МАТЕМАТИКА

УДК 515.12

В.Р. Лазарев

ЗАВИСИМЫЕ ПОДПРОСТРАНСТВА В $C_pC_p(X)$ И НАСЛЕДСТВЕННЫЕ КАРДИНАЛЬНЫЕ ИНВАРИАНТЫ

Описан класс тихоновских топологических пространств Y, в рамках которого сохраняются неравенства $s(Y) \le \tau$, $hl(Y) \le \tau$, $hd(Y) \le \tau$. Доказано, что если этому классу принадлежит подпространство B пространства $\hat{L}_p(X)$ функционалов с конечным носителем, то ему принадлежит и объединение $X(B)$ всех носителей элементов из B. Установлено, что B допускает непрерывную факторизацию через множество $X(B)$ и, тем более, зависит от $X(B)$, что даёт частичный положительный ответ на один вопрос О.Г. Окунева. Доказано также, что в роли подпространства B может выступать любое открытое или канонически замкнутое подмножество в пространстве $C_p^0C_p(X)$.

Ключевые слова: *топология поточечной сходимости*, *наследственные кардинальные инварианты.*

0. Обозначения и вводные замечания

В данной статье рассматриваются только тихоновские топологические пространства, называемые «пространствами». В топологической терминологии и обозначениях придерживаемся монографии [1]. Напомним, что записи $s(X)$, $hl(X)$, $hd(X)$ означают соответственно спрэд, наследственное число Линделёфа и наследственную плотность пространства X. Символами $\mathbb{N}$, $\mathbb{R}$ обозначаются множества натуральных и соответственно вещественных чисел.

Основные сведения о пространствах непрерывных вещественнозначных функций $C_p(X)$, определённых на пространстве X, в топологии поточечной сходимости, а также об основных конструкциях и терминах, связанных с ними, можно найти в [2]. В частности, запись $C_p(X|A)$ означает пространство всех непрерывных функций на подпространстве $A \subset X$, допускающих непрерывное продолжение на всё X. Вместо $C_p(C_p(X))$ пишем $C_pC_p(X)$. Обозначаем $C_p^0C_p(X)$ подпространство пространства $C_pC_p(X)$, состоящее из функций, обращающихся в ноль в точке $0 \in C_p(X)$. Элементы пространства $C_p^0C_p(X)$ называем функционалами.

Если задано гомеоморфное вложение $h: C_p(X) \to C_p(Y)$, то, не уменьшая общности рассуждений, можно считать, что $h(0) = 0$. Вместе с таким вложением задано непрерывное отображение $h^*: Y \to C_p^0C_p(X)$ правилом $h^*(y)(\varphi) = h(\varphi)(y)$.

(Заметим, что h^* – гомеоморфизм, если $h\left(C_p(X)\right)$ – регулярное семейство функций в $C_p(Y)$). Таким образом, $h^*(Y)$ – семейство функционалов на $C_p(X)$, и, в силу непрерывности h^*, выполняются неравенства $s(h^*(Y)) \le s(Y)$, $hl(h^*(Y)) \le hl(Y)$, $hd(h^*(Y)) \le hd(Y)$.

В [3], при наличии гомеоморфного вложения $h: C_p(X) \to C_p(Y)$, установлены неравенства $s(Y^n) \le s(X^n)$, $hl(Y^n) \le hl(X^n)$, $hd(Y^n) \le hd(X^n)$ для каждого $n \in \mathbb{N}$. Естественно спросить, можно ли отвлечься от вложения h и установить неравенства такого рода просто для подпространства $Y \subset C_p^0 C_p(X)$? В [3] сформулирована следующая проблема (Problem 3.3 и Problem 3.4):

Проблема 0.1. Для каждого ли подпространства $B \subset C_p^0 C_p(X)$ существует подпространство $A \subset X$, такое, что $s(A) \le s(B)$, $hl(A) \le hl(B)$, $hd(A) \le hd(B)$ и B либо зависит от A, либо допускает непрерывную факторизацию через A?

При этом понятия зависимости и непрерывной факторизуемости определяются следующим образом.

Определение 0.2. Говорят, что подпространство $B \subset C_p^0 C_p(X)$ зависит от подмножества $A \subset X$, если $f(\varphi) = f(\psi)$ при всех $f \in B$, $\varphi, \psi \in C_p(X)$, таких, что $\varphi|_A \equiv \psi|_A$.

Определение 0.3. Скажем, что B допускает непрерывную факторизацию через A, если для каждого $f \in B$ найдётся непрерывное отображение $f_0 : C_p(X|A) \to \mathbb{R}$, такое, что $f = f_0 \circ p_A$, где $p_A : C_p(X) \to C_p(X|A)$ – отображение сужения.

Непосредственно из определений 0.2 и 0.3 следует, что если B допускает непрерывную факторизацию через A, то B зависит от A.

Сформулированная выше проблема 0.1, как указано в конце [3], имеет положительное решение, если B содержится в пространстве $L_p(X)$ линейных непрерывных функционалов на $C_p(X)$. В данной статье даётся положительный ответ на поставленный вопрос в более общем случае, а именно в случае, когда B содержится в пространстве $\hat{L}_p(X)$ так называемых функционалов с конечным носителем (см. определение 1.1).

В заключение этого вводного раздела установим один простой факт относительно свойства зависимости.

Лемма 0.4. Если $B \subset C_p^0 C_p(X)$ и B зависит от $A \subset X$, то $\overline{B}$ также зависит от A.

Доказательство. Пусть $f \in \overline{B}$. Предположим, что нашлись такие функции φ, $\psi \in C_p(X)$, совпадающие на A, что $f(\varphi) < f(\psi)$. Положим $\delta = 0{,}5(f(\psi) - f(\varphi))$ и рассмотрим стандартную окрестность $W = W(f, \varphi, \psi, \delta)$ функционала f в пространстве $C_p^0 C_p(X)$. Ясно, что если $g \in W$, то $g(\varphi) < g(\psi)$, а значит, $g \notin B$. Следовательно, $W \cap B = \varnothing$ в противоречие с $f \in \overline{B}$. ■

1. Функционалы с конечным носителем

Понятие функционала с конечным носителем можно рассматривать как обобщение понятия линейного непрерывного функционала, которое сохраняет некоторые существенные свойства последнего (см. ниже).

Определение 1.1. (см. [4]) Пусть для функционала f существует конечное подмножество $K \subset X$, такое, что выполнены два условия:

(i) Для любых $\varepsilon > 0$ и $\varphi \in C_p(X)$ найдётся $\delta > 0$, такое, что если $|\varphi(x) - \psi(x)| < \delta$ для всех $x \in K$, то $|f(\varphi) - f(\psi)| < \varepsilon$,

(ii) Существует $\varepsilon > 0$, такое, что для любого $x \in K$ и любой его окрестности $O(x)$ найдётся функция $\psi \in C_p(X)$, такая, что $\psi\big|_{X \setminus O(x)} = 0$, но $|f(\psi)| > \varepsilon$.

Тогда f называется функционалом с конечным носителем, а множество K называется носителем функционала f.

Ниже без доказательств приводятся те факты о функционалах с конечным носителем, которые необходимы для дальнейшего изложения. Эти факты (леммы 1.2 – 1.5) установлены в статьях [4, 5].

Лемма 1.2. Функционал $f \equiv 0 \Leftrightarrow K = \varnothing$.

Лемма 1.3. Если f – функционал с конечным носителем K, $\varphi, \psi \in C_p(X)$ и φ совпадает с ψ в точках K, то $f(\varphi) = f(\psi)$.

Лемма 1.4. Каждый функционал с конечным носителем имеет единственный носитель.

Множество всех функционалов с конечным носителем, с топологией, индуцированной из $C_p^0 C_p(X)$, обозначаем $\hat{L}_p(X)$. Лемма 1.4 означает, что правилом $f \to K(f)$ корректно определено конечнозначное отображение $K : \hat{L}_p(X) \to X$.

Различие между пространствами $\hat{L}_p(X)$ и $L_p(X)$ видно из следующей леммы.

Лемма 1.5. $\hat{L}_p(X)$ есть всюду плотное в $C_p^0 C_p(X)$ линейное подпространство, содержащее $L_p(X)$.

Как и $L_p(X)$, пространство $\hat{L}_p(X)$ можно «рассортировать» по количеству точек в носителях его элементов. А именно, обозначим $L^{(n)} = \left\{ f \in \hat{L}_p(X) : |K(f)| = n \right\}$. Кроме того, обозначим $E_n(X) = \{A \subset X : |A| = n\}$ для всякого $n \in \mathbb{N}$. Будем считать множество $E_n(X)$ наделённым топологией Вьеториса. Напомним, что стандартную базу этой топологии образуют множества вида

$$U = \langle U_1, \ldots, U_n \rangle = \{A \in E_n(X) : A \subset U_1 \cup \ldots \cup U_n, A \cap U_i \neq \varnothing, i = 1, \ldots, n\},$$

где множества U_i открыты в X и $U_i \cap U_j = \varnothing$ при $i \neq j$. Справедлива следующая лемма, аналогичная предложению 2.5 из [6].

Лемма 1.6. Для каждого $n \in \mathbb{N}$ отображение $s_n : L^{(n)} \to E_n(X)$, $s_n(f) = K(f)$ непрерывно.

Доказательство. Пусть $f \in L^{(n)}$, $s_n(f) = \{x_1, \ldots, x_n\} \in E_n(X)$, U – окрестность точки $s_n(f)$. Можем считать, что $U = \langle U_1, \ldots, U_n \rangle$ и $x_i \in U_i$ при $i = 1,\ldots,n$. Укажем окрестность V элемента $f \in L^{(n)}$, для которой $s_n(V) \subset U$. В силу (ii) существуют функции $\varphi_i \in C_p(X)$, тождественно равные 0 вне U_i и такие, что $f(\varphi_i) \neq 0$ при каждом $i = 1,\ldots,n$. Рассмотрим образы $\hat{\varphi}_i : C_pC_p(X) \to \mathbb{R}$ этих функций при каноническом отображении вычисления $\Lambda : C_p(X) \to C_pC_pC_p(X)$ (см., например, [2]). Положим $V_i = \left(\hat{\varphi}_i^{-1}(\mathbb{R} \setminus \{0\})\right) \cap L^{(n)}$, $V = \bigcap_{i=1}^{n} V_i$.

Ясно, что множество V открыто в $L^{(n)}$. Включение $f \in V$ следует из того, что $\hat{\varphi}_i(f) = f(\varphi_i) \neq 0$ при всех $i = 1,\ldots,n$.

Наконец, убедимся, что $s_n(V) \subset U$. Пусть $g \in L^{(n)}$ таково, что $s_n(g) = \{y_1, \ldots, y_n\} \notin U$. Это означает, что для некоторого k, $1 \le k \le n$, имеем $U_k \cap s_n(g) = \varnothing$. Следовательно, $\varphi_k(y_i) = 0$ для всех $i = 1,\ldots,n$. По лемме 1.3, $g(\varphi_k) = \hat{\varphi}_k(g) = 0$, а значит, $g \notin V_k$ и, тем более, $g \notin V$. ■

Лемма 1.7. Пусть $f \in \hat{L}_p(X)$, $K = K(f)$ – (конечный) носитель f. Тогда найдётся непрерывное отображение $f' : \mathbb{R}^K \to \mathbb{R}$, такое, что $f = f' \circ p_K$, где $p_K : C_p(X) \to \mathbb{R}^K$ – отображение сужения.

Доказательство. Из леммы 1.3 следует, что формулой $f'(r) = f\left(p_K^{-1}(r)\right)$, $r \in \mathbb{R}^K$, корректно определено отображение $f' : \mathbb{R}^K \to \mathbb{R}$, причём, очевидно, выполнено равенство $f = f' \circ p_K$. Осталось показать, что отображение f' непрерывно. Так как отображение f непрерывно, а p_K – открыто, то достаточно установить равенство $f'^{-1}(U) = p_K\left(f^{-1}(U)\right)$ для произвольного открытого множества $U \subset \mathbb{R}$. Но оно элементарно выводится из того, что $f = f' \circ p_K$. ■

Условимся для каждого подпространства $B \subset \hat{L}_p(X)$ обозначать символом $X(B)$ объединение носителей всех функционалов из B.

Лемма 1.8. Пусть $B \subset \hat{L}_p(X)$. Тогда B допускает непрерывную факторизацию через $X(B)$ (следовательно, зависит от $X(B)$).

Доказательство. Пусть $f \in B$. По лемме 1.7, $f = f' \circ p_K$. Обозначим символом $p_K^{X(B)}$ отображение сужения функций с $X(B)$ на подмножество $K \subset X(B)$. Определим отображение $f_0 : C_p\left(X | X(B)\right) \to \mathbb{R}$ формулой $f_0 = f' \circ p_K^{X(B)}$. Тогда f_0 непрерывно, будучи композицией непрерывных отображений. Кроме того, имеем $f_0 \circ p_{X(B)} = f' \circ p_K^{X(B)} \circ p_{X(B)} = f' \circ p_K = f$. ■

2. Основные результаты

В этом разделе докажем основную теорему этой статьи (см. теорему 2.3 ниже), а также её приложения к наследственным кардинальным инвариантам (следствия 2.4 – 2.6). Предварительно установим некоторые вспомогательные факты.

Зафиксируем число $n \in \mathbb{N}$ и рассмотрим произвольное $Y \subset E_n(X)$. Для каждого $y = \{x_1, \dots, x_n\} \in E_n(X)$ положим $u_n(y) = \{x_1, \dots, x_n\} \subset X$, а также $Z = u_n(Y) = \cup\{u_n(y) : y \in Y\} \subset X$.

Лемма 2.1. Многозначное отображение $u_n : Y \to Z$ обладает свойствами:

(а) Отображение u_n ровно n-значно и биективно;

(б) Отображение u_n полунепрерывно сверху и полунепрерывно снизу.

Доказательство. Пункт (а) очевиден. Справедливость (б) проверяется легко. Докажем, например, полунепрерывность снизу. Возьмём открытое множество $G \subset Z$ и рассмотрим $V = \{y \in Y : u_n(y) \cap G \neq \varnothing\}$. Пусть $v \in V$. Тогда найдутся дизъюнктные окрестности U_x всех точек $x \in u_n(v) \subset Z$, такие, что $U_x \subset G$ при $x \in G$. Значит, стандартная окрестность $U = \langle U_x : x \in u_n(v) \rangle$ точки $v \in Z$ в топологии Вьеториса содержится в V, то есть множество V открыто в Y. ■

Определение 2.2. Будем называть ровно n-значные, полунепрерывные сверху и полунепрерывные снизу отображения n-бинепрерывными.

Заметим, что каждое непрерывное отображение, очевидно, является 1-бинепрерывным.

Теорема 2.3. Пусть P – некоторое свойство топологических пространств, сохраняющееся при следующих операциях:

1. Переход к подпространству.
2. Переход к образу при непрерывном отображении.
3. Переход к образу при биективном n-бинепрерывном отображении для любого $n \in \mathbb{N}$.
4. Взятие объединения не более чем счётного семейства пространств, обладающих свойством P.

Тогда, если $B \subset \hat{L}_p(X)$, B обладает свойством P, то и $X(B)$ обладает свойством P.

Доказательство. Пусть $B \subset \hat{L}_p(X)$. Зафиксируем $n \in \mathbb{N}$ произвольно и рассмотрим $B_n = B \cap L^{(n)}$. Если B обладает свойством P, то по п. 1, $B_n \subset B$ также обладает свойством P. По лемме 1.6, отображение носителя $s_n : B_n \to E_n(X)$ непрерывно, поэтому, в силу п. 2, $Y_n = s_n(B_n)$ также обладает свойством P. Далее, по лемме 2.1, отображение $u_n : Y_n \to A_n = u_n(Y_n)$ биективно и n-бинепрерывно. Значит, по п. 3, подпространство $A_n \subset X$ обладает свойством P. Наконец, ясно, что $X(B) = \cup\{A_n : n \in \mathbb{N}\}$, и потому $X(B)$, в силу п. 4, обладает свойством P. ■

Следствие 2.4. Пусть τ – некоторый кардинал, B – произвольное подпространство в $\hat{L}_p(X)$, обладающее одним из свойств $hl(B) \le \tau$, $hd(B) \le \tau$, $s(B) \le \tau$. Тогда и $X(B)$ обладает соответствующим свойством.

Доказательство. Убедимся, что все три упомянутых свойства удовлетворяют условиям 1 – 4 теоремы 2.3. Выполнение условия 1 очевидно, так как все три кардинальных инварианта являются наследственными.

Поскольку сужение непрерывного отображения на произвольное подпространство непрерывно и непрерывные отображения не увеличивают ни числа Линделёфа, ни плотности, ни числа Суслина, заключаем, что выполнено условие 2.

Далее, в [3] показано (propositions 1.7 – 1.9 при $n = 1$), что кардинальные инварианты hl, hd, s не возрастают при переходе к образам при конечнозначных почти полунепрерывных снизу отображениях [3, definition 1.4]. Из определения 1.4 в [3] и определения 2.2 выше следует, что каждое n-бинепрерывное отображение является конечнозначным почти полунепрерывным снизу. Отсюда вытекает выполнение условия 3.

Наконец, взятие не более чем счётного объединения пространств не увеличивает наследственных кардинальных инвариантов, что означает выполнение условия 4. ■

Таким образом, следствие 2.4 вместе с леммой 1.8 даёт положительное решение проблемы 0.1 для всех подпространств $B \subset \hat{L}_p(X)$.

Следствие 2.5. Пусть τ – некоторый кардинал, подпространство $Z \subset C_p^0 C_p(X)$ представимо в виде $Z = \overline{B}$, где $B \subset \hat{L}_p(X)$. Пусть выполнено какое-либо из неравенств $hl(Z) \le \tau$, $hd(Z) \le \tau$, $s(Z) \le \tau$. Тогда соответствующее неравенство выполнено и для $X(B)$.

Доказательство. Пусть, например, $hl(Z) \le \tau$. По лемме 0.4, Z зависит от $X(B)$. Так как $B \subset Z$, то $hl(B) \le \tau$. По следствию 2.4, $hl(X(B)) \le \tau$. Ясно, что те же рассуждения верны и для кардиналов hd и s. ■

Следствие 2.6. Каждое открытое или канонически замкнутое подпространство G в $C_p^0 C_p(X)$, отвечающее одному из неравенств $hl(G) \le \tau$, $hd(G) \le \tau$, $s(G) \le \tau$, зависит от некоторого $A \subset X$, для которого также выполнено соответствующее неравенство.

Доказательство. По лемме 1.5 найдётся $B \subset \hat{L}_p(X)$, такое, что $G \subset \overline{B}$. В случае канонически замкнутого G имеем $G = \overline{B}$. Поэтому, достаточно положить $A = X(B)$ и применить следствие 2.5.

Пусть G открыто. Поскольку $\overline{B}$ зависит от $X(B)$ (лемма 0.4), то G – тем более. Так как $B \subset G$, то $hl(B) \le \tau$ ($hd(B) \le \tau$, $s(B) \le \tau$). Попадаем в условия следствия 2.4. ■

В связи со следствием 2.6 представляется естественным следующий (открытый) вопрос.

Вопрос 2.7. Пусть подмножество $M \subset C_p^0 C_p(X)$ имеет тип G_δ. Верно ли, что M зависит (или допускает непрерывную факторизацию) от некоторого $A \subset X$, такого, что выполнено какое-либо из трех неравенств $hl(A) \le hl(M)$, $hd(A) \le hd(M)$, $s(A) \le s(M)$)?

ЛИТЕРАТУРА

1. *Энгелькинг Р.* Общая топология. М.: Мир, 1986.
2. *Архангельский А.В.* Топологические пространства функций. М.: Изд-во МГУ, 1989.
3. *Okunev O.* Homeomorphisms of function spaces and hereditary cardinal invariants // Topol. and it's Appl. 1997. V. 80 P. 177–188.
4. *Лазарев В.Р.* О модификации понятия функционала с конечным носителем // Вестник Томского государственного университета. 2007. № 298. С. 119–120.
5. *Лазарев В.Р.* О пространстве функционалов с конечным носителем // Вестн. ТГУ. Бюлл. оперативной научной информации «Актуальные проблемы алгебры и анализа». 2005. № 54. Декабрь. С. 80–87.
6. *Tkachuk V.V.* Some non-multiplicative properties are l-invariant // Comment. Math. Univ. Carolin. 1997. V. 38. No. 1. P. 169–175.

Статья поступила 05.11.2014 г.

Lazarev V.R. DEPENDENT SUBSPACES IN $C_pC_p(X)$ AND HEREDITARY CARDINAL INVARIANTS

In this paper, for a given arbitrary subset $B \subset C_pC_p(X)$ consisting of finite support functionals (see Definition 1.1), we prove its continuous factorizability (see Definition 0.3) through some subset $A \subset X$ satisfying the conditions $hl(A) \le hl(B)$, $hd(A) \le hd(B)$, and $s(A) \le s(B)$.

Finite support functionals have some essential properties of linear continuous functionals. In particular, the set B above may be "ranked" by subsets B_n according to the number n of points in the supports of functionals. In addition, the support mapping $s_n : B_n \to E_n(X)$ is continuous (see Lemma 1.6). It permit us to formulate conditions on a topological property that are sufficient for the union $X(B) \subset X$ of the supports of the functionals from B to have this topological property together with B (see Theorem 2.3). Since B admits continuous factorization through $X(B)$ (see Lemma 1.8) and inequalities $hl(B) \le \tau$, $hd(B) \le \tau$, $s(B) \le \tau$ keep true under any operations from the formulation of Theorem 2.3 (see Corollary 2.4), we get a partially positive answer to the Problem 3.3 and Problem 3.4 from [3].

In addition, we extend Corollary 2.4 to all open and all canonical closed subsets of the space $C_p^0C_p(X)$ (see Corollary 2.6).

Keywords: pointwise convergence topology, hereditary cardinal invariants.

LAZAREV Vadim Remirovich (Candidate of Physics and Mathematics,
Tomsk State University, Tomsk, Russian Federation)

E-mail: lazarev@math.tsu.ru

REFERENCES

1. Engel'king R. *Obshchaya topologiya*. Moskow, Mir Publ., 1986. (in Russian)
2. Arkhangel'skiy A.V. *Topologicheskie prostranstva funktsiy*. Moskow, Moskow St. Univ. Publ., 1989. (in Russian)
3. Okunev O. Homeomorphisms of function spaces and hereditary cardinal invariants. *Topol. and it's Appl.*, 1997, vol. 80, pp. 177–188.
4. Lazarev V.R. O modifikatsii ponyatiya funktsionala s konechnym nositelem. *Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo universiteta*, 2007, no. 298, pp. 119–120. (in Russian)
5. Lazarev V.R. O prostranstve funktsionalov s konechnym nositelem. *Vestn. TGU. Byull. operativnoy nauchnoy informatsii «Aktual'nye problemy algebry i analiza»*, 2005, no. 54, pp. 80–87. (in Russian)
6. Tkachuk V.V. Some non-multiplicative properties are l-invariant. *Comment. Math. Univ. Carolin.*, 1997, vol. 38, no. 1, pp. 169–175.