МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ
РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ
ТОМСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ

МАТЕРИАЛЫ

II Всероссийской молодежной научной конференции

«МАТЕМАТИЧЕСКОЕ И ПРОГРАММНОЕ ОБЕСПЕЧЕНИЕ ИНФОРМАЦИОННЫХ, ТЕХНИЧЕСКИХ И ЭКОНОМИЧЕСКИХ СИСТЕМ»

Томск, 16–17 мая 2014 г.

Под общей редакцией
кандидата технических наук И.С. Шмырина

Томск
Издательский Дом Томского государственного университета
2014

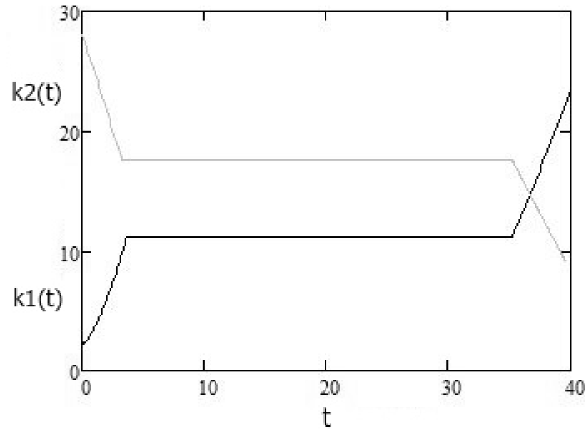

Рис. 1

Заключение

В данной работе была рассмотрена задача оптимального распределения ресурсов в двухсекторной модели экономики с целью максимизации благосостояния населения. В качестве управляющего параметра была выбрана норма накопления. Задача была решена как задача оптимального управления с использованием принципа максимума Понтрягина. Получено трехуровневое релейное управление, решение задачи в общем виде для неоклассической производственной функции, выражения для моментов выхода на магистраль и схода с магистрали. Рассмотрен числовой пример для производственной функции Кобба-Дугласа, рассчитаны оптимальные значения фондовооруженностей, нормы накопления, моменты выхода и схода для траекторий. Вычисления проводились с использованием пакета MathCad.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Интрилигатор М.* Математические методы оптимизации и экономическая теория. – М. : Прогресс, 1975. – Гл. 14 : Принцип максимума. – С. 414–469.
2. *Параев Ю. И., Грекова Т. И.* Решение терминальной задачи оптимального управления односекторной экономикой // Вестник Томского гос. ун-та. Управление, вычислительная техника и информатика. – 2012. – № 3 (19). – С. 14–19.
3. *Параев Ю. И.* Оптимальное управление в динамической задачи экономики // Palmarium Academic Publishing. – 2013. – С. 77–82.

ТОЧКИ РАЗМЕЩЕНИЯ НА ГРАФАХ КАК ДОПОЛНИТЕЛЬНЫЕ ХАРАКТЕРИСТИКИ СОВОКУПНОСТИ ОБЪЕКТОВ ПРОИЗВОЛЬНОЙ ПРИРОДЫ

Л. А. Шабаршова

Томский государственный университет
E-mail: ludmilashabarshova1991@gmail.com

Введение

Задачи размещения – отдельный тип задач теории графов. Они позволяют решать проблемы, связанные с наилучшим расположением в определенных регионах систем обслуживания. Возможны различные постановки задач оптимального размещения в зависимости от того, какие ограничения являются существенными, и какие критерии оптимальности выбраны.

Вследствие этого задачи размещения интересны не только сами по себе, но также и тем, что представляют общую основу, на которой результаты, полученные в различных областях, могут быть собраны, классифицированы, обобщены и распространены. Задачи размещения очень удобно представлять в виде графов.

Прежде чем рассматривать алгоритмы размещения необходимо ввести некоторые определения, необходимые для описания точек на ребрах и различных расстояний в графе.

1. Основные понятия и определения

Граф – это совокупность множества X, элементы которого называются *вершинами*, и множества A упорядоченных пар вершин, элементы которого называются *дугами*.

Предполагается, что как множество X, так и множество A содержат конечное число элементов.

Определенные задачи теории графов требуют наличия информации только о концевых точках дуг. В таких задачах нет необходимости различать начало и конец дуги, т.е. не нужно приписывать дугам определенные направления. Граф, в котором направления дуг не задаются, называется *неориентированным*. Неориентированные дуги называются *ребрами*.

Граф называется *полным*, если любые две вершины в нем соединены ребром. Таким образом, если граф $G=\left(X,A\right)$ – полный, и множество X состоит из n вершин, то количество ребер в этом графе определяется по формуле:

$$m=\frac{n\cdot(n-1)}{2}. \quad (1)$$

Множество рассматриваемых вершин в графе G содержит вершины с номерами от 1 до n. Рассмотрим произвольное ребро (i,j), длина которого равна $a(i,j)>0$.

Пусть f обозначает точку на ребре (i,j), которая для всех $0\le f\le 1$ отстоит на $f\cdot a(i,j)$ единиц от вершины i и на $(1-f)\cdot a(i,j)$ единиц от вершины j. Назовем ее f-точкой. Нуль-точкой ребра (i,j) является вершина i. Точки ребер, которые не являются вершинами, называются внутренними точками.

Обозначим через $d(i,j)$ длину кратчайшего пути из вершины i в вершину j. Тогда матрица D, размерности $n\times n$, составленная из элементов $d(i,j)$ называется *матрицей расстояний «вершина – вершина»*. Для вычисления значений $d(i,j)$ можно воспользоваться *алгоритмом Флойда* [1].

Длина кратчайшего пути от f-точки на ребре (r,s) до вершины j называется расстоянием «точка – вершина» и обозначается $d(f-(r,s),j)$. Поскольку (r,s) — ребро, то расстояние «точка – вершина» определяется по формуле:

$$d(f-(r,s),j)=\min\left\{f\cdot a(r,s)+d(r,j),(1-f)\cdot a(r,s)+d(s,j)\right\}. \quad (2)$$

Теперь рассмотрим наименьшее расстояние от вершины j до каждой точки на ребре (r,s). Для некоторой точки на ребре (r,s) это расстояние принимает максимальное значение. Оно обозначается $d'(j,(r,s))$ и называется расстоянием «вершина – ребро». Так как (r,s) – ребро, то наиболее удаленной от вершины j является точка, такая, что расстояния из вершины j в эту точку через вершины s и r имеют одинаковые значения. Сумма этих расстояний всегда равна:

$$d(j,r)+f\cdot a(r,s)+(1-f)\cdot a(r,s)=d(j,r)+d(j,s)+a(r,s)/ \quad (3)$$

Следовательно,

$$d'(j,(r,s))=\frac{d(j,r)+d(j,s)+a(r,s)}{2}. \quad (4)$$

Элементы $d'(j,(r,s))$ образуют *матрицу расстояний «вершина – ребро»* D' размерности $n\times m$.

2. Точки размещения на графах

В зависимости от того, какие ограничения являются существенными, и какие критерии оптимальности выбраны, возможны различные постановки задач оптимального размещения. В качестве критериев оценки качества размещения могут выступать минимизация максимального расстояния или минимизация суммы расстояний до всех вершин или ребер графа. К основным точкам размещения относятся центр, медиана, главный центр, главная медиана.

Центром является такая вершина *x*, что расстояние от нее до наиболее удаленной вершины минимально, т.е.

$$MBB(x) = \min_i MBB(i), \tag{5}$$

где $MBB(i) = \max_j d(i, j)$ – максимальное расстояние от вершины *i* до вершин графа. Поиск центра происходит при помощи матрицы *D* расстояний «вершина – вершина».

Максимальное расстояние $MBB(i)$ от вершины *i* до любой вершины графа является элементом *i*-й строки матрицы *D*, имеющим максимальное значение. Так как нас интересует вершина с наименьшим значением $MBB(x)$, то в качестве центра выбираем ту, которая соответствует строке матрицы *D*, содержащей элемент с наименьшим максимальным значением.

Медиана – это вершина *x*, такая, что сумма расстояний от нее до всех остальных вершин графа минимальна, т.е.

$$CBB(x) = \min_i CBB(i), \tag{6}$$

где $CBB(i) = \sum_j d(i, j)$ – суммарное расстояние от вершины *i* до всех вершин графа. Сумма значений элементов *i*-й строки матрицы *D* расстояний равна сумме расстояний от вершины ко всем остальным вершинам графа, т.е. равна $CBB(i)$. Следовательно, медиана соответствует номеру строки матрицы *D*, для которой сумма элементов минимальна.

Главным центром является такая вершина *x*, что расстояние от нее до наиболее удаленной точки на ребрах графа минимально, т.е.

$$MBД(x) = \min_i \{MBД(i)\}, \tag{7}$$

где $MBД(i) = \max_{(r,s)} \{d'(i,(r,s))\}$ – максимальное расстояние от вершины *i* до ребер графа. Значение $MBД(i)$ определяется как максимальное значение элементов *i*-й строки матрицы D'. Вершина, соответствующая минимальному значению $MBД(i)$ является главным центром.

Главная медиана – это вершина *x*, такая, что сумма расстояний от нее до каждого из ребер минимальна. Под расстоянием от вершины до ребра понимается максимальное расстояние от вершины до точек на этом ребре, т.е.

$$CBД(x) = \min_i CBД(i), \tag{8}$$

где $CBД(i) = \sum_{(r,s)} d'(i,(r,s))$ – суммарное расстояние от вершины *i* до ребер графа. Сумма значений i-ой строки матрицы D' равна сумме расстояний от вершины *i* до всех ребер, т.е. равна $CBД(i)$. Следовательно, главная медиана соответствует любой строке матрицы D', для которой сумма значений элементов минимальна.

Таким образом, поиск центра, главного центра, медианы и главной медианы – решение задачи оптимизации.

3. Модельные исследования

Рассмотрим модель, в которой вершины графа располагаются в узлах триангулярной сети. Триангулярная сеть – сеть, ячейки которой образуют равноотстоящие треугольники. Ограничимся 19 вершинами. Вершины расположены таким образом, что расстояние между любыми двумя соседними вершинами одинаково и равно 1 см. Координаты вершин приведены в табл. 1. Модель является полным неориентированным графом. Ограничимся лишь изображением вершин графа, чтобы рисунок не был нагроможден. Модель изображена на рис. 1.

Таблица 1

Координаты вершин графа для триангулярной сети

1.	(0;0)	6.	(–0.5;–0.86)	11.	(0;1.72)	16.	(–1;1.72)
2.	(1;0)	7.	(0.5;–0.86)	12.	(–1;1.72)	17.	(0;–1.72)
3.	(0.5;0.86)	8.	(2;0)	13.	(–1.5;0.86)	18.	(1;–1.72)
4.	(–0.5;0.86)	9.	(1.5;0.86)	14.	(–2;0)	19.	(1.5;–0.86)
5.	(–1;0)	10.	(1;1.72)	15.	(–1.5;–0.86)		

Все точки размещения (центр, медиана, главный центр, главная медиана) приходятся на центр симметрии графа – вершину 1.

Если же рассматривать, к примеру, только верхнюю половину нашего графа (рис. 2), то медиана и главная медиана уже располагаются в вершинах 3 и 4.

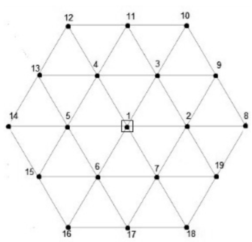

Рис. 1. Триангулярная сеть. □– центр, медиана, главный центр, главная медиана

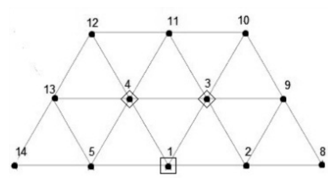

Рис. 2. Участок триангулярной сети. □– центр, главный центр; ◊ – медиана, главная медиана

4. Применение алгоритмов размещения для реальных данных

Найдем точки размещения на реально существующих моделях – сетях метеостанций. Для начала рассмотрим сеть метеостанций Томской области (25 станций), а затем сеть метеостанций Европы и азиатской территории России (АТР) (249 станций).

Поиск точек размещения будем проводить в двух пространствах: пространстве географических координат (каждая метеостанция задается парой координат – долгота, широта) и в пространстве температур (каждой метеостанции соответствует некоторый временной температурный ряд).

Для сети Томской области временной интервал составляет 38 лет. Найдем точки размещения в пространстве температур по всем данным ($k = 456$ показаний). Для сети метеостанций Европы и АТР временной интервал 56 лет. В этом случае данные температур поделены на 12 классов. Каждый класс соответствует показаниям температур конкретного месяца ($k = 56$ показаний). Точки размещения будем искать в каждом классе.

В пространстве географических координат вес ребра (i, j) определяется по формуле:

$$a(i, j) = \sqrt{(x_i - x_j)^2 + (y_i - y_j)^2}\ , \qquad (9)$$

а в пространстве температур:

$$a(i, j) = \frac{\sqrt{\sum_{n=1}^{k} (t_i^n - t_j^n)}}{k}, \qquad (10)$$

где n – номер метеостанции, k – количество среднемесячных показаний.

Сеть метеостанций Томской области

В качестве модели данной задачи выступает неориентированный полный граф, вершины которого – точки расположения метеостанций. Любые две вершины соединены ребром. Результаты работы алгоритмов размещения представлены в табл. 2. Точки размещения отмечены на рис. 3, 4.

Таблица 2

Точки размещения для сети метеостанций Томской области

Точки размещения	Пространство геогр. координат	Пространство температур
Центр	Колпашево (110,68)	Молчаново (121,47)
Главный центр	Старица (79,65)	Молчаново (121,47)
Медиана, главная медиана	Колпашево (110,68)	Александровское (137,71)

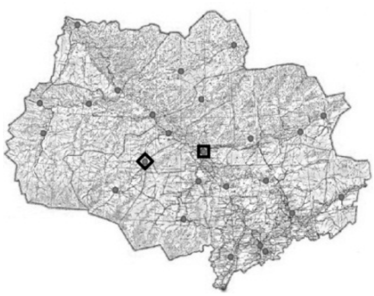

Рис. 3. Сеть Томской области. Географическое пространство. □ – центр, медиана, главная медиана; ◊ – главный центр

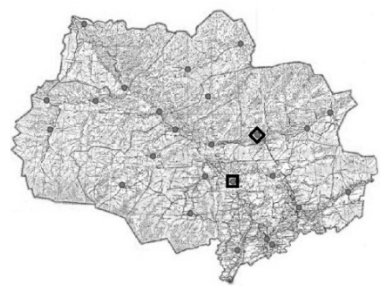

Рис. 4. Сеть Томской области. Пространство температур. □ – центр, главный центр; ◊ – медиана, главная медиана

Сеть метеостанций Европы и АТР

Для сети метеостанций Европы и АТР в пространстве географических координат были получены следующие точки:

- центр – вершина 72;
- главный центр – вершина 74;
- медиана, главная медиана – вершина 81.

Точки размещения в пространстве температур представлены в табл. 3.

Таблица 3

Точки размещения для сети метеостанций Европы, АТР. Пространство температур

Месяц	Центр	Главный центр	Медина, главная медиана
Январь	190	179	194
Февраль	158	179	137
Март	85	179	170
Апрель	66	242	191
Май	105	247	167
Июнь	22	247	29
Июль	161	191	169
Август	140	252	242
Сентябрь	183	241	202
Октябрь	185	245	203
Ноябрь	167	241	196
Декабрь	173	205	194

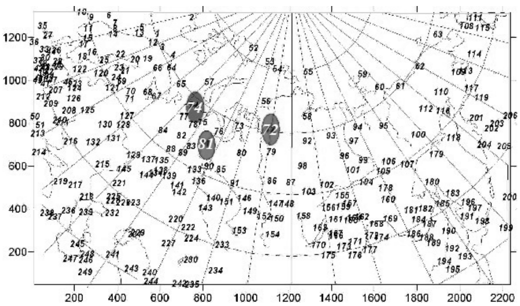

Рис. 5. Сеть Европы и АТР. Точки размещения в пространстве географических координат

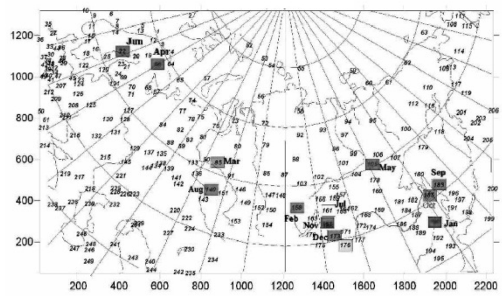

Рис. 6. Сеть Европы и АТР. Пространство температур. Центры

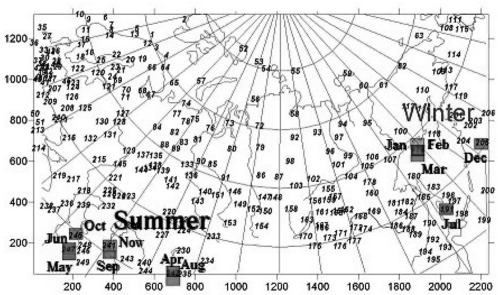

Рис. 7. Сеть Европы и АТР. Пространство температур. Главные центры

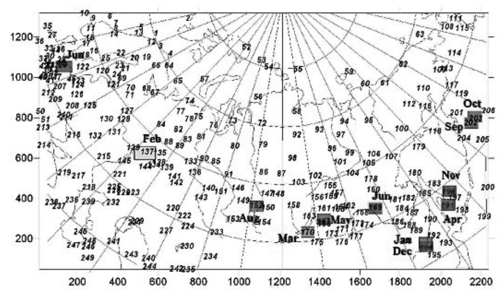

Рис. 8. Сеть Европы и АТР. Пространство температур. Медианы и главные медианы

Заключение

В работе рассмотрены различные постановки задач оптимального размещения: поиск центра и главного центра, медианы и главной медианы. Задачи отличаются друг от друга заданием критерия оценки качества размещения. В качестве модели задачи размещения выступает полный неориентированный граф. При поиске центра, главного центра, медианы и главной медианы решается оптимизационная задача.

Реализация алгоритмов размещения показана на простейшем примере – триангулярной сети. Также найдены точки размещения для реально существующих сетей – сеть метеостанций Томской области и сеть метеостанций Европы и азиатской территории России. Поиск точек размещения осуществлен в двух пространствах: пространстве географических координат и пространстве температур.

Исследования в различных пространствах показали, что постановку задачи размещения можно изменять не только с помощью выбора критерия оценки качества размещения, но и путем наделения вершин графа некоторыми признаками. Это позволяет искать точки размещения уже в другом n-мерном пространстве этих признаков.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Майника Э.* Алгоритмы оптимизации на сетях и графах: Пер. с англ. – М.: Мир, 1981. – 324 с.
2. *Харари Ф.* Теория графов: Пер. с англ. – М.: Мир, 1973. – 301 с.
3. *McPherson R.* Optimum interpolation: Basic formulation and Characteristics: Office note 265. / National Metrological Center. – 1982. – 15 p.
4. *Thiebaux H.* Spatial objective analysis: Office note 352. / National Metrological Center. – 1989. – 19 p.