

УДК 530.12

А.В. БОРИСОВ*, А.В. ШАПОВАЛОВ*,**

**РЕШЕНИЯ УРАВНЕНИЯ ГРОССА – ПИТАЕВСКОГО В КООРДИНАТАХ
ВЫТЯНУТОГО ЭЛЛИПСОИДА ВРАЩЕНИЯ¹**

С помощью метода преобразований подобия рассмотрен подход, позволяющий находить частные решения уравнения Гросса – Питаевского с нестационарным коэффициентом нелинейности в вырожденных эллипсоидальных координатах для вытянутого эллипсоида вращения. В явном виде найдено два точных решения, имеющих солитонные свойства, и соответствующие потенциалы. Вид решений проиллюстрирован примерами.

Ключевые слова: уравнение Гросса – Питаевского, точные решения, вырожденные эллипсоидные координаты, локализованные состояния.

Введение

Пространственно-временные структуры описываются решениями нелинейных уравнений, обладающими в определенном смысле свойствами локализации, и являются предметом активного изучения во многих областях нелинейной физики и ее приложений, таких, например, как конденсаты Бозе – Эйнштейна (БЭК) [1], нелинейная оптика, биофизика [2, 3] и др. (см., например, [4]). Теория БЭК в приближении среднего поля приводит к описанию состояний конденсата в терминах решений нелинейного уравнения Шредингера (НУШ), которое называется также уравнением Гросса – Питаевского (УГП) [5]. Приложения НУШ в волоконной оптике усилили интерес к неоднородным и нестационарным моделям, приводящим к концепции неавтономных солитонов, которые описываются НУШ с коэффициентами, зависящими от координат и времени (см., например, [6] и цитированную там литературу). В теории БЭК УГП с переменными коэффициентами также используется в различных задачах [6–8].

В данной работе рассматривается УГП с зависящим от времени параметром нелинейности $g(t)$ следующего вида:

$$\left[i\hbar \frac{\partial}{\partial t} + \frac{\hbar^2}{2m} \Delta - U(\mathbf{r}, t) - g(t) |\Psi(\mathbf{r}, t)|^2 \right] \Psi(\mathbf{r}, t) = 0. \quad (1)$$

Поясним смысл величин, входящих в уравнение (1). В контексте БЭК, согласно [5], функция $\Psi(\mathbf{r}, t)$ имеет смысл параметра порядка и называется волновой функцией конденсата, $|\Psi(\mathbf{r}, t)|^2$ пропорциональна плотности частиц в точке $\mathbf{r}$ в момент времени t ; Δ – оператор Лапласа; m – масса атома; $\hbar$ – постоянная Планка; $U(\mathbf{r}, t)$ – потенциал внешнего поля. Параметр g определяется как $g = 4\pi\hbar^2 a_s / m$, где a_s – длина рассеяния s -волны.

В волоконной оптике $\Psi(\mathbf{r}, t)$ имеет смысл комплексной амплитуды напряженности электрического поля оптического импульса.

Значение $g < 0$ соответствует притягивающему взаимодействию между атомами конденсата, а $g > 0$ – отталкивающему взаимодействию.

В одномерном случае ($\Psi(\mathbf{r}, t) = \Psi(x, t)$, $\Delta = \partial^2 / \partial x^2$) уравнение (1) при $U = 0$ интегрируется методом обратной задачи рассеяния (МОЗР) [9].

При $g < 0$ уравнение (1) называется фокусирующим и имеет многосолитонное решение. Односолитонное называют классическим или фундаментальным солитоном. Классический солитон называют также светлым или ярким солитоном. Этим подчеркивается, что солитон расположен на нулевом фоне, т.е. $\Psi(x, t) \rightarrow 0$ при $|x|, t \rightarrow \infty$.

¹ Работа частично поддержана Программой повышения конкурентоспособности ТГУ среди ведущих мировых научно-образовательных центров и программой «Наука», контракт № 1.676.2014/ К.

При $g > 0$ уравнение (1) называется дефокусирующим и не имеет солитонных решений в смысле МОЗР [9], т.е. на нулевом фоне. Если искать такие решения, что $\Psi(x, t)$ стремится к постоянному значению при $|x|, t \rightarrow \infty$, то существует решение, локализованное на постоянном отличном от нуля фоне, называемое темным солитоном.

Отметим также, что на основе МОЗР развиты приближенные методы, позволяющие исследовать динамику солитонов в условиях внешних воздействий [10, 11] (см. также [4] и цитированную там литературу).

Одномерная модель является упрощенной, например бозе-эйнштейновский конденсат представляет собой трехмерный объект. Для описания состояний нелинейных систем важны не только одномерные решения уравнения (1), но и двумерные и трехмерные. В многомерном случае при $U = 0$ решения уравнения (1) неустойчивы [12] и локализация состояний может быть достигнута с помощью соответствующего внешнего потенциала U . Поэтому нахождение локализованных солитоноподобных двумерных и трехмерных решений уравнения (1) и соответствующих потенциалов U , а также исследование свойств найденных решений, в частности их устойчивости, представляют значительный интерес для изучения свойств нелинейных систем.

В работе [13] рассматривались пространственно локализованные $2D$ -состояния уравнения Гросса – Питаевского для радиально-периодического потенциала оптической решетки. Показано, что солитонные свойства решений двумерного УГП достаточно разнообразны. В случае $g > 0$ существуют обычные солитоны. В случае отталкивания ($g < 0$) возникает вид солитонов, называемых радиальными щелевыми солитонами, которые рассматриваются в качестве возможных состояний БЭК, но могут также описывать и оптические солитоны в фотонно-кристаллических волноводах. В [14] найдены точные решения радиального УГП в виде кольцевых солитонов с цилиндрически симметричными потенциалами. В зависимости от знака g и вида потенциала решения могут принимать форму темных и светлых солитонных колец.

В данной работе с помощью результатов работ [6, 13, 14] получены уравнения, позволяющие находить частные точные решения многомерного УГП (1). Построены примеры точных решений УГП с солитонными свойствами в вырожденных эллипсоидальных координатах для вытянутого эллипсоида вращения. Приведены иллюстрации вида решений.

1. Редукция уравнения Гросса – Питаевского

Для построения решений УГП (1) в вырожденных эллипсоидных координатах, следуя [13, 14], воспользуемся идеями метода преобразований подобия (см. [8, 15, 16] и цитированную там литературу). Согласно этому методу, решение уравнения (1) ищется в виде анзаца, зависящего от вспомогательных функций – комбинаций независимых переменных. Анзац подставляется в исходное уравнение, и на вспомогательные функции выписываются уравнения, представляющие собой редукцию исходного уравнения (1). Вид анзаца и уравнений редукции в методе преобразований подобия [15] получаются из анализа свойств симметрии уравнения. В рассматриваемом случае симметрия уравнения (1) явно не используется, уравнения редукции выбираются исходя из аналогий с методом преобразований подобия.

Будем искать решение уравнения (1), согласно [13, 14], в виде следующего анзаца:

$$\Psi(\mathbf{r}, t) = \rho(\mathbf{r}, t) \exp(i\varphi(\mathbf{r}, t)) \Phi(\eta(\mathbf{r}, t)), \quad (2)$$

где $\rho(\mathbf{r}, t), \varphi(\mathbf{r}, t), \eta(\mathbf{r}, t)$ – вещественные гладкие функции. Выделение в явном виде функции Φ позволяет сформулировать уравнения редукции на функции анзаца, приводящие к солитоноподобным решениям [14].

Подставим выражение (2) в уравнение (1) и приравняем нулю мнимую и вещественную части соответственно:

$$\left(\eta_t + \frac{\hbar}{m} \nabla \varphi \cdot \nabla \eta \right) \frac{\Phi'}{\Phi} + \frac{\rho_t}{\rho} + \frac{\hbar}{2m} \left(\Delta \varphi + \frac{2}{\rho} \nabla \rho \cdot \nabla \varphi \right) = 0; \quad (3)$$

$$\frac{\hbar^2}{2m} (\nabla \eta)^2 \frac{\Phi''}{\Phi} + \frac{\hbar^2}{2m} \left(\Delta \eta + \frac{2}{\rho} \nabla \rho \cdot \nabla \eta \right) \frac{\Phi'}{\Phi} + \frac{\hbar^2}{2m} \left(-(\nabla \varphi)^2 + \frac{1}{\rho} \Delta \rho \right) - \hbar \varphi_t - U - g(t) \rho^2 \Phi^2 = 0, \quad (4)$$

где $\Phi' = d\Phi/d\eta$; $\eta_t = d\eta/dt$; $\rho_t = d\rho/dt$; $\varphi_t = d\varphi/dt$; ∇ – оператор градиента. В уравнениях (3), (4) приравняем нулю коэффициент при Φ'/Φ и получим следующую систему уравнений редукции:

$$\eta_t + \frac{\hbar}{m} \nabla \varphi \cdot \nabla \eta = 0; \quad (5)$$

$$\frac{\rho_t}{\rho} + \frac{\hbar}{2m} \left(\Delta \varphi + \frac{2}{\rho} \nabla \rho \cdot \nabla \varphi \right) = 0; \quad (6)$$

$$\Delta \eta + \frac{2}{\rho} \nabla \rho \cdot \nabla \eta = 0; \quad (7)$$

$$\frac{\hbar^2}{2m} (\nabla \eta)^2 \Phi'' + \frac{\hbar^2}{2m} \left(-(\nabla \varphi)^2 + \frac{1}{\rho} \Delta \rho \right) \Phi - (\hbar \varphi_t + U) \Phi - g(t) \rho^2 \Phi^3 = 0. \quad (8)$$

Уравнения (5) – (7) определяют вид функций η , ρ , φ , из последнего уравнения (8) выражается потенциал U .

В [14] уравнения, аналогичные (5) – (8), записывались в декартовых координатах в одномерном случае. С их помощью получены различные решения УГП (1) солитоноподобного вида, в том числе кольцевые солитоны для цилиндрически симметричного потенциала U . Для этого случая уравнения редукции в полярных координатах заменой переменных приводились к одномерным уравнениям в декартовых координатах. Свойства кольцевых солитонов подробно анализировались в [13, 14].

Поставим задачу о нахождении решений УГП (1) с помощью уравнений редукции (5) – (7) в криволинейных координатах. В этом случае уравнения редукции могут не сводиться к декартовым одномерным уравнениям и будут иметь решения, отличные от рассмотренных в [13, 14].

В данной работе строятся точные решения системы (5) – (7) в вырожденных эллипсоидальных координатах. Вид координатных поверхностей данной системы координат соответствует форме пространственного распределения конденсата [5].

2. Координаты вытянутого эллипсоида вращения

Перейдем к анализу уравнений редукции (5) – (8). Будем искать решения этих уравнений в разделяющихся переменных t и $\mathbf{r}$, положив

$$\rho = \tilde{T}(t)R(\mathbf{r}), \quad \eta = \tilde{T}(t)\Theta(\mathbf{r}), \quad \varphi = T(t)f(\mathbf{r}) + \xi(t). \quad (9)$$

Тогда из (5) – (9) получим

$$\tilde{p} + \frac{\hbar}{m} \frac{1}{\Theta} \nabla f \cdot \nabla \Theta = 0; \quad (10)$$

$$\tilde{p} + \frac{\hbar}{m} \left(\Delta f + \frac{2}{R} \nabla R \cdot \nabla f \right) = 0; \quad (11)$$

$$\Delta \Theta + \frac{2}{R} \nabla R \cdot \nabla \Theta = 0; \quad (12)$$

$$\frac{\hbar^2}{2m} \tilde{T}^2 (\nabla \Theta)^2 \Phi'' + \frac{\hbar^2}{2m} \left(-T^2 (\nabla f)^2 + \frac{1}{R} \Delta R \right) \Phi - (\hbar(T_t f + \xi_t) + U) \Phi - g(t) \tilde{T}^2 R^2 \Phi^3 = 0. \quad (13)$$

Здесь $\tilde{p}$, $\tilde{p}$ – постоянные; $\Phi' = d\Phi/d\eta$; $\Phi'' = d^2\Phi/d\eta^2$;

$$\tilde{p} = 2 \frac{\tilde{T}_t}{\tilde{T}T}, \quad \tilde{p} = \frac{\tilde{T}_t}{\tilde{T}T}. \quad (14)$$

Введем вырожденные эллипсоидальные координаты для вытянутого эллипсоида вращения [17]:

$$\begin{aligned} x &= c \operatorname{sh} \alpha \sin \beta \cos \phi, & y &= c \operatorname{sh} \alpha \sin \beta \sin \phi, & z &= c \operatorname{ch} \alpha \cos \beta, \\ c &= \text{const}, & 0 &\leq \alpha \leq \infty, & 0 &\leq \beta \leq \pi, & -\pi \leq \phi \leq \pi. \end{aligned} \quad (15)$$

Рассмотрим двумерные решения системы (10), (11), (12), (13) в координатах (15): $f = f(\alpha, \beta)$, $\Theta = \Theta(\alpha, \beta)$, $R = R(\alpha, \beta)$. Тогда уравнения (10), (11), (12) в системе координат (15) примут вид

$$\tilde{p} + \frac{\hbar}{m c^2 (\text{sh}^2 \alpha + \sin^2 \beta)} \left(f_\alpha \frac{\Theta_\alpha}{\Theta} + f_\beta \frac{\Theta_\beta}{\Theta} \right) = 0; \quad (16)$$

$$\tilde{p} + \frac{\hbar}{m c^2 (\text{sh}^2 \alpha + \sin^2 \beta)} \left[f_{\alpha\alpha} + f_{\beta\beta} + \left(2 \frac{R_\alpha}{R} + \text{cth} \alpha \right) f_\alpha + \left(2 \frac{R_\beta}{R} + \text{ctg} \beta \right) f_\beta \right] = 0; \quad (17)$$

$$\Theta_{\alpha\alpha} + \Theta_{\beta\beta} + \left(2 \frac{R_\alpha}{R} + \text{cth} \alpha \right) \Theta_\alpha + \left(2 \frac{R_\beta}{R} + \text{ctg} \beta \right) \Theta_\beta = 0. \quad (18)$$

Здесь использованы следующие обозначения: $f_\alpha = df/d\alpha$; $f_\beta = df/d\beta$; $f_{\alpha\alpha} = d^2 f/d\alpha^2$ и т.д.

Уравнение (13) запишем в виде

$$a\Phi'' - g(t)\Phi^3 = b\Phi, \quad (19)$$

где функции a и b задаются выражениями

$$a = \frac{\hbar^2}{2m} \frac{\tilde{T}^2}{\tilde{T}^2} \frac{(\nabla \Theta)^2}{R^2}; \quad (20)$$

$$b = -\frac{1}{R^2 \tilde{T}^2} \left\{ \frac{\hbar^2}{2m} \left(-T^2 (\nabla f)^2 + \frac{1}{R} \Delta R \right) - \hbar (T_t f + \xi_t) - U \right\}. \quad (21)$$

В координатах (15) имеем

$$a = \frac{\hbar^2}{2m} \frac{\tilde{T}^2}{\tilde{T}^2} \frac{1}{R^2} \frac{1}{c^2 (\text{sh}^2 \alpha + \sin^2 \beta)} (\Theta_\alpha^2 + \Theta_\beta^2); \quad (22)$$

$$U = \frac{\hbar^2}{2m} \frac{1}{c^2 (\text{sh}^2 \alpha + \sin^2 \beta)} \left[-T^2 (f_\alpha^2 + f_\beta^2) + \frac{1}{R} (R_{\alpha\alpha} + R_{\beta\beta} + \text{cth} \alpha R_\alpha + \text{ctg} \beta R_\beta) \right] - \hbar (T_t f + \xi_t) + R^2 \tilde{T}^2 b. \quad (23)$$

Уравнение (21) в форме (23) задает потенциал U .

Будем искать решение системы (16) – (18) в виде

$$\begin{aligned} R &= R_0 (\text{ch} \alpha - \cos \beta)^\mu, \\ \Theta &= \Theta_0 (\text{ch} \alpha - \cos \beta)^\nu, \\ f &= f_0 \frac{mc^2}{\hbar} (\text{ch} \alpha - \cos \beta)^2, \end{aligned} \quad (24)$$

где R_0, Θ_0 – произвольные постоянные; μ, ν, f_0 – искомые параметры.

Подставив (24) в (16), получим следующую систему уравнений:

$$\tilde{p} + 2f_0 \nu = 0, \quad 6f_0 + 4f_0 \mu + \tilde{p} = 0, \quad \nu + 1 + 2\mu = 0. \quad (25)$$

Решив систему (25), получим

$$f_0 = -\frac{1}{4}(\tilde{p} + \bar{p}), \quad \mu = -\frac{3\tilde{p} + \bar{p}}{2(\tilde{p} + \bar{p})}, \quad \nu = \frac{2\tilde{p}}{\tilde{p} + \bar{p}}, \quad (26)$$

где $\tilde{p}, \bar{p}$ – произвольные параметры.

Таким образом, построение решения вида (2) приводит к уравнениям (14), (19).

3. Решения уравнений редукции

Перейдем к построению решений уравнения (19). Отметим, что в соответствии с видом анзаца (2) функция Φ должна зависеть только от переменной η и не должна явно зависеть от координат α, β и времени t . Это требование выполняется, если функции $a, b, g(t)$ пропорциональны

друг другу. Тогда в уравнении (19) явная зависимость от координат и времени сократится и в уравнении останется только зависимость от η .

Рассмотрим функцию a в выражении (20). Из (24) имеем

$$\frac{(\nabla\Theta)^2}{R^2} = \frac{v^2}{c^2} \frac{\Theta_0^2}{R_0^2} (\operatorname{ch} \alpha - \cos \beta)^{2v-2\mu-2}. \quad (27)$$

Тогда из требования независимости a от α , β из (27) находим

$$v = \mu + 1. \quad (28)$$

Из (28) и (26) следует

$$\tilde{p} = 5\tilde{p}, \quad (29)$$

отсюда с учетом (26) получим

$$\mu = -\frac{2}{3}, \quad v = \frac{1}{3}, \quad f_0 = -\frac{3}{2}\tilde{p}. \quad (30)$$

Принимая во внимание (14), (29), (30) и условие пропорциональности a и $g(t)$, функции $T, \tilde{T}, \tilde{T}^2$ можно записать следующим образом:

$$T = -\frac{1}{3\tilde{p}} (\log |g(t)|)_t = -\frac{1}{3\tilde{p}} \frac{\dot{g}(t)}{g(t)}, \quad \tilde{T}^2 = a_1 (g(t))^{-5/3}, \quad \tilde{T}^2 = a_2^2 (g(t))^{-2/3}, \quad (31)$$

где $\tilde{p}$, a_1 , $a_2 (> 0)$ – ненулевые постоянные. Очевидно, $a_1 > 0$ для дефокусирующего случая ($g(t) > 0$) и $a_1 < 0$ для фокусирующего случая ($g(t) < 0$). Тогда соотношение (20) примет вид

$$a = \frac{\hbar^2}{2m} \frac{a_2^2 v^2}{a_1} \frac{\Theta_0^2}{R_0^2} g(t) = a_0 g(t). \quad (32)$$

Здесь a_0 – постоянная, вид которой очевиден из (32). Как видно из (20) и (32), $a > 0$, поэтому из (32) следует, что случай $a_0 > 0$ соответствует дефокусирующему уравнению (1) ($g(t) > 0$), а случай $a_0 < 0$ – фокусирующему ($g(t) < 0$).

Условие пропорциональности b и $g(t)$ запишем в виде

$$b = b_0 g(t), \quad b_0 = \text{const}. \quad (33)$$

С учетом (32) и (33) уравнение (19) перейдет в следующее уравнение:

$$a_0 \Phi'' - \Phi^3 = b_0 \Phi. \quad (34)$$

Аналогично, для (9) из (24), (30), (31) получим

$$\rho = \sqrt{|a_1|} R_0 |g(t)|^{-\frac{5}{6}} (\operatorname{ch} \alpha - \cos \beta)^{-\frac{2}{3}}, \quad \eta = \Theta_0 a_2 |g(t)|^{-\frac{1}{3}} (\operatorname{ch} \alpha - \cos \beta)^{\frac{1}{3}}, \quad (35)$$

$$\varphi = \frac{mc^2}{2\hbar} \frac{\dot{g}(t)}{g(t)} (\operatorname{ch} \alpha - \cos \beta)^2 + \xi(t).$$

Тогда искомое решение (2) можно записать как

$$\Psi(r, t) = \sqrt{|a_1|} R_0 |g(t)|^{-\frac{5}{6}} (\operatorname{ch} \alpha - \cos \beta)^{-\frac{2}{3}} \exp \left\{ i \left(\frac{mc^2}{2\hbar} \frac{\dot{g}(t)}{g(t)} (\operatorname{ch} \alpha - \cos \beta)^2 + \xi(t) \right) \right\} \Phi(\eta). \quad (36)$$

Обыкновенное дифференциальное уравнение (19), определяющее $\Phi(\eta)$, можно рассматривать как стационарное одномерное нелинейное уравнение Шредингера. Оно имеет частные решения – аналоги солитонных решений нестационарного одномерного НУШ. В [14] для уравнения подобного (19) строились солитоноподобные решения. В частном случае к анализу уравнения применялись трансценденты Пенлеве второго рода (см., например, [18]). В данной работе мы не ставим задачу систематического изучения уравнения (19), а ограничимся двумя частными решениями солитонного типа, чтобы проиллюстрировать поведение решений в эллипсоидальных координатах.

1) Нетрудно проверить, что для фокусирующего уравнения (1) функция

$$\Phi = \sqrt{2}l \operatorname{ch}^{-1}\left(\frac{l}{k}\eta\right) \quad (37)$$

является решением уравнения (19) при $b_0 = -l^2$, $a_0 = -k^2$, где l, k – вещественные параметры. Решение (37) является аналогом обычного (светлого) солитона НУШ.

2) Для дефокусирующего уравнения (1) решением уравнения (19) при $b_0 = -l^2$, $a_0 = k^2$ является функция

$$\Phi = l \operatorname{cth}\left(\frac{l}{\sqrt{2}k}\eta\right). \quad (38)$$

Выражение (38) представляет собой аналог «темного» солитона НУШ.

Выражение для потенциала с учетом (23) – (25), (29) – (31) примет следующий вид:

$$U = -\frac{mc^2}{2} \frac{\ddot{g}(t)}{g(t)} (\operatorname{ch} \alpha - \cos \beta)^2 + \frac{a_1 b_0 R_0^2}{g(t)^{2/3} (\operatorname{ch} \alpha - \cos \beta)^{4/3}} - \frac{\hbar^2}{3mc^2} \frac{1}{(\operatorname{ch} \alpha - \cos \beta)^2} - \hbar \xi_t. \quad (39)$$

Проведем анализ поведения функции (36) и соответствующего потенциала (39). Будем рассматривать только случаи пространственно локализованных решений в любой момент времени. Для каждого из решений (37), (38) уравнения (19) выберем следующую временную зависимость функции при нелинейности $g(t) = g_0(1 + \varepsilon \cos(\omega t))$. Здесь g_0 и ω – постоянные, а ε – малая величина. Таким образом, первое слагаемое в потенциале (39) вносит малый вклад и не влияет на его вид в области локализации решения (36). Конфигурация решения определяется соотношением между вторым и третьим слагаемыми.

Проиллюстрируем пространственную зависимость функции $|\Psi|^2$ из (36) для решений (37), (38) уравнения (19) в плоскости $z = 0$ декартовой системы координат (рис. 1). Функция $|\Psi|^2$ является осесимметричной, поэтому любое сечение, проходящее через ось z , будет выглядеть идентично. Выберем параметры в следующем виде: $m = 1$, $\hbar = 1$, $R_0 = 1$, $a_2 = 1$, $c = 1$, $\Theta_0 = \sqrt{2}/v$, для притягивающего случая $a_1 = g_0 = -1$, а для отталкивающего $a_1 = g_0 = 1$; кроме того, положим $\xi = 0$. Рис. 1, а соответствует притягивающей нелинейности, рис. 1, б – отталкивающей нелинейности.

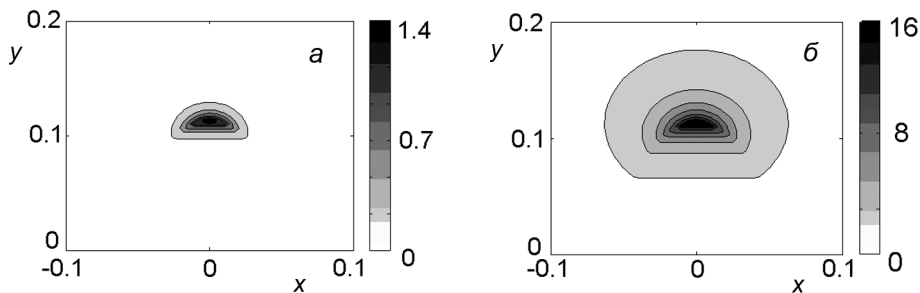


Рис. 1

Все рисунки построены при $\omega t = \pi/2$. Линии границ между областями различной яркости соответствуют поверхностям с постоянным значением $|\Psi|^2$ (изоповерхностям). Для наглядности по каждой области между этими линиями проведено усреднение, и этой области соответствует свое значение яркости, кроме центральной области. В центральной области значение $|\Psi|^2$ обращается в бесконечность в особой точке $\alpha = 0$, $\beta = 0$. Из рис. 1 видно, что все полученные решения являются локализованными в окрестности особой точки $\alpha = 0$, $\beta = 0$.

Заключение

С помощью метода преобразований подобия в работе получены уравнения редукции, позволяющие находить частные решения $\Psi(\mathbf{r}, t)$ многомерного уравнения Гросса – Питаевского (1). В явном виде построено два точных решения с солитонными свойствами для двумерного уравнения Гросса – Питаевского в вырожденных эллипсоидальных координатах. В декартовых координатах

натах солитонные решения Ψ задают пространственно локализованные трехмерные распределения плотности $|\Psi|^2$, которые, в контексте применений к БЭК, можно рассматривать как пространственные распределения частиц конденсата. Эллипсоидальные координаты интересны тем, что координатные поверхности данной системы координат соответствуют наблюдаемым сигарообразным пространственным распределениям БЭК. Решения построены для фокусирующего и дефокусирующего УГП и для каждого случая приведены потенциалы внешнего поля. Для фокусирующего случая решение строится с помощью обычного (светлого) солитона, а для дефокусирующего – с помощью «темного» солитона, который на бесконечности стремится к постоянной величине. Приведенные в иллюстративных примерах графики дают представление о трехмерных распределениях $|\Psi|^2$. Области пространственной локализации распределений будем считать ограниченными изоповерхностями $|\Psi|^2$, которые в приведенных примерах имеют вид полусфер. К недостаткам построенных решений следует отнести имеющиеся особенности в найденных решениях и в соответствующих потенциалах.

Следует также отметить, что с помощью примененного в работе метода можно строить и другие точные решения УГП, кроме найденных солитонных решений. Хотя найденные солитонные решения наиболее интересны, естественным развитием метода является построение и анализ других решений системы уравнений редукции.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Pethick C.J. and Smith H. Bose-Einstein condensation in Dilute Gases. – 2nd Edition. – Cambridge: Cambridge University Press, 2008. – 584 p.
2. Kivshar Yu. S. and Luther-Davies B. // Phys. Rep. – 1998. – V. 298. – P. 81–197.
3. Yakushevich L. V. Nonlinear Physics of DNA. – 2nd Edition. – Chichester: Wiley, 2004. – 205 p.
4. Scott A.C. Nonlinear Science: Emergence and Dynamics of Coherent Structures. – 2nd Edition. – Oxford: Oxford University Press, 2003. – 480 p.
5. Питаевский Л.П. // УФН. – 1998. – Т. 168. – С. 641–653.
6. Yan Zhenya and Konotop V.V. // Phys. Rev. E. – 2009. – V. 80. – P. 036607.
7. Peres-Garcia V.M., Torres P.J., and Konotop V.V. // Physica D. – 2006. – V. 221. – P. 31–36.
8. Bolmonte-Beitia J., Perez-Garcia V.M., Vekslerchik V., and Konotop V.V. // Phys. Rev. Lett. – 2008. – V. 100. – P. 164102.
9. Захаров В.Е., Манаков С.В., Новиков С.П., Питаевский Л.П. Теория солитонов: Метод обратной задачи. – М.: Наука, 1980. – 319 с.
10. Kaup D.J. and Newell A.C. // Proc. Roy. Soc. A. – 1978. – V. 361. – P. 413–446.
11. Karpman V.I. // Phys. Scripta. – 1979. – V. 20. – No. 3–4. – P. 462–475.
12. Dodd R.J., Edwards M., Williams C.J., et al. // Phys. Rev. A. – 1996. – V. 54. – P. 661–664.
13. Baizakov B.B., Malomed B.A., and Salerno M. // Phys. Rev. E. – 2006. – V. 74. – P. 066615.
14. Toikka L.A., Hietarinta J., and Suominen K.-A. // J. Phys. A: Math. Theor. – 2012. – V. 45. – No. 48. – P. 485203. arXiv:1204.3009v2[cond-mat.quant-gas].
15. Bluman G. and Cole J. Similarity Methods for Differential Equations. Ser.: App. Math. Sci. V. 13. – New York; Heidelberg; Berlin: Springer Verlag, 1974. – 332 p.
16. Al-Johani A.S. // J. Appl. Math. Phys. – 2014. – V. 2. – P. 22–32.
17. Лебедев Н.Н. Специальные функции и их приложения. – М.; Л.: ГИФМЛ, 1963. – 358 с.
18. Hietarinta J. and Drumma V. // J. Nonlin. Math. Phys. – 2002. – V. 9. – Supp. 1. – P. 67–74.

*Национальный исследовательский Томский государственный университет,
г. Томск, Россия

Поступила в редакцию 28.04.14.

**Национальный исследовательский Томский политехнический университет,
г. Томск, Россия

E-mail: borisov@phys.tsu.ru; shpv@phys.tsu.ru