

УДК 530.145, 517.925.51

Д.С. КАПРУЛИН, С.Л. ЛЯХОВИЧ

О СТАБИЛЬНОСТИ НЕЛИНЕЙНОГО ОСЦИЛЛЯТОРА С ВЫСШИМИ ПРОИЗВОДНЫМИ¹

Изучается стабильность нелинейного осциллятора Пайса – Уленбека с высшими производными. Демонстрируется стабильность линейной теории и находится нелинейность, сохраняющая стабильность системы.

Ключевые слова: теории с высшими производными, осциллятор Пайса – Уленбека, духовое поле Остроградского.

Введение

На современном этапе развития физики высоких энергий рассматриваются теории с высшими производными, лагранжианы которых зависят от вторых и более высоких производных полей. Примерами таких моделей являются осциллятор Пайса – Уленбека [1], частицы с жесткостью [2], обобщенная электродинамика Подольского [3], теории R^2 - и $f(R)$ -гравитации [4–6], конформные поля высших спинов [7]. Во многих случаях теории с высшими производными характеризуются свойствами, не имеющими места в моделях с лагранжианами первого порядка, например более широкой группой симметрий. Включение высших производных также позволяет улучшить сходимость интегралов в классической и квантовой теории.

Известная трудность теорий с высшими производными заключается в том, что при переходе к гамильтонову формализму в соответствии с процедурой Остроградского [8] гамильтониан теории оказывается линейным по некоторым переменным и, следовательно, никогда не ограничен снизу. Соответствующее утверждение известно как теорема Остроградского [8, 9]. Типичными следствиями неограниченности снизу гамильтониана являются существование квантовых состояний с отрицательной нормой или отрицательной энергией, а на классическом уровне – появление неограниченно растущих решений и неполных траекторий [10]. В совокупности, о перечисленных нежелательных особенностях говорят как о нестабильности динамики.

Проблему нестабильности удастся обойти в некоторых вырожденных теориях [11], гамильтонианы которых оказываются ограниченными снизу с учетом связей [2, 12–16]. Другие подходы основываются на идеях эвклидова поворота в континуальном интеграле [17, 18] и РТ-симметричной квантовой механики [19].

В данной работе используется идея того, что стабильность теории может быть обеспечена существованием альтернативной формулировки первого порядка с положительным гамильтонианом [20–22], не являющимся гамильтонианом Остроградского. Данный подход позволяет преодолеть запрет, устанавливаемый теоремой Остроградского.

Нелинейный осциллятор с высшими производными

Рассмотрим механическую модель, динамика которой описывается одним обыкновенным дифференциальным уравнением порядка $2n$:

$$\frac{1}{\Omega} \prod_{i=1}^n \left(\frac{d^2}{dt^2} + \omega_i^2 \right) x + \frac{dU}{dx} \left(\sum_{i=1}^n \alpha_i P_i x \right) = 0. \quad (1)$$

Здесь Ω – числовой множитель размерности $[\Omega] = \text{с}^{2n-2}$; $U(x)$ – произвольная функция динамической переменной $x(t)$;

$$P_i = \prod_{j \neq i} \left(\frac{1}{\omega_j^2 - \omega_i^2} \left(\frac{d^2}{dt^2} + \omega_j^2 \right) \right), \quad \frac{dU}{dx} \left(\sum_{i=1}^n \alpha_i P_i x \right) = \frac{dU(x)}{dx} \Big|_{x = \sum_{i=1}^n \alpha_i P_i x}. \quad (2)$$

¹ Работа выполнена в рамках Программы повышения конкурентоспособности ТГУ среди ведущих мировых научно-образовательных центров и гранта РФФИ № 13-02-00551, а также поддержана грантом РФФИ № 11-01-00830-а.

Без ограничения общности частоты ω_i считаются несовпадающими и упорядоченными в порядке возрастания $\omega_i < \omega_j$ при $i < j$. Вещественные константы α_i являются параметрами теории. Рассмотрим только случай $\alpha_i \neq 0$.

В случае $\alpha_i = 1$ теория (1) следует из принципа наименьшего действия для лагранжиана

$$L = \frac{1}{\Omega} \left[x \prod_{i=1}^n \left(\frac{d^2}{dt^2} + \omega_i^2 \right) x + U(x) \right] \quad (3)$$

и может пониматься как нелинейное обобщение осциллятора Пайса – Уленбека порядка $2n$. Выражение для функции Лагранжа (3) немедленно следует из уравнения (1) и операторного тождества

$$\sum_{i=1}^n P_i = 1. \quad (4)$$

При других значениях параметров α_i теория (1) вариационной не является. Физическая интерпретация модели (1) как осциллятора Пайса – Уленбека с некоторым невариационным взаимодействием, однако, остается справедливой.

Уравнение с высшими производными (1) эквивалентно системе n вариационных уравнений второго порядка

$$\frac{1}{\Omega} \left(\prod_{j \neq i} (\omega_j^2 - \omega_i^2) \right) \left(\frac{d^2}{dt^2} + \omega_i^2 \right) \xi_i + \frac{dU}{dx} \left(\sum_{j=1}^n \alpha_j \xi_j \right) = 0, \quad i, j = 1, 2, \dots, n. \quad (5)$$

Соответствующая функция Лагранжа теории имеет вид

$$L = \frac{1}{2\Omega} \sum_{i=1}^n \left[\alpha_i \left(\prod_{j \neq i} (\omega_j^2 - \omega_i^2) \right) \left(\left(\frac{d\xi_i}{dt} \right)^2 - \omega_i^2 \xi_i^2 \right) \right] - U \left(\sum_{j=1}^n \alpha_j \xi_j \right). \quad (6)$$

Взаимно-однозначное соответствие между решениями систем (1) и (5) устанавливается соотношениями

$$\xi_i = P_i x, \quad (7a)$$

$$x = \sum_{i=1}^n \xi_i. \quad (7b)$$

Переход от (5) к (1) получается очевидной подстановкой соотношения (7a) в (5). Самосогласованность данной подстановки обеспечивается тем, что каждое из уравнений (5) для всех $i = 1, 2, \dots, n$ обращается в уравнение (1).

В обратную сторону соответствие между решениями уравнений устанавливается с использованием соотношения (4) и очевидных тождеств

$$P_i \xi_j - P_j \xi_i = 0, \quad (8)$$

вытекающих из уравнений (5). Имеем следующую цепочку равенств:

$$0 = P_j \xi_i - P_j \xi_i \Rightarrow 0 = P_j \xi_i - \xi_i + \sum_{k \neq i} P_k \xi_i \Rightarrow \xi_i = P_i \sum_{j=1}^n \xi_j. \quad (9)$$

Подставляя последнее из соотношений (9) в (5), мы видим, что каждое решение (5) представимо в виде (7a) и функция (7b) удовлетворяет уравнению (1). Требуемое утверждение доказано.

Переход к системе второго порядка (5) можно рассматривать как некоторый специальный способ понижения порядка уравнения (1). Будем говорить о моделях (1) и (5) как о x - и ξ -представлениях теории (1). Так как уравнения в ξ -представлении являются вариационными, они позволяют использовать для изучения модели (1) весь комплекс методов вариационной теории. В частности, уравнение (1) является гамильтоновым.

Переход в гамильтонов формализм осуществляется стандартным способом. Канонические импульсы и функция Гамильтона имеют вид

$$p_i \equiv \left(\partial / \partial \left(\frac{d\xi_i}{dt} \right) \right) L = \gamma_i \frac{d\xi_i}{dt}, \quad \gamma_i = \frac{\alpha_i}{\Omega} \left(\prod_{j \neq i} (\omega_j^2 - \omega_i^2) \right) \neq 0; \quad (10)$$

$$H = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \left(\frac{p_i^2}{\gamma_i} + \gamma_i \omega_i^2 \xi_i^2 \right) + U \left(\sum_{j=1}^n \alpha_j \xi_j \right). \quad (11)$$

Скобки Пуассона фазовых переменных $z_I = (\xi_i, p_i)$ являются каноническими

$$\{\xi_i, \xi_j\} = 0, \quad \{\xi_i, p_j\} = \delta_{ij}, \quad \{p_i, p_j\} = 0. \quad (12)$$

Система уравнений Гамильтона

$$\frac{dz_I}{dt} = \{z_I, H\}, \quad (13)$$

по построению, эквивалентна вариационной системе (5) и, следовательно, задает гамильтонову формулировку для уравнения (1).

В отличие от гамильтониана Остроградского, гамильтониан (11) может быть ограничен снизу, если

$$(-1)^{i+1} \alpha_i > 0, \quad U(x) \geq 0. \quad (14)$$

На самом деле, при выполнении (14) имеет место более сильное утверждение: свободный гамильтониан ($U = 0$) задается положительно определенной квадратичной формой фазовых переменных. С учетом положительности гамильтониана соотношение (14) является одновременно достаточным условием стабильности теории (1). На классическом уровне стабильность следует из того факта, что поверхности постоянной энергии $H = \text{const}$ ограничены для всех значений энергии. Тем самым исключается неограниченно растущее поведение решения для всех начальных данных, известное в нелинейных теориях с высшими производными. Квантовая стабильность также очевидна, поскольку положительность гамильтониана влечет ограниченность снизу спектра энергии. Разрешенные значения энергии и собственные функции оператора Гамильтона могут быть найдены путем введения операторов рождения-уничтожения и последующего учета взаимодействия по теории возмущений.

Существование положительного гамильтониана (11) и стабильность модели (1) не противоречат теореме Остроградского. В случае $U = 0$ теория (1) является полигамильтоновой. Каждое значение параметров α_i соответствует некоторому гамильтониану (11), который может быть ограничен или неограничен снизу в зависимости от знаков α_i [21]. Утверждение о неограниченности снизу относится только к гамильтониану Остроградского, который следует из действия (3) и соответствует $\alpha_i = 1$ [19]. В нелинейной теории разные значения параметров α_i соответствуют разным моделям, поэтому каждая нелинейная теория (1) описывается единственным гамильтонианом (11). Противоречия с теоремой Остроградского не возникает, поскольку уравнения вида (1), совместные с существованием положительного гамильтониана (11), не являются вариационными.

В x -представлении эквивалентом условия положительности гамильтониана является условие положительности интеграла движения, генерирующего трансляции по времени [22]. Поскольку уравнения (1) не являются вариационными, соответствие между симметриями и законами сохранения должно пониматься в обобщенном смысле [23] и устанавливаться при помощи лагранжева якоря [24]. В рассматриваемой модели положительный интеграл движения E и лагранжев якорь V имеют вид

$$E = \frac{1}{2\Omega} \sum_{i=1}^n \left[\alpha_i \left(\prod_{j \neq i} (\omega_j^2 - \omega_i^2) \right) \left(\left(\frac{d(P_i x)}{dt} \right)^2 + \omega_i^2 (P_i x)^2 \right) \right] + U \left(\sum_{i=1}^n \alpha_i P_i x \right); \quad (15)$$

$$V = - \sum_{i=1}^n \frac{P_i}{\alpha_i} - W \left(\frac{d^2 U}{dx^2} \left(\sum_{i=1}^n \alpha_i P_i x \right) \right), \quad (16)$$

где линейный оператор W задается соотношением

$$W = \Omega \sum_{i < j} \left[\left(\frac{a_i}{a_j} + \frac{a_j}{a_i} - 2 \right) \prod_{k \neq i} \frac{1}{\omega_k^2 - \omega_i^2} \prod_{l \neq j} \frac{1}{\omega_l^2 - \omega_j^2} \prod_{s \neq i, s \neq j} \left(\frac{d^2}{dt^2} + \omega_s^2 \right) \right]. \quad (17)$$

Здесь закон сохранения (15) является аналогом гамильтониана (11), а лагранжев якорь (16) – скобки Пуассона (12), по отношению к которой гамильтониан (11) генерирует временную эволюцию системы. Таким образом, формулы (15) – (17) являются эквивалентом гамильтоновой картины стабильности, изложенной выше. Более подробное рассмотрение проблемы соответствия между симметриями и законами сохранения с точки зрения существования положительного интеграла движения, а также частные случаи формул (15) – (17) для $n = 2$ могут быть найдены в [22].

Заключение

В данной работе построены гамильтоновы формулировки для нелинейного осциллятора Пайса – Уленбека (1). В отличие от гамильтониана Остроградского, который всегда не ограничен снизу, найденные гамильтонианы (11) могут быть как ограниченными, так и не ограниченными снизу в зависимости от вида нелинейного самодействия. Если параметры модели совместны с существованием положительного гамильтониана, то теория оказывается стабильной как на классическом, так и на квантовом уровне. Стабильные вершины взаимодействия зависят от старших производных координаты по времени и не являются вариационными, хотя теория допускает эквивалентную гамильтонову форму, и тем самым построение квантовой теории. Последнее обстоятельство мотивирует изучение вершин взаимодействия такого типа и в других нелинейных теориях.

Показано также, что стабильность моделей с высшими производными может быть установлена без перехода в формализм первого порядка. При этом условие положительности гамильтониана теории заменяется условием существования положительного закона сохранения и лагранжева яко-ря, который ассоциирует этот закон сохранения с симметрией уравнений относительно трансляции времени.

Авторы благодарят А.А. Шарапова за ценные замечания.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Pais A. and Uhlenbeck G.E. // Phys. Rev. – 1950. – V. 79. – No. 1. – P. 145–165.
2. Plyushchay M.S. // Int. J. Mod. Phys. A. – 1989. – V. 4. – No. 15. – P. 3851–3865.
3. Podolsky B. // Phys. Rev. – 1942. – V. 62. – No. 1–2. – P. 68–71.
4. Buchbinder I.L. and Lyakhovich S.L. // Class. Quant. Grav. – 1987. – V. 4. – No. 6. – P. 1483–1501.
5. Sotiriou T.P. and Faraoni V. // Rev. Mod. Phys. – 2010. – V. 82. – No. 1. – P. 451–497.
6. Felice A. De and Tsujikawa S. // Living Rev. Rel. – 2010. – V. 13. – P. 3.
7. Fradkin E.S. and Tseytlin A.A. // Phys. Rep. – 1985. – V. 119. – No. 4–5. – P. 233–362.
8. Остроградский М.В. // Вариационные принципы механики /под ред. Л.С. Поллака. – М.: Физматгиз, 1959. – С. 315–387.
9. Woodard R.P. // Lect. Notes Phys. – 2007. – V. 720. – P. 403–433.
10. Smilga A.V. // Nucl. Phys. B. – 2005. – V. 706. – No. 03. – P. 598–614.
11. Гитман Д.М., Ляхович С.Л., Тютин И.В. // Изв. вузов. Физика. – 1983. – Т. 26. – № 8. – С. 61–66.
12. Chen T., Fasiello M., Lim E.A., and Tolley A.J. // JCAP. – 2013. – V. 2013. – No. 2. – P. 042.
13. Andrzejewski K., Bolonek K., Gonera J., and Maslanka P. // Phys. Rev. A. – 2010. – V. 77. – No. 2. – P. 026103.
14. Strominger A. // Phys. Rev. D. – 1984. – V. 30. – No. 10. – P. 2257–2259.
15. Deser S. // Phys. Rev. Lett. – 2009. – V. 103. – No. 10. – P. 101302.
16. Bergshoeff E.A., Hohm O., and Townsend P.K. // Ann. Phys. – 2010. – V. 325. – No. 5. – P. 1118–1134.
17. Hawking S.W. and Hertog T. // Phys. Rev. D. – 2002. – V. 65. – No. 10. – P. 103515.
18. Ketov S.V., Michiaki G., and Yumibayashi T. // Advances in Quantum Field Theory. – Rijeka: Tech Publishers, 2012. – P. 49–73.
19. Bender C.M. and Mannheim P.D. // J. Phys. A: Math. Theor. – 2008. – V. 41. – No. 30. – P. 304018.
20. Bolonek K. and Kosinski P. // Acta Polon. Phys. B. – 2005. – V. 36. – P. 2115.
21. Damaskinsky E.V. and Sokolov M.A. // J. Phys. A: Math. Gen. – 2006. – V. 39. – No. 33. – P. 10499.
22. Kaparulin D.S., Lyakhovich S.L., and Sharapov A.A. // arXiv e-print archive. – 2014. – V. 1407. – P. 8481. – URL: <http://arxiv.org/abs/1407.8481>.
23. Kaparulin D.S., Lyakhovich S.L., and Sharapov A.A. // J. Math. Phys. – 2010. – V. 51. – No. 8. – P. 082902.
24. Kazinski P.O., Lyakhovich S.L., and Sharapov A.A. // JHEP. – 2005. – V. 0507. – No. 7. – P. 076.

Национальный исследовательский Томский государственный университет,
г. Томск, Россия
E-mail: dsc@phys.tsu.ru; sll@phys.tsu.ru

Поступила в редакцию 25.08.14.