, \alpha\beta)$.

Так как ζ_c есть функция линейного порядка, то отсюда следует, что

$$\zeta_c(\alpha\beta, e) = 0,$$

что неверно, так как $\alpha\beta \neq e$. Полученное противоречие доказывает теорему. #

Таким образом, $|H| \leq 2$, то есть в $\langle G, \cdot, \zeta\rangle$ не может быть более **одной** инволюции.

Группу H будем называть *группой инволюций*.

Рассмотрим примеры группы инволюций в некоторых 2-упорядоченных группах.

В группе $\langle \mathbf{C}, +, \eta\rangle$ группа инволюций состоит только из нулевого элемента:

$$H = \{0\},\ |H| = 1;\ H \text{ – вырожденная.}$$

В $\langle \mathbf{C}^*, \cdot, \eta\rangle$ $H = \{-1, 1\}$, $|H| = 2$.

В $\langle T_0 \times \Gamma, \cdot, \zeta\rangle$ $H = \{(1, e), (-1, e)\}$, $|H| = 2$.

В $\langle \mathbf{C}_{2n}, \cdot, \zeta\rangle$ $H = \{-1, 1\}$, $|H| = 2$.

4. Прямые в двумерно упорядоченной группе

С использованием доказанных результатов обратимся теперь к изучению прямых $l_{e,a}$.

Имеет место

Теорема 4.1. Прямая $l_{e,a}$ является подгруппой 2-упорядоченной группы $\langle G, \cdot, \zeta\rangle$ тогда и только тогда, когда она замкнута относительно возведения в квадрат своих элементов:

$$\forall x \in l_{e,\alpha}\ (x^2 \in l_{e,a}).$$

Доказательство. *Необходимость* очевидна.

Обратимся к достаточности. Для её доказательства нам понадобится следующая

Лемма 4.2. Пусть $u, u^2 \in l_{e,a}$. Тогда $u^{-1} \in l_{e,a}$.

Доказательство. Действительно, согласно [1],

$$\zeta(e, u, u^2) = 0.$$

Значит, $\zeta(u^{-1}, e, u) = 0$.

Так как $l_{e,a} = l_{e,u}$ и $u^{-1} \in l_{e,u}$,

то $u^{-1} \in l_{e,a}$. #

Достаточность. Пусть теперь $b, c \in l_{e,a}$. Убедимся, что $bc^{-1} \in l_{e,a}$.

Рассмотрим возможные случаи:

(1) Пусть $o(b) = 2$.

Согласно теореме 3.3,

$$c \neq c^{-1},\ c^2 \neq e.$$

Используя условие теоремы и лемму 4.2, получаем

$$\{e, b, c, c^2, c^{-1}, a\} \subset l_{e,a}.$$

Отсюда имеем $\zeta(b, c, c^2) = 0$,

то есть $\zeta(bc^{-1}, e, c) = 0$.

Так как $l_{e,c} = l_{e,a}$,

то $bc^{-1} \in l_{e,a}$.

(2) Пусть $o(b) \neq 2$, $o(c) \neq 2$. Вышеприведённые рассуждения остаются в силе.

(3) Пусть $o(c) = 2$.

Следовательно, $b \neq b^{-1}$, $b^2 \neq e$.

Так как $c = c^{-1}$,

то $\zeta(c^{-1}, e, b) = 0$.

Следовательно, $\zeta(bc^{-1}, b, b^2) = 0$.

Учитывая тот факт, что $b \neq b^2$, получаем

$$l_{e,b^2} = l_{e,a}.$$

Следовательно, $bc^{-1} \in l_{e,a}$.

Теорема доказана. #

Следствие 4.3. Пусть $\langle G, \cdot, \zeta\rangle$ – 2-упорядоченная группа, $\alpha \in G$, $o(\alpha) = 2$. Тогда $l_{e,\alpha} \lhd G$.

Доказательство. Согласно доказанной теореме 4.1, достаточно убедиться, что

$$\forall x \in G\ (x \in l_{e,\alpha} \to x^2 \in l_{e,\alpha}).$$

Пусть $x \in l_{e,\alpha}$, то есть $\zeta(e, x, \alpha) = 0$. В силу инвариантности:

$$\zeta(\alpha, x\alpha, e) = 0,$$

то есть $x\alpha \in l_{e,\alpha}$.

Так как $x\alpha \neq x$,

то $l_{e,\alpha} = l_{x\alpha,x}$.

Заметим, что $\zeta(x, x^2, \alpha x) = 0$,

следовательно, $x^2 \in l_{x,\alpha x}$.

Значит, $x^2 \in l_{e,\alpha}$.

Таким образом, $l_{e,\alpha}$ – подгруппа G.

Так как $\alpha \in Z(G)$ [6], то из условия $x \in l_{e,\alpha}$ непосредственно следует, что

$$\forall g \in G\ \zeta(e, x^g, \alpha) = 0,$$

то есть $l_{e,\alpha} \lhd G$. #

Проиллюстрируем доказанную теорему.

1) а) Рассмотрим аддитивную группу комплексных чисел с естественной ориентацией: $\langle \mathbf{C}, +, \eta\rangle$. Тогда для каждого $b \in \mathbf{R}$, $b \neq 0$ имеем

$$l_{0,b} = \{(x, 0) \mid x \in \mathbf{R}\} \text{ изоморфна } \langle \mathbf{R}, +\rangle.$$

Очевидно, $l_{0,b} \lhd \mathbf{C}$.

б) В этой же группе прямая

$$l_{0,i} = \{(0, y) \mid y \in \mathbf{R}\} \lhd \mathbf{C}.$$

в) И наконец, пусть $z = a + bi$, где $ab \neq 0$.

Так как

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & a & b \\ 1 & x & y \end{vmatrix} = ay - bx\ ,$$

то $$l_{0,z} = \{(x, y) \mid ay - bx = 0\} = \left\{\left(x, \frac{bx}{a}\right) \middle| x \in \mathbf{R}\right\}.$$

Так как $$\forall x \in \mathbf{R} \left(\left(x, \frac{bx}{a}\right) + \left(x, \frac{bx}{a}\right) = \left(2x, \frac{2bx}{a}\right) \in l_{0,z}\right),$$

то $$l_{0,z} \lhd \mathbf{C}.$$

2) Обратимся к группе $\langle \mathbf{C}^*, \cdot, \eta\rangle$.

Пусть $b \in \mathbf{R}$, $b \neq 0$, $b \neq 1$. Имеем

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & b & 0 \\ 1 & x & y \end{vmatrix} = y(b-1).$$

Следовательно, $$l_{1,b} = \{(x, 0) \mid x \in \mathbf{R}^*\} \lhd \mathbf{C}^*.$$

Однако $$l_{1,i} = \{(x, 1 - x) \mid x \in \mathbf{R}\}.$$

Очевидно, $$l_{1,i} \ntriangleleft \mathbf{C}^*.$$

3) Пусть $\langle G, \cdot, <\rangle$ – произвольная линейно упорядоченная группа. Положим

$$\forall x, y \in G\ (\zeta_1(x, y) = 1 \leftrightarrow x < y).$$

Пусть $x = (x_1, x_2, x_3)$. Положим

$$\zeta_2(x) = \prod_{1 \le i \le j \le 3} \zeta_1(x_i, x_j).$$

В [5] доказано, что $\langle G, \cdot, \zeta_2\rangle$ – 2-упорядоченная группа. Тогда

$$\forall g \in G \backslash \{e\}\ (l_{e,g} = \{e, g\}).$$

Так как $g^2 \neq e$, то $$l_{e,g} \ntriangleleft G.$$

5. Группы бесконечно узкого поля

Один из разделов теории двумерного порядка изучает двумерно упорядоченные поля.

Определение 5.1. Поле $\langle P, +, \cdot, \zeta\rangle$ называется *двумерно упорядоченным* полем, если функция двумерного порядка ζ, заданная на P, согласована с алгебраической структурой поля.

В любом 2-упорядоченном поле можно рассматривать две двумерно упорядоченные группы: $\langle P, +, \zeta\rangle$ и $\langle P^*, \cdot, \zeta\rangle$.

Определение 5.2. *Базой* P_0 двумерно упорядоченного поля P называется множество

$$P_0 = \{x \in P \mid \zeta(0, 1, x) = 0\}$$

База P_0 является линейно упорядоченным полем.

Определение 5.3. *Верхним конусом* P^u поля P называется множество

$$P^u = \{x \in P \mid \zeta(0, 1, x) \ge 0\}.$$

В [1] показано, что верхний конус однозначно определяет двумерный порядок в поле. Поэтому часто 2-упорядоченное поле обозначают $\langle P, P^u\rangle$.

Определение 5.4. Пусть $\langle P, P^u\rangle$ – двумерно упорядоченное поле с базой P_0. Элемент $a \in P$ называется *бесконечно близким к базе* P_0, если

$$\forall n\ \forall r \in P_0\ (r < a) \Rightarrow (a - r)^n \in P^u$$

или $$\forall n\ \forall r \in P_0\ (r < a) \Rightarrow (a - r)^n \in -P^u.$$

Множество B бесконечно близких к базе элементов относительно операций сложения и умножения образует *бесконечно узкое* поле $\langle B, +, \cdot\rangle$ [7].

Известно [8, 9], что бесконечно узкие поля допускают как линейное, так и двумерное упорядочивания. В частности, в [10] показано, что в поле $\langle \mathbf{Q}(\pi), +, \cdot\rangle$ кроме линейного порядка можно задать двумерное упорядочивание ζ, такое, что $\langle \mathbf{Q}(\pi), +, \cdot, \zeta\rangle$ есть бесконечно узкое поле. Мультипликативная и аддитивная группы бесконечно узких полей доставляют ещё один класс двумерно упорядоченных групп.

Обзор работ по n-упорядоченным группам по состоянию на 2007 г. содержится в [11].

ЛИТЕРАТУРА

1. *Пестов Г.Г.* Двумерно упорядоченные поля. Томск: Изд-во Том. ун-та, 2003. 128 с.
2. *Забарина А.И.*, *Пестов Г.Г.* Об n-мерно упорядоченных группах // Вестник Томского государственного университета. Математика и механика. 2003. № 280. С. 40–43.
3. *Забарина А.И.* О циклически упорядоченных группах: дис. … канд. физ-мат. наук: 01.01.06. Томск, 1984. 84 с.
4. *Väth M.* Nonstandard Analysis. Basel: Birkhäuser Verlag, 2007. 252 p.
5. *Тоболкин А.А.* К теории n-упорядоченных групп: дис. ... канд. физ.-мат. наук: 01.01.06. Томск, 2009. 71 с. URL: http://vital.lib.tsu.ru/vital/access/manager/Repository/vtls:000370652
6. *Забарина А.И.*, *Пестов Г.Г.* Двумерно упорядоченные группы // Вестник Томского государственного университета. Математика и механика. 2009. № 1 (13). С. 5–8.
7. *Пестов Г.Г.*, *Фомина Е.А.* Подполе B бесконечно близких к базе элементов // Вестник Томского государственного университета. Математика и механика. 2009. № 2 (6). С. 41–47.
8. *Пестов Г.Г.*, *Фомина Е.А.* Конструкция бесконечно узкого двумерно упорядоченного поля // Вестник Томского государственного университета. Математика и механика. 2007. № 1(1). С. 50–53.
9. *Фомина Е.А.* Критерий бесконечно узкого поля // Вестник Томского государственного университета. Математика и механика. 2009. № 1(5). С. 27–30.
10. *Фомина Е.А.* К вопросу о бесконечно близких к базе элементах // XIII Всероссийская конференция студентов, аспирантов и молодых учёных «Наука и образование» (20–24 апреля 2009 г.): в 6 т. Т. 1. Естественные и точные науки. Томск: Изд-во ТГПУ, 2009. С. 25–28.
11. *Избранные* вопросы алгебры. Сборник статей, посвящённый памяти Н.Я. Медведева. Барнаул: Изд-во Алтайского государственного университета, 2007. 310 с.

Статья поступила 15.03.2015 г.

Pestov G.G., *Zabarina A.I.*, *Tobolkin A.A.*, *Fomina E.A.* ON 2-ORDERED GROUPS

DOI 10.17223/19988621/34/3

Let $h(x, y, z)$ denote the standard orientation of the plane $\mathbf{R}^2$. Let M be a non-empty set, ζ: $M \to \{0, +1, -1\}$.

If for every subset A of a set M, $|A| \le 5$, there exists a map ϕ: $A \to \mathbf{R}^2$, such that $x, y, z \in A$ implies

$$\zeta(x, y, z) = \eta(\phi(x), \phi(y), \phi(z)),$$

then (M, ζ) is called a 2-ordered set and ζ is called a 2-order function on M.

If ζ is a 2-order function on a group G such that for every x, y, z, a from the group G the equality

$$\zeta(ax, ay, az) = \zeta(xa, ya, za) = \zeta(x, y, z)$$

holds, then G is said to be a 2-ordered group.

The paper contains new examples of 2-ordered groups. It is proved that every 2-ordered group contains only one involution or none. A criterion is formulated for a straight line in a 2-ordered group *G* to be a subgroup of *G*.

Keywords: two-dimensional order, 2-ordered group, involution, straight line.

PESTOV German Gavrilovich (Doctor of Physics and Mathematics, Tomsk State University, Tomsk, Russian Federation)
E-mail: gpestov@mail.ru

ZABARINA Anna Ivanovna (Candidate of Physics and Mathematics, Tomsk State Pedagogical University, Tomsk, Russian Federation)
E-mail: aizabarina@gmail.com

TOBOLKIN Anton Aleksandrovich (Candidate of Physics and Mathematics, Tomsk Academic Lyceum, Tomsk, Russian Federation)
E-mail: tobantal@gmail.com

FOMINA Elena Anatolievna (Candidate of Physics and Mathematics, Tomsk State Pedagogical University, Tomsk, Russian Federation)
E-mail: ef254@mail.ru

REFERENCES

1. Pestov G.G. *Dvumerno uporyadochennye polya*. Tomsk, Tomsk St. Univ. Publ., 2003. 128 p. (in Russian)
2. Zabarina A.I., Pestov G.G. Ob *n*-merno uporyadochennykh gruppakh. *Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo universiteta. Matematika i mekhanika*, 2003, no. 280, pp. 40–43. (in Russian)
3. Zabarina A.I. *O tsiklicheski uporyadochennykh gruppakh*. Dis. kand. fiz-mat. nauk: 01.01.06. Tomsk, 1984. 84 p. (in Russian)
4. Väth M. *Nonstandard Analysis*. Basel, Birkhäuser Verlag, 2007. 252 p.
5. Tobolkin A.A. *K teorii n-uporyadochennykh grupp*. Dis. kand. fiz.-mat. nauk: 01.01.06. Tomsk, 2009. 71 c. URL: http://vital.lib.tsu.ru/vital/access/manager/Repository/vtls:000370652 (in Russian)
6. Zabarina A.I., Pestov G.G. Dvumerno uporyadochennye gruppy. *Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo universiteta. Matematika i mekhanika*, 2009, no. 1 (13), pp. 5–8. (in Russian)
7. Pestov G.G., Fomina E.A. Podpole *B* beskonechno blizkikh k baze elementov. *Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo universiteta. Matematika i mekhanika*, 2009, no. 2 (6), pp. 41–47. (in Russian)
8. Pestov G.G., Fomina E.A. Konstruktsiya beskonechno uzkogo dvumerno uporyadochennogo polya. *Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo universiteta. Matematika i mekhanika*, 2007, no. 1(1), pp. 50–53. (in Russian)
9. Fomina E.A. Kriteriy beskonechno uzkogo polya. *Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo universiteta. Matematika i mekhanika*, 2009, no. 1(5), pp. 27–30. (in Russian)
10. Fomina E.A. K voprosu o beskonechno blizkikh k baze elementakh. *XIII Vserossiyskaya konferentsiya studentov, aspirantov i molodykh uchenykh «Nauka i obrazovanie». April 20–24, 2009. Vol. 1. Estestvennye i tochnye nauki*. Tomsk, TGPU Publ., 2009, pp. 25–28. (in Russian)
11. *Izbrannye voprosy algebry. Sbornik statey, posvyashchennyy pamyati N.Ya. Medvedeva*. Barnaul, AltGU Publ., 2007. 310 p. (in Russian)