ИЗВЕСТИЯ ВЫСШИХ УЧЕБНЫХ ЗАВЕДЕНИЙ
Т. 57, № 11 ФИЗИКА 2014

* *
*

УДК 521.3

В.А. ШЕФЕР

ЧЕТЫРЕ МЕТОДА ОПРЕДЕЛЕНИЯ ПРОМЕЖУТОЧНЫХ ВОЗМУЩЕННЫХ ОРБИТ ПО ТРЕМ НАБЛЮДЕНИЯМ: СРАВНЕНИЕ[1]

Дается теоретическое и численное сравнение четырех методов нахождения орбиты малого небесного тела по трем измерениям его угловых координат в три момента времени. Методы предназначены для построения промежуточных орбит, учитывающих основную часть возмущений в движении исследуемого тела. Два метода основаны на использовании решений дифференциальных уравнений движения и их вторых производных в виде рядов по степеням интервалов времени (подход Гиббса и Херрика), а другие два – на использовании решений для некоторых промежуточных возмущенных движений в замкнутой форме, не прибегая к представлению этих решений в виде рядов (подход автора). Исследуется зависимость погрешностей методов от длины опорного интервала времени, определяемого крайними моментами наблюдений. В качестве примеров приводятся результаты вычисления орбиты астероида Апофис.

Ключевые слова: *определение первоначальной орбиты, промежуточная возмущенная орбита, сверхоскулирующая орбита, метод Гаусса, метод Херрика – Гиббса.*

Введение

Задача нахождения предварительной орбиты небесного тела по классическому астрономическому набору наблюдений, состоящему из трех пар угловых координат и соответствующих моментов времени, разделяется на две части. Первая часть задачи заключается, как правило, в определении либо векторов положения для моментов наблюдений, либо векторов положения и скорости для одного момента времени, удовлетворяющих указанному набору наблюдений и движению по закону Ньютона. Вторая часть задачи состоит в вычислении элементов, характеризующих искомую орбиту, по найденным на предыдущем этапе граничным или начальным условиям. Подавляющее большинство существующих и применяемых на практике методов решения этой задачи основано на построении невозмущенной кеплеровской орбиты. То есть традиционный подход опирается на законы движения классической задачи двух тел. Основные способы достижения этой цели, предложенные Эйлером, Ламбертом, Лагранжем, Лапласом, Ольберсом, Гауссом и Гиббсом, с небольшими изменениями используются до сих пор [1–5]. Гораздо больше усилий было предпринято и продолжает предприниматься для решения первой части рассматриваемой задачи. Здесь мы будем говорить только о двух из основных направлений приложения этих усилий. Первое направление, заложенное в работах Лагранжа и Гиббса, основано на использовании решений дифференциальных уравнений движения и их вторых производных в виде рядов по степеням интервалов времени. Второе направление связано с именем Гаусса. Оно заключается в использовании решений дифференциальных уравнений невозмущенного кеплеровского движения в замкнутой форме, не прибегая к представлению этих решений в виде рядов.

В большинстве случаев на практике предварительная орбита, построенная в рамках традиционного подхода, является хорошим начальным приближением для процесса ее последовательного улучшения по дальнейшим наблюдениям. Поэтому долгое время вопросу определения предварительной орбиты с учетом возмущений серьезное внимание не уделялось. С появлением современных высокоточных электронно-оптических и радиотехнических позиционных измерений задача предварительного нахождения возмущенной орбиты, точность которой соответствует точности опорных наблюдений, становится особенно актуальной.

Гиббсом [6] были получены формулы, связывающие координаты небесного тела в три последовательные момента времени со значениями вторых производных от координат по времени для тех же моментов, используя представление координат и их вторых производных в форме ряда

[1] Работа выполнена по заданию № 2014/223 (код проекта 1567) Министерства образования и науки Российской Федерации.

Тейлора по степеням интервала времени. Это позволяет не только использовать кеплеровские члены правых частей уравнений движения, но и ввести дополнительно возмущающие ускорения в полученные формулы. На формулах Гиббса основан метод, развитый Херриком [7]. Его часто называют методом Херрика – Гиббса. Основные формулы метода Херрика – Гиббса для определения предварительной орбиты опираются на разложения координат по степеням интервалов времени с точностью до членов четвертого порядка включительно.

Решение задачи нахождения предварительной орбиты методами гауссовского типа основано на использовании точных соотношений невозмущенного кеплеровского движения. Поэтому разработка метода решения задачи с учетом возмущений в рамках гауссовского направления сталкивается с принципиальными трудностями. В работе [8] предложен метод, который, на наш взгляд, успешно решает задачу учета основных возмущений при построении предварительных орбит по трем наблюдениям в рамках подхода Гаусса. Учет возмущений осуществляется с помощью построенной по двум векторам положения и соответствующему интервалу времени промежуточной орбиты [9]. Построение этой орбиты основано на идее ввода фиктивного притягивающего центра с переменной массой [10, 11]. Движение по промежуточной орбите относительно фиктивного центра описывается уравнениями задачи Гюльдена – Мещерского. Гравитационный параметр, определяющий промежуточное движение, изменяется в соответствии с первым законом Мещерского вариации массы. Предполагается, что фиктивный центр движется прямолинейно и равномерно. В следующей нашей работе [12] метод, изложенный в [8], находит дальнейшее развитие. Допускается возможность движения фиктивного центра по параболической траектории. Возмущающие эффекты учитываются благодаря использованию промежуточной орбиты, построенной по трем векторам положения и соответствующим им моментам времени [13].

В данной работе рассматривается вопрос о точности аппроксимации возмущенного движения двумя предложенными в [8, 12] промежуточными орбитами в сравнении с двумя промежуточными орбитами, получаемыми на основе подхода Гиббса и Херрика. Теоретические выводы подтверждаются численными примерами.

Постановка задачи

Рассмотрим движение тела пренебрежимо малой массы (малое тело: астероид, комета, крупный метеороид, космический аппарат) под действием ньютоновского притяжения системы точечных масс (Солнце, планеты, спутники планет). Для изучения движения малого тела построим трехосную прямоугольную невращающуюся систему координат с началом, совмещенным с одной из притягивающих масс (основное тело). Дифференциальные уравнения движения в этой системе координат запишем в форме

$$\ddot{\boldsymbol{x}} = -\frac{K}{r^3}\boldsymbol{x} + \boldsymbol{F} \equiv \boldsymbol{G}\,, \tag{1}$$

где $\boldsymbol{x}$ – вектор положения малого тела; $r = |\,\boldsymbol{x}\,|$; $K = k^2 M = \mathrm{const}$ (k^2 – гравитационная постоянная, M – масса основного тела); $\boldsymbol{F}$ – вектор возмущающего ускорения; точка означает дифференцирование по времени t. Пусть в начальный момент $t = t_0$ известны векторы положения и скорости малого тела

$$\boldsymbol{x}(t_0) = \boldsymbol{x}_0\,, \qquad \dot{\boldsymbol{x}}(t_0) = \dot{\boldsymbol{x}}_0\,. \tag{2}$$

Здесь и далее нижние индексы i, j (i, j = 0, 1, 2,…), если это не оговаривается отдельно, означают, что данная величина определена при $t = t_i$, t_j; например, $\boldsymbol{x}_i \equiv \boldsymbol{x}(t_i)$, $r_j \equiv r(t_j)$.

Движение, описываемое уравнениями (1) и условиями (2), назовем реальным.

Допустим, что в интервале времени, в котором изучается движение малого тела, правые части (1) обладают производными по t любого порядка.

Пусть мы имеем для каждого из трех моментов времени t_1^{o}, t_2^{o}, t_3^{o} ($t_1^{\mathrm{o}} < t_2^{\mathrm{o}} < t_3^{\mathrm{o}}$) пару наблюденных угловых координат (например, прямое восхождение α_i^{o} и склонение δ_i^{o}), определяющую видимое положение малого тела на небесной сфере с центром в точке наблюдения. Угловые координаты, наблюденные в момент t_i^{o}, представим в виде единичного вектора $\boldsymbol{L}_i$, компонентами которого являются направляющие косинусы луча зрения на малое тело. Будем предполагать, что наблюденные величины не содержат ошибок и $[(\boldsymbol{L}_1 \times \boldsymbol{L}_2)\cdot \boldsymbol{L}_3] \neq 0$. Здесь и ниже записи $(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})$ и $(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b})$ обозначают векторное и скалярное произведения векторов $\boldsymbol{a}$ и $\boldsymbol{b}$ соответственно.

Имеют место зависимости

$$\boldsymbol{x}_i = \rho_i \boldsymbol{L}_i - \boldsymbol{S}_i, \quad t_i = t_i^{\mathrm{o}} - \frac{1}{c}\rho_i; \quad i = 1,\ 2,\ 3, \tag{3}$$

где $\boldsymbol{x}_i$ – вектор положения малого тела, определенный в момент t_i; $\boldsymbol{S}_i$ – вектор положения основного тела относительно точки наблюдения, определенный в момент t_i^{o}; c – скорость света. Неизвестными в (3) являются вектор $\boldsymbol{x}_i$ и дальность ρ_i (расстояние от точки наблюдения до малого тела).

Будем считать, что введенные для реального движения величины, обозначенные символом $*$, сохраняют свой смысл, но относятся к промежуточному движению, аппроксимирующему реальное движение. Тогда применительно к промежуточному движению выражения (3) перепишутся соответственно в виде

$$\boldsymbol{x}_i^* = \rho_i^* \boldsymbol{L}_i - \boldsymbol{S}_i, \quad t_i^* = t_i^{\mathrm{o}} - \frac{1}{c}\rho_i^*; \quad i = 1,\ 2,\ 3. \tag{4}$$

Согласно (4), все величины, связанные с промежуточным движением, должны соотноситься с временем t^*. Ниже мы строго придерживаемся этого правила.

Лагранжем [14] было показано, что при небольших интервалах времени между наблюдениями имеют место простые приближенные выражения для координат вектора $\boldsymbol{x}_i^*$. Это позволяет получить хорошие первые приближения для дальностей ρ_i^*. Решение, найденное Лагранжем, приобрело удобную для практических вычислений форму в знаменитом трактате Гаусса [15]. Современное изложение методики получения этого решения можно найти, например, в [3–5].

Воспользуемся формулами классического подхода и получим ρ_1^*, ρ_2^* и ρ_3^* в первом приближении. Тогда уравнения (4) определят три вектора положения $\boldsymbol{x}_1^*$, $\boldsymbol{x}_2^*$, $\boldsymbol{x}_3^*$ в моменты времени t_1^*, t_2^*, t_3^* $(t_1^* < t_2^* < t_3^*)$ соответственно. Значения t_i^*, $\boldsymbol{x}_i^*$ на этом этапе являются приближенными и требуют дальнейшего уточнения.

Перейдем к изложению методов, позволяющих выполнить уточнение первого приближения с учетом основных возмущений в движении малого тела.

Методы построения промежуточных орбит – разложения в ряды

Введем обозначения

$$t_{12} = t_2 - t_1, \quad t_{23} = t_3 - t_2, \quad t_{13} = t_3 - t_1. \tag{5}$$

Тогда, используя тейлоровские разложения для реального движения в окрестности опорного момента t_2, можно получить следующие векторные соотношения:

$$\boldsymbol{x}_1 - \boldsymbol{x}_2 = -t_{12}\dot{\boldsymbol{x}}_2 + \frac{1}{2}t_{12}^2\boldsymbol{G}_2 - \frac{1}{6}t_{12}^3\dot{\boldsymbol{G}}_2 + \frac{1}{24}t_{12}^4\ddot{\boldsymbol{G}}_2 - \frac{1}{120}t_{12}^5\boldsymbol{G}_2^{(3)} + \cdots; \tag{6}$$

$$\boldsymbol{x}_3 - \boldsymbol{x}_2 = t_{23}\dot{\boldsymbol{x}}_2 + \frac{1}{2}t_{23}^2\boldsymbol{G}_2 + \frac{1}{6}t_{23}^3\dot{\boldsymbol{G}}_2 + \frac{1}{24}t_{23}^4\ddot{\boldsymbol{G}}_2 + \frac{1}{120}t_{23}^5\boldsymbol{G}_2^{(3)} + \cdots; \tag{7}$$

$$\boldsymbol{G}_1 - \boldsymbol{G}_2 = -t_{12}\dot{\boldsymbol{G}}_2 + \frac{1}{2}t_{12}^2\ddot{\boldsymbol{G}}_2 - \frac{1}{6}t_{12}^3\boldsymbol{G}_2^{(3)} + \frac{1}{24}t_{12}^4\boldsymbol{G}_2^{(4)} - \cdots; \tag{8}$$

$$\boldsymbol{G}_3 - \boldsymbol{G}_2 = t_{23}\dot{\boldsymbol{G}}_2 + \frac{1}{2}t_{23}^2\ddot{\boldsymbol{G}}_2 + \frac{1}{6}t_{23}^3\boldsymbol{G}_2^{(3)} + \frac{1}{24}t_{23}^4\boldsymbol{G}_2^{(4)} + \cdots, \tag{9}$$

где верхний индекс в скобках обозначает порядок производной по t.

Будем рассматривать интервалы (5) как малые величины первого порядка относительно максимальной из длин этих интервалов $\varepsilon \equiv t_{13}$.

Выполняя простые математические действия над разложениями (6)–(9) с учетом (1) и (3) и отбрасывая остаточные члены высших порядков, можно записать

$$C_1\rho_1^*\boldsymbol{L}_1-\rho_2^*\boldsymbol{L}_2+C_3\rho_3^*\boldsymbol{L}_3=C_1\boldsymbol{S}_1-\boldsymbol{S}_2+C_3\boldsymbol{S}_3+\boldsymbol{E}\,; \tag{10}$$

$$\dot{\boldsymbol{x}}_2^*=-D_1\boldsymbol{x}_1^*+D_2\boldsymbol{x}_2^*+D_3\boldsymbol{x}_3^*+\boldsymbol{P}\,, \tag{11}$$

где

$$C_1=\frac{t_{23}^*(1-B_1b_1)}{t_{13}^*(1-B_2b_2)},\quad C_3=\frac{t_{12}^*(1-B_3b_3)}{t_{13}^*(1-B_2b_2)},\quad b_i=\frac{K}{r_i^{*3}};\quad i=1,\,2,\,3\,; \tag{12}$$

$$B_1=\frac{1}{12}\left(t_{23}^{*2}-t_{12}^*t_{13}^*\right),\quad B_2=\frac{1}{12}\left(t_{13}^{*2}+t_{12}^*t_{23}^*\right),\quad B_3=\frac{1}{12}\left(t_{12}^{*2}-t_{23}^*t_{13}^*\right); \tag{13}$$

$$\boldsymbol{E}=\frac{1}{1-B_2b_2}\left(-\frac{t_{23}^*}{t_{13}^*}B_1\boldsymbol{F}_1^*+B_2\boldsymbol{F}_2^*-\frac{t_{12}^*}{t_{13}^*}B_3\boldsymbol{F}_3^*\right); \tag{14}$$

$$D_1=t_{23}^*\left(\frac{1}{t_{12}^*t_{13}^*}+\frac{b_1}{12}\right),\quad D_2=(t_{23}^*-t_{12}^*)\left(\frac{1}{t_{12}^*t_{23}^*}+\frac{b_2}{12}\right),\quad D_3=t_{12}^*\left(\frac{1}{t_{23}^*t_{13}^*}+\frac{b_3}{12}\right); \tag{15}$$

$$\boldsymbol{P}=\frac{1}{12}\left[t_{23}^*\boldsymbol{F}_1^*-(t_{23}^*-t_{12}^*)\boldsymbol{F}_2^*-t_{12}^*\boldsymbol{F}_3^*\right]; \tag{16}$$

$$t_{12}^*=t_2^*-t_1^*,\quad t_{23}^*=t_3^*-t_2^*,\quad t_{13}^*=t_3^*-t_1^*. \tag{17}$$

Выражения (10) – (17) соответствуют некоторой промежуточной орбите. Для краткости будем говорить о ней как об орбите *P4*.

Моменты t_1^*, t_2^*, t_3^* и векторы $\boldsymbol{x}_1^*$, $\boldsymbol{x}_2^*$, $\boldsymbol{x}_3^*$ определяются по формулам (4); $r_i^*=|\boldsymbol{x}_i^*|$. Векторы возмущающего ускорения $\boldsymbol{F}_1^*$, $\boldsymbol{F}_2^*$ и $\boldsymbol{F}_3^*$ вычисляются по тем же формулам, по которым определяются векторы $\boldsymbol{F}_1$, $\boldsymbol{F}_2$ и $\boldsymbol{F}_3$, если подставить в эти формулы вместо t_i и $\boldsymbol{x}_i$ значения t_i^* и $\boldsymbol{x}_i^*$ соответственно. Очевидно, что интервалы (5) и (17) являются величинами одного и того же порядка малости.

Коэффициенты C_1 и C_3 есть приближенные значения отношений площадей треугольников, построенных на векторах $\boldsymbol{x}_1^*$, $\boldsymbol{x}_2^*$ и $\boldsymbol{x}_3^*$. То есть $C_1\approx S_{23}/S_{13}$, $C_3\approx S_{12}/S_{13}$, где S_{ij} – площадь треугольника, образованного радиусами-векторами $\boldsymbol{x}_i^*$ и $\boldsymbol{x}_j^*$.

Рассматривая (10) как систему линейных уравнений относительно неизвестных дальностей $\rho_i^*\equiv\rho^*(t_i^*)$ и полагая, что $C_1C_3\neq 0$, получим

$$\rho_1^*=-\frac{1-C_1-C_3}{C_1}(\boldsymbol{U}_1\cdot\boldsymbol{S}_1)-\frac{1}{C_1}[\boldsymbol{U}_1\cdot(\boldsymbol{S}_2-\boldsymbol{S}_1)]+\frac{C_3}{C_1}[\boldsymbol{U}_1\cdot(\boldsymbol{S}_3-\boldsymbol{S}_1)]-\frac{1}{C_1}(\boldsymbol{U}_1\cdot\boldsymbol{E}); \tag{18}$$

$$\rho_2^*=(1-C_1-C_3)(\boldsymbol{U}_2\cdot\boldsymbol{S}_2)+C_1[\boldsymbol{U}_2\cdot(\boldsymbol{S}_2-\boldsymbol{S}_1)]-C_3[\boldsymbol{U}_2\cdot(\boldsymbol{S}_3-\boldsymbol{S}_2)]+(\boldsymbol{U}_2\cdot\boldsymbol{E}); \tag{19}$$

$$\rho_3^*=-\frac{1-C_1-C_3}{C_3}(\boldsymbol{U}_3\cdot\boldsymbol{S}_3)-\frac{C_1}{C_3}[\boldsymbol{U}_3\cdot(\boldsymbol{S}_3-\boldsymbol{S}_1)]+\frac{1}{C_3}[\boldsymbol{U}_3\cdot(\boldsymbol{S}_3-\boldsymbol{S}_2)]-\frac{1}{C_3}(\boldsymbol{U}_3\cdot\boldsymbol{E}), \tag{20}$$

где

$$\boldsymbol{U}_1=\frac{(\boldsymbol{L}_2\times\boldsymbol{L}_3)}{D},\quad \boldsymbol{U}_2=\frac{(\boldsymbol{L}_3\times\boldsymbol{L}_1)}{D},\quad \boldsymbol{U}_3=\frac{(\boldsymbol{L}_1\times\boldsymbol{L}_2)}{D},\quad D=[(\boldsymbol{L}_1\times\boldsymbol{L}_2)\cdot\boldsymbol{L}_3]\neq 0.$$

Векторы $(\boldsymbol{S}_2-\boldsymbol{S}_1)$, $(\boldsymbol{S}_3-\boldsymbol{S}_2)$, $(\boldsymbol{S}_3-\boldsymbol{S}_1)$ имеют первый порядок малости, а векторы $\boldsymbol{U}_1$, $\boldsymbol{U}_2$, $\boldsymbol{U}_3$ есть величины (–2)-го порядка. Можно показать, что коэффициенты C_1 и C_3 получаются с ошибками 4-го порядка в общем случае, когда $t_{12}\neq t_{23}$, и с ошибками 5-го порядка, когда $t_{12}=t_{23}$, а величины $(1-C_1-C_3)$ и $\boldsymbol{E}$ находятся с ошибками 5-го порядка при $t_{12}\neq t_{23}$ и с ошибками 6-го порядка при $t_{12}=t_{23}$. Для этого достаточно сравнить их разложения в ряды по степеням t_{12}^*, t_{23}^* с разложениями точных значений отношений площадей треугольников [3, 4] и разложением, из которого получены уравнения (10). Тогда из формул (18) – (20) следует, что в общем случае дальности ρ_i^* определятся с ошибками 3-го порядка, а в частном случае равноотстоящих моментов времени – с ошибками 4-го порядка. Таким образом, расхождение дальностей для движения по промежуточной орбите *P4* и реального движения в любой из опорных моментов времени t_i удовлетворяет пропорциональным зависимостям

$$\left|\rho_i^* - \rho_i\right| \sim (t_3 - t_1)^3 \quad \text{при} \quad t_{12} \neq t_{23}; \qquad \left|\rho_i^* - \rho_i\right| \sim (t_3 - t_1)^4 \quad \text{при} \quad t_{12} = t_{23}; \quad i = 1,\ 2,\ 3. \tag{21}$$

Дальности $\rho_i \equiv \rho(t_i)$ для реального движения удовлетворяют формулам (3). Из сравнения (3) и (4) с учетом (21) получим

$$\left|t_i^* - t_i\right| \sim (t_3 - t_1)^3, \qquad \left|\boldsymbol{x}_i^* - \boldsymbol{x}_i\right| \sim (t_3 - t_1)^3, \quad \text{если } t_{12} \neq t_{23}; \tag{22}$$

$$\left|t_i^* - t_i\right| \sim (t_3 - t_1)^4, \qquad \left|\boldsymbol{x}_i^* - \boldsymbol{x}_i\right| \sim (t_3 - t_1)^4, \quad \text{если } t_{12} = t_{23}; \quad i = 1,\ 2,\ 3. \tag{23}$$

Осталось проанализировать формулу (11), определяющую значение вектора скорости на промежуточной орбите в момент t_2^*. Используя (22), (23) и разложения в ряды, можно убедиться в том, что

$$\left|\dot{\boldsymbol{x}}_2^* - \dot{\boldsymbol{x}}_2\right| \sim (t_3 - t_1)^3 \quad \text{при} \quad t_{12} \neq t_{23}; \qquad \left|\dot{\boldsymbol{x}}_2^* - \dot{\boldsymbol{x}}_2\right| \sim (t_3 - t_1)^4 \quad \text{при} \quad t_{12} = t_{23}. \tag{24}$$

Назовем метод построения орбиты *P4* обобщенным методом Херрика – Гиббса. Этот метод представляет собой развитие метода, изложенного в работе [7], для случая сил более общего вида.

Используя подход, аналогичный вышеизложенному, введем наряду с орбитой *P4* более простую орбиту *P3*. Формулы, соответствующие последней, можно также представить в виде (10) и (11), полагая в них

$$C_1 = \frac{t_{23}^*}{t_{13}^*}\left(1 + T_1 b_1\right), \qquad C_3 = \frac{t_{12}^*}{t_{13}^*}\left(1 + T_3 b_3\right), \qquad b_j = \frac{K}{r_j^{*3}}; \quad j = 1,\ 3; \tag{25}$$

$$T_1 = \frac{1}{6}\left(t_{13}^{*2} - t_{23}^{*2}\right), \qquad T_3 = \frac{1}{6}\left(t_{13}^{*2} - t_{12}^{*2}\right), \qquad \boldsymbol{E} = \frac{t_{23}^*}{t_{13}^*} T_1 \boldsymbol{F}_1^* + \frac{t_{12}^*}{t_{13}^*} T_3 \boldsymbol{F}_3^*; \tag{26}$$

$$D_1 = \frac{t_{23}^*}{t_{13}^*}\left(\frac{1}{t_{12}^*} + \frac{t_{12}^*}{6} b_1\right), \qquad D_2 = \frac{t_{23}^* - t_{12}^*}{t_{12}^* t_{23}^*}, \qquad D_3 = \frac{t_{12}^*}{t_{13}^*}\left(\frac{1}{t_{23}^*} + \frac{t_{23}^*}{6} b_3\right), \qquad \boldsymbol{P} = \frac{t_{12}^* t_{23}^*}{6 t_{13}^*}\left(\boldsymbol{F}_1^* - \boldsymbol{F}_3^*\right). \tag{27}$$

Здесь во всех случаях C_1 и C_3 получаются с ошибками 3-го порядка относительно ε, а $(1 - C_1 - C_3)$ и $\boldsymbol{E}$ – с ошибками 4-го порядка. Отсюда следует, что для орбиты *P3* справедливы зависимости

$$\left|t_i^* - t_i\right| \sim (t_3 - t_1)^2, \qquad \left|\boldsymbol{x}_i^* - \boldsymbol{x}_i\right| \sim (t_3 - t_1)^2, \qquad \left|\dot{\boldsymbol{x}}_2^* - \dot{\boldsymbol{x}}_2\right| \sim (t_3 - t_1)^2; \quad i = 1,\ 2,\ 3. \tag{28}$$

Формулы (18) – (20) позволяют уточнить ρ_i^*. Затем с помощью соотношений (4) улучшаются t_i^* и $\boldsymbol{x}_i^*$. По трем окончательно уточненным векторам положения $\boldsymbol{x}_1^*$, $\boldsymbol{x}_2^*$, $\boldsymbol{x}_3^*$ и моментам t_1^*, t_2^*, t_3^* найдем вектор скорости на промежуточной орбите $\dot{\boldsymbol{x}}_2^*$ согласно формуле (11). Полученные таким образом векторы $\boldsymbol{x}_2^*$ и $\dot{\boldsymbol{x}}_2^*$ определят искомые параметры движения малого тела в момент t_2^*.

Методы построения промежуточных орбит – замкнутые формулы

В работе [8] предложен метод построения промежуточной возмущенной орбиты, фундаментальные уравнения которого (см. векторное соотношение (11) из [8]) с учетом (1), а также (4) и (8) из [8] и указанного выше смысла символа $*$ перепишем следующим образом:

$$\widehat{C}_1 \rho_1^* \boldsymbol{L}_1 - \rho_2^* \boldsymbol{L}_2 + \widehat{C}_3 \rho_3^* \boldsymbol{L}_3 = \widehat{C}_1 \boldsymbol{S}_1 - \boldsymbol{S}_2 + \widehat{C}_3 \boldsymbol{S}_3 + \widehat{\boldsymbol{E}}, \tag{29}$$

где

$$\widehat{C}_1 = \frac{t_{23}^*}{t_{13}^*}\left(1 + \widehat{T}_1 b_1\right), \qquad \widehat{C}_3 = \frac{t_{12}^*}{t_{13}^*}\left(1 + \widehat{T}_3 b_3\right), \qquad b_j = \frac{K}{r_j^{*3}}; \quad j = 1,\ 3; \tag{30}$$

$$\widehat{T}_1=\lambda_1\left(d_1\frac{\mu_1}{\mu_2}\frac{t_{13}^*}{t_{23}^*}-1\right),\quad \widehat{T}_3=\lambda_3\left(d_3\frac{\mu_3}{\mu_2}\frac{t_{13}^*}{t_{12}^*}-1\right),\quad \widehat{\boldsymbol{E}}=\frac{t_{23}^*}{t_{13}^*}\widehat{T}_1\boldsymbol{F}_1^*+\frac{t_{12}^*}{t_{13}^*}\widehat{T}_3\boldsymbol{F}_3^*. \tag{31}$$

Здесь смысл введенных в [8] обозначений μ_i, λ_j и d_j сохраняется.

Отличие формул (10), (25), (26) от формул (29) – (31) заключается только в выражениях для T_j и $\widehat{T}_j$. Используя известные разложения отношений площадей треугольников [3, 4] применительно к d_1 и d_3, легко показать, что T_j и $\widehat{T}_j$ являются величинами одинакового порядка малости.

Таким образом, из сравнения соотношений (10), (25), (26) и (29) – (31) можно сделать вывод о том, что в общем случае возмущенного движения формулы (10) и (29) с учетом (25), (26) и (30), (31) есть формулы одного и того же порядка относительно ε. Следовательно, для промежуточной орбиты, определяемой согласно описанной в [8] итерационной процедуры, справедливы пропорциональные зависимости (28).

В работе [12] изложен метод построения промежуточной возмущенной орбиты, фундаментальные уравнения которого (см. (11) из [12]) с учетом (1) и (4) из [12] можно также представить в виде равенства (29), полагая в нем

$$\widehat{C}_1=d_1\frac{\mu_1\lambda_1 b_1}{\mu_2\lambda_2 b_2},\quad \widehat{C}_3=d_3\frac{\mu_3\lambda_3 b_3}{\mu_2\lambda_2 b_2},\quad b_i=\frac{K}{r_i^{*3}};\quad i=1,\ 2,\ 3; \tag{32}$$

$$\widehat{\boldsymbol{E}}=\frac{\widehat{C}_1}{b_1}\left(\boldsymbol{F}_1^*-\ddot{\boldsymbol{Z}}\right)-\frac{1}{b_2}\left(\boldsymbol{F}_2^*-\ddot{\boldsymbol{Z}}\right)+\frac{\widehat{C}_3}{b_3}\left(\boldsymbol{F}_3^*-\ddot{\boldsymbol{Z}}\right). \tag{33}$$

Смысл введенных в [12] обозначений μ_i, λ_i, d_j и $\ddot{\boldsymbol{Z}}$ остается прежним.

Внимательное сравнение выражений (10), (12) – (14) с выражениями (29), (32), (33) с учетом представления d_1 и d_3 в виде рядов по степеням t_{12}^*, t_{23}^* позволяет заключить, что в общем случае возмущенного движения формулы (10) и (29) с учетом (12) – (14) и (32), (33) имеют одинаковый порядок относительно ε. Отсюда следует, что для промежуточной орбиты, определяемой согласно изложенной в [12] процедуры, имеют место пропорциональные зависимости (22) – (24).

Однако, в отличие от (10), уравнения (29) построены по аналогии с фундаментальными уравнениями метода Гаусса, в котором отношения площадей треугольников, заключенных между опорными векторами положения, вычисляются точно. Речь идет о величинах d_1 и d_3, которые находятся с помощью гауссовских отношений площадей секторов конического сечения и треугольников, построенных для пар векторов в параметрическом пространстве (см. формулы (10) из [8, 12]).

Будем ссылаться на орбиту, которая определяется уравнениями (29) – (31), как на орбиту *S3*, а на орбиту, задаваемую уравнениями (29), (32), (33), как на орбиту *S4*.

По окончательно уточненным с помощью (29) и (4) векторам положения $\boldsymbol{x}_1^*$, $\boldsymbol{x}_2^*$, $\boldsymbol{x}_3^*$ и моментам t_1^*, t_2^*, t_3^* находятся векторы скорости $\dot{\boldsymbol{x}}_1^*$, $\dot{\boldsymbol{x}}_2^*$, $\dot{\boldsymbol{x}}_3^*$ методами, изложенными в [9, 13]. Очевидно, что эти методы позволяют определить скорости $\dot{\boldsymbol{x}}_i^*$ во *все* опорные моменты времени, а не только для t_2^*, с точностью того же порядка, с которой определены положения $\boldsymbol{x}_i^*$. Также во все опорные моменты времени будут иметь место зависимости

$$\left|\ddot{\boldsymbol{x}}_i^*-\boldsymbol{G}_i\right|\sim(t_3-t_1)^m;\ i=1,\ 2,\ 3. \tag{34}$$

Здесь, в случае орбиты *S3*, $m = 2$. Для орбиты *S4*: $m = 3$ при $t_{12}\neq t_{23}$, $m = 4$ при $t_{12}=t_{23}$.

Опираясь на законы (28), (22)–(24), (34) и на результаты работ [9, 13], можно сделать следующие выводы: 1) предельные значения параметров орбит *P3* и *S3* при стремящемся к нулю опорном временном интервале (t_3-t_1) задают сверхоскулирующие орбиты с касанием *третьего* порядка к реальной траектории; 2) предельные значения параметров орбит *P4* и *S4* при $(t_3-t_1)\to 0$ определяют сверхоскулирующие орбиты с касанием *четвертого* порядка к реальной траектории.

З а м е ч а н и е . По формулам, задающим орбиты *P3* и *P4*, невозмущенная кеплеровская орбита будет определяться с той же точностью, что и возмущенная. Что же касается орбит *S3* и *S4*, то согласно их построению отклонения величин μ_i, λ_i, d_j и $\ddot{\boldsymbol{Z}}$ от величин K, r_i^3/K, $\widehat{C}_j$ и $\boldsymbol{0}$ соответственно могут быть вызваны только влиянием возмущающих сил. При отсутствии возмущений, т.е. при $\boldsymbol{F}_1 = \boldsymbol{F}_2 = \boldsymbol{F}_3 = \boldsymbol{0}$, реальная орбита (в данном случае это кеплеровская орбита) методами, изложенными в [8, 12], определяется точно. Следовательно, отклонения параметров промежуточных орбит *S3* и *S4* от параметров реальной орбиты в общем случае пропорциональны не только степени опорного интервала времени $(t_3 - t_1)$, но и малому возмущающему параметру. Поэтому следует ожидать, что абсолютные значения ошибок определения орбиты при использовании *S3* и *S4* в общем случае окажутся меньше, чем при использовании *P3* и *P4* соответственно. Ниже мы найдем этому подтверждение.

Численные примеры

Для численной проверки сформулированных теоретических результатов были разработаны программы, реализующие методы построения промежуточных орбит *P3*, *P4*, *S3* и *S4* при машинных расчетах. Цифры в приведенных обозначениях орбит указывают порядок касания соответствующей предельной орбиты, получаемой при $(t_3 - t_1) \to 0$.

В качестве объекта, на примере определения орбиты которого сравнивались программы, был выбран астероид Апофис (99942 Apophis). Движение астероида рассматривалось в гелиоцентрической системе координат, отнесенной к экватору и равноденствию стандартной эпохи J2000.0. Вычисления выполнялись с машинной точностью $2.22 \cdot 10^{-16}$.

Была поставлена задача оценить погрешности методов в зависимости от длины опорного интервала времени $(t_3 - t_1)$. Для решения этой задачи использовалась номинальная траектория Апофиса, полученная численным интегрированием дифференциальных уравнений движения астероида. Интегрирование выполнялось методом Эверхарта 15-го порядка. Начальная система оскулирующих элементов орбиты астероида взята из каталога Боуэлла (E.Bowell, ftp: //ftp.lowell.edu/pub/elgb/astorb/dat) на дату 2011 февраль 08.0 TDT. При построении номинальной траектории учитывались возмущения от восьми больших планет, Плутона и Луны на основе эфемерид DE405/LE405. Ошибки численного интегрирования не превышают: в векторе положения – 10^{-12} а.е., в векторе скорости – 10^{-14} а.е./сут. Положения и скорости на номинальной траектории принимаются точными.

На номинальной траектории мы выбрали две совокупности гелиоцентрических положений $\boldsymbol{x}_1$, $\boldsymbol{x}_2$, $\boldsymbol{x}_3$ в эпохи t_1, t_2, t_3 $(t_1 < t_2 < t_3)$. Средней эпохой для обеих совокупностей является момент t_2 = 2004 декабрь 20.0 TDT (JD 2453359.5). Эта эпоха выбрана в непосредственной близости к моменту наиболее тесного прохождения Апофиса относительно Земли в пределах интервала его наблюдений, имеющегося на дату данной публикации. Момент сближения и соответствующее минимальное геоцентрическое расстояние следующие: t = 2004 декабрь 21.39 TDT, $\rho_{\min}$ = 0.09639 а.е. Значения гелиоцентрического и геоцентрического расстояний для астероида на эпоху t_2 таковы: r_2 = 0.95984 а.е., ρ_2 = 0.09659 а.е. Первая совокупность положений соответствует эпохам t_1 и t_3, равноотстоящим от эпохи t_2. Для второй совокупности эпохи t_1 и t_3 выбраны таким образом, что момент t_2 делит интервал $(t_3 - t_1)$ на две неравные части в отношении $t_{12} : t_{23} = 2:1$.

Мы вычислили геоцентрические угловые координаты α_i^{o}, δ_i^{o} и моменты времени t_i^{o}, соответствующие гелиоцентрическим положениям $\boldsymbol{x}_i$ на номинальной траектории в выбранные моменты времени t_i (i = 1, 2, 3). Полученные величины использовались в качестве исходных данных для работы программ.

Результаты вычислений приводятся в табл. 1–4, где приняты следующие обозначения: $\Delta t_i = t_i^* - t_i$, $\Delta r_i = \left|\boldsymbol{x}_i^* - \boldsymbol{x}_i\right|$, $\Delta v_i = \left|\dot{\boldsymbol{x}}_i^* - \dot{\boldsymbol{x}}_i\right|$ – ошибки в моменте времени, векторах положения и скорости, соответствующие эпохе t_i; N_t, N_r, N_v – отношения значений ошибок в моменте времени, векторах положения и скорости, приведенных в данной строке таблицы, к значениям этих же ошибок, приведенных в предыдущей строке таблицы. Здесь $\boldsymbol{x}_i$, $\dot{\boldsymbol{x}}_i$ – векторы положения и скорости на номинальной траектории в момент t_i. Векторы $\boldsymbol{x}_i^*$ и $\dot{\boldsymbol{x}}_i^*$ на построенной орбите вычислены на момент t_i^*. При $|\Delta t_i| < 2.22 \cdot 10^{-10}$ сут мы получили нулевые значения для Δt_i, поскольку в арифметике, которую мы использовали, полная юлианская дата определялась числом с 9-значной мантиссой. Длина опорного интервала $(t_3 - t_1)$ уменьшалась до тех пор, пока ограничение на порядки чисел в компьютере не приводило к заметному ухудшению точности вычислений. Прочерк в таблицах означает, что отношение значений ошибок методов в данном случае не могло быть вычислено корректно из-за того, что ошибки округления оказались сопоставимыми по величине с методическими погрешностями.

Таблица 1

Погрешности методов определения орбит *P3* и *S3* (равноотстоящие моменты времени)

$t_3 - t_1$, сут	*P3*						*S3*					
	Δt_2, сут	N_t	Δr_2, а.е.	N_r	Δv_2, а.е./сут	N_v	Δt_1, сут	N_t	Δr_1, а.е.	N_r	Δv_1, а.е./сут	N_v
0.0625	$-1.3 \cdot 10^{-8}$		$2.3 \cdot 10^{-6}$		$1.2 \cdot 10^{-7}$		$+2.3 \cdot 10^{-9}$		$4.3 \cdot 10^{-7}$		$2.1 \cdot 10^{-8}$	
0.125	$-6.4 \cdot 10^{-8}$	4.8	$1.1 \cdot 10^{-5}$	4.7	$5.5 \cdot 10^{-7}$	4.7	$-4.7 \cdot 10^{-10}$	-	$4.2 \cdot 10^{-8}$	-	$2.1 \cdot 10^{-9}$	-
0.25	$-2.6 \cdot 10^{-7}$	4.0	$4.4 \cdot 10^{-5}$	4.0	$2.2 \cdot 10^{-6}$	4.0	0.0	-	$3.8 \cdot 10^{-8}$	-	$1.9 \cdot 10^{-9}$	-
0.5	$-1.0 \cdot 10^{-6}$	4.0	$1.8 \cdot 10^{-4}$	4.0	$8.8 \cdot 10^{-6}$	4.0	$-1.4 \cdot 10^{-9}$	-	$2.6 \cdot 10^{-7}$	7.0	$1.3 \cdot 10^{-8}$	7.0
1	$-4.1 \cdot 10^{-6}$	4.0	$7.2 \cdot 10^{-4}$	4.0	$3.5 \cdot 10^{-5}$	4.0	$-6.0 \cdot 10^{-9}$	4.3	$1.1 \cdot 10^{-6}$	4.1	$5.3 \cdot 10^{-8}$	4.0
2	$-1.7 \cdot 10^{-5}$	4.1	$2.9 \cdot 10^{-3}$	4.1	$1.5 \cdot 10^{-4}$	4.1	$-2.5 \cdot 10^{-8}$	4.1	$4.3 \cdot 10^{-6}$	4.0	$2.1 \cdot 10^{-7}$	4.0
4	$-7.7 \cdot 10^{-5}$	4.5	$1.3 \cdot 10^{-2}$	4.5	$6.6 \cdot 10^{-4}$	4.5	$-1.0 \cdot 10^{-7}$	4.0	$1.7 \cdot 10^{-5}$	4.0	$8.6 \cdot 10^{-7}$	4.0
8	$-5.9 \cdot 10^{-4}$	7.7	$1.0 \cdot 10^{-1}$	7.7	$5.0 \cdot 10^{-3}$	7.6	$-4.1 \cdot 10^{-7}$	4.1	$7.2 \cdot 10^{-5}$	4.1	$3.5 \cdot 10^{-6}$	4.1
16	Метод не сходится						$-1.9 \cdot 10^{-6}$	4.7	$3.4 \cdot 10^{-4}$	4.7	$1.6 \cdot 10^{-5}$	4.5

Таблица 2

Погрешности методов определения орбит *P3* и *S3* (неравноотстоящие моменты времени)

$t_3 - t_1$, сут	*P3*						*S3*					
	Δt_2, сут	N_t	Δr_2, а.е.	N_r	Δv_2, а.е./сут	N_v	Δt_1, сут	N_t	Δr_1, а.е.	N_r	Δv_1, а.е./сут	N_v
0.09375	$-3.4 \cdot 10^{-8}$		$5.9 \cdot 10^{-6}$		$2.9 \cdot 10^{-7}$		$+9.3 \cdot 10^{-10}$		$1.8 \cdot 10^{-7}$		$9.1 \cdot 10^{-9}$	
0.1875	$-1.4 \cdot 10^{-7}$	4.1	$2.4 \cdot 10^{-5}$	4.1	$1.2 \cdot 10^{-6}$	4.1	0.0	-	$2.6 \cdot 10^{-8}$	-	$1.3 \cdot 10^{-9}$	-
0.375	$-5.6 \cdot 10^{-7}$	4.0	$9.8 \cdot 10^{-5}$	4.0	$4.8 \cdot 10^{-6}$	4.0	$-9.3 \cdot 10^{-10}$	-	$1.4 \cdot 10^{-7}$	5.4	$6.8 \cdot 10^{-9}$	5.3
0.75	$-2.3 \cdot 10^{-6}$	4.0	$3.9 \cdot 10^{-4}$	4.0	$1.9 \cdot 10^{-5}$	4.0	$-3.3 \cdot 10^{-9}$	3.5	$5.8 \cdot 10^{-7}$	4.2	$2.9 \cdot 10^{-8}$	4.3
1.5	$-9.1 \cdot 10^{-6}$	4.0	$1.6 \cdot 10^{-3}$	4.0	$7.8 \cdot 10^{-5}$	4.0	$-1.3 \cdot 10^{-8}$	4.1	$2.3 \cdot 10^{-6}$	4.0	$1.1 \cdot 10^{-7}$	4.0
3	$-3.9 \cdot 10^{-5}$	4.2	$6.7 \cdot 10^{-3}$	4.2	$3.3 \cdot 10^{-4}$	4.2	$-5.3 \cdot 10^{-8}$	3.9	$9.1 \cdot 10^{-6}$	3.9	$4.5 \cdot 10^{-7}$	4.0
6	$-2.1 \cdot 10^{-4}$	5.3	$3.6 \cdot 10^{-2}$	5.3	$1.8 \cdot 10^{-3}$	5.3	$-2.1 \cdot 10^{-7}$	4.0	$3.6 \cdot 10^{-5}$	4.0	$1.8 \cdot 10^{-6}$	3.9
12	Метод не сходится						$-8.9 \cdot 10^{-7}$	4.3	$1.5 \cdot 10^{-4}$	4.3	$7.3 \cdot 10^{-6}$	4.1

Таблица 3

Погрешности методов определения орбит *P4* и *S4* (равноотстоящие моменты времени)

$t_3 - t_1$, сут	*P4*						*S4*					
	Δt_2, сут	N_t	Δr_2, а.е.	N_r	Δv_2, а.е./сут	N_v	Δt_2, сут	N_t	Δr_2, а.е.	N_r	Δv_2, а.е./сут	N_v
0.125	0.0		$2.4{\cdot}10^{-8}$		$1.2{\cdot}10^{-9}$		0.0		$2.4{\cdot}10^{-8}$		$1.2{\cdot}10^{-9}$	
0.25	0.0	-	$2.8{\cdot}10^{-8}$	-	$1.4{\cdot}10^{-9}$	-	0.0	-	$2.8{\cdot}10^{-8}$	-	$1.4{\cdot}10^{-9}$	-
0.5	0.0	-	$3.5{\cdot}10^{-9}$	-	$1.7{\cdot}10^{-10}$	-	0.0	-	$3.4{\cdot}10^{-9}$	-	$1.7{\cdot}10^{-10}$	-
1	0.0	-	$2.4{\cdot}10^{-9}$	-	$1.2{\cdot}10^{-10}$	-	0.0	-	$1.5{\cdot}10^{-9}$	-	$7.5{\cdot}10^{-11}$	-
2	0.0	-	$1.6{\cdot}10^{-8}$	6.4	$7.1{\cdot}10^{-10}$	6.0	0.0	-	$1.1{\cdot}10^{-9}$	-	$5.3{\cdot}10^{-11}$	-
4	$1.4{\cdot}10^{-9}$	-	$2.5{\cdot}10^{-7}$	16.2	$1.1{\cdot}10^{-8}$	16.1	0.0	-	$1.5{\cdot}10^{-8}$	14.3	$7.6{\cdot}10^{-10}$	14.3
8	$2.5{\cdot}10^{-8}$	17.6	$4.3{\cdot}10^{-6}$	16.9	$1.9{\cdot}10^{-7}$	17.0	$1.4{\cdot}10^{-9}$	-	$2.5{\cdot}10^{-7}$	16.4	$1.2{\cdot}10^{-8}$	16.3
16	$5.1{\cdot}10^{-7}$	20.6	$8.8{\cdot}10^{-5}$	20.7	$4.1{\cdot}10^{-6}$	21.0	$2.6{\cdot}10^{-8}$	18.6	$4.5{\cdot}10^{-6}$	18.2	$2.3{\cdot}10^{-7}$	18.2
32	$4.4{\cdot}10^{-5}$	87.4	$7.7{\cdot}10^{-3}$	87.4	$3.7{\cdot}10^{-4}$	91.7	$1.5{\cdot}10^{-6}$	56.3	$2.5{\cdot}10^{-4}$	56.3	$1.3{\cdot}10^{-5}$	55.5

Таблица 4

Погрешности методов определения орбит *P4* и *S4* (неравноотстоящие моменты времени)

$t_3 - t_1$, сут	*P4*						*S4*					
	Δt_2, сут	N_t	Δr_2, а.е.	N_r	Δv_2, а.е./сут	N_v	Δt_2, сут	N_t	Δr_2, а.е.	N_r	Δv_2, а.е./сут	N_v
0.1875	0.0		$1.0{\cdot}10^{-8}$		$5.0{\cdot}10^{-10}$		0.0		$1.0{\cdot}10^{-8}$		$5.0{\cdot}10^{-10}$	
0.375	0.0	-	$1.1{\cdot}10^{-8}$	-	$5.3{\cdot}10^{-10}$	-	0.0	-	$9.8{\cdot}10^{-9}$	-	$4.8{\cdot}10^{-10}$	-
0.75	$-9.3{\cdot}10^{-10}$	-	$1.6{\cdot}10^{-7}$	15.0	$7.9{\cdot}10^{-9}$	15.0	0.0	-	$3.2{\cdot}10^{-9}$	-	$1.6{\cdot}10^{-10}$	-
1.5	$-7.4{\cdot}10^{-9}$	8.0	$1.3{\cdot}10^{-6}$	7.9	$6.3{\cdot}10^{-8}$	8.0	0.0	-	$2.0{\cdot}10^{-8}$	6.3	$9.8{\cdot}10^{-10}$	6.3
3	$-5.8{\cdot}10^{-8}$	7.8	$1.0{\cdot}10^{-5}$	8.0	$5.0{\cdot}10^{-7}$	7.9	$9.3{\cdot}10^{-10}$	-	$1.6{\cdot}10^{-7}$	8.1	$8.0{\cdot}10^{-9}$	8.1
6	$-4.6{\cdot}10^{-7}$	7.9	$8.0{\cdot}10^{-5}$	7.9	$4.0{\cdot}10^{-6}$	8.0	$8.4{\cdot}10^{-9}$	9.0	$1.4{\cdot}10^{-6}$	8.8	$7.0{\cdot}10^{-8}$	8.8
12	$-4.1{\cdot}10^{-6}$	8.9	$7.1{\cdot}10^{-4}$	8.9	$3.5{\cdot}10^{-5}$	8.9	$8.2{\cdot}10^{-8}$	9.8	$1.4{\cdot}10^{-5}$	10.0	$7.0{\cdot}10^{-7}$	10.0
24	$-2.0{\cdot}10^{-4}$	49.6	$3.5{\cdot}10^{-2}$	50.0	$1.7{\cdot}10^{-3}$	49.4	$1.5{\cdot}10^{-6}$	18.8	$2.7{\cdot}10^{-4}$	18.7	$1.\ 3{\cdot}10^{-5}$	18.7

Табличные данные показывают, что сокращение опорного интервала ($t_3 - t_1$) (при малых его размерах) в 2 раза приводит к уменьшению погрешностей сравниваемых методов приблизительно в 2^2, 2^3 и 2^4 раз, что полностью согласуется с полученными в предыдущих разделах теоретическими результатами.

Несмотря на то, что скорость сходимости метода построения орбиты *P3* к точному решению такая же, как и в методе построения орбиты *S3*, первый значительно уступает в точности второму (приблизительно на 3 порядка) для всех рассмотренных интервалов времени. А при $(t_3 - t_1) \gtrsim 8$ сут методические ошибки построения *P3* сравнимы по величине с оцениваемыми параметрами и метод становится неприменимым.

Для самых коротких (до 0.5 сут) опорных интервалов времени точности аппроксимации реального движения, достигнутые с помощью методов построения орбит *P4* и *S4*, одинаковы. Однако следует иметь в виду, что в этих случаях результаты вычислений перенасыщены ошибками округлений и сравнение методов представляется недостаточно корректным. С увеличением опорного интервала времени при $(t_3 - t_1) > 0.5$ сут обобщенный метод Херрика – Гиббса проигрывает в точности методу построения орбиты *S4*. Этот проигрыш по данным последних строк табл. 3 и 4 достигает 1.5–2 порядков.

Отметим, что на примерах определения орбиты малой планеты Икар (1566 Icarus), рассмотренных ранее [8, 12], сформулированные в предыдущем разделе законы изменения погрешностей методов построения орбит *S3* и *S4* также находят практическое подтверждение.

Заключение

Рассмотрены четыре метода определения орбиты по трем наблюдениям, позволяющие учесть основную часть возмущений в движении исследуемого малого небесного тела. Два из них развиты в рамках подхода Гиббса и Херрика (методы построения орбит *P3* и *P4*). Два других предложены нами ранее (методы построения орбит *S3* и *S4*). Выполнено теоретическое исследование вопроса о сходимости решений, получаемых с помощью этих методов, к точным решениям при сокращении опорного интервала времени, определяемого крайними моментами наблюдений. Справедливость полученных законов изменения погрешностей методов подтверждена численными примерами. Кроме этого, результаты численных экспериментов показывают, что за исключением самых коротких из рассмотренных опорных интервалов времени, для которых методы построения орбит *P4* и *S4* дают одинаковую точность аппроксимации возмущенного движения, методы построения орбит *S3* и *S4* значительно превосходят по точности методы подхода Гиббса и Херрика соответствующих порядков. Основное объяснение этому состоит в том, что формулы построения орбиты *P3* (*P4*) опираются на разложения решений уравнений движения (1) в ряды Тейлора, в которых отброшены члены четвертого (пятого) и более высоких порядков. Предложенные же нами методы определения орбит *S3* и *S4* основаны на замкнутых (без разложения в ряды) выражениях, которые позволяют полностью учесть эффекты кеплеровской составляющей движения (1) и основную часть возмущающего ускорения.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Stracke G. Bahnbestimmung der Planeten und Kometen. – Berlin: J. Springer, 1929. – 365 s.
2. Dubyago A.D. The Determination of Orbits. – N. Y.: Macmillan, 1961. – 434 p.
3. Escobal P.R. Methods of Orbit Determination. – N. Y.; London; Sydney: John Wiley and Sons, 1965. – 463 p.
4. Субботин М.Ф. Введение в теоретическую астрономию. – М.: Наука, 1968. – 800 с.
5. Herrick S. Astrodynamics. – London; N. Y.; Cincinnati; Toronto; Melbourne: Van Nostrand Reinhold Co., 1971. – V. 1. – 540 p.
6. Gibbs J.W. // Mem. Natl. Acad. Sci. – 1889. – V. 4. – P. 81–104.
7. Herrick S. // Publ. Astron. Soc. Pac. – 1952. – V. 64. – P. 237–241.
8. Shefer V.A. // Sol. Syst. Res. – 2003. – V. 37. – No. 4. – P. 326–332.
9. Shefer V.A. // Sol. Syst. Res. – 2003. – V. 37. – No. 3. – P. 243–250.
10. Shefer V.A. // Astron. Rep. – 1998. – V. 42. – No. 6. – P. 837–844.
11. Shefer V.A. // Astron. Rep. – 1998. – V. 42. – No. 6. – P. 845–851.
12. Shefer V.A. // Sol. Syst. Res. – 2010. – V. 44. – No. 2. – P. 152–165.
13. Shefer V.A. // Astron. Lett. – 2007. – V. 33. – No. 4. – P. 270–282.
14. Lagrange J.L. Oeuvres. – Paris: Gauthier–Villars, 1869. – V. 4. – 758 p.
15. Gauss C.F. Theoria motus corporum coelestium in sectionibus conicis solem ambientium. – Hamburg: Perthes und Besser, 1809. – 227 p.

Национальный исследовательский
Томский государственный университет, г. Томск, Россия
E-mail: shefer@niipmm.tsu.ru

Поступила в редакцию 04.04.14.

Шефер Владимир Александрович, д.ф.-м.н., профессор каф. АиКГ ФФ ТГУ, зав. лабораторией НИИ ПММ ТГУ.