

МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ
РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ
ТОМСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ

МАТЕРИАЛЫ
II Всероссийской молодежной
научной конференции
«МАТЕМАТИЧЕСКОЕ
И ПРОГРАММНОЕ ОБЕСПЕЧЕНИЕ
ИНФОРМАЦИОННЫХ,
ТЕХНИЧЕСКИХ
И ЭКОНОМИЧЕСКИХ СИСТЕМ»

Томск, 16–17 мая 2014 г.

*Под общей редакцией
кандидата технических наук И.С. Шмырина*

Томск
Издательский Дом Томского государственного университета
2014

Оценки длительности процедуры для периодического процесса 1-го порядка

θ_1	0.5	0.5	0.5	0.1	0.1	0.1	5	5	5
θ_2	0.9	0.9	0.9	-1	-1	-1	0.15	0.15	0.15
h	100	500	1000	100	500	1000	100	500	1000
$\lim_{h \rightarrow \infty} E \frac{\tau_1(h)}{h}$	0.638	0.638	0.638	0.980	0.980	0.980	0.0168	0.0168	0.0168
$\lim_{h \rightarrow \infty} E \frac{\tau_2(h)}{h}$	0.4406	0.4406	0.4406	0.495	0.495	0.495	0.4279	0.4279	0.4279
$\frac{\tau_1(h)}{h}$	0.634	0.636	0.6375	0.973	0.982	0.981	0.0286	0.0250	0.2034
$\frac{\tau_2(h)}{h}$	0.447	0.447	0.447	0.517	0.502	0.493	0.4893	0.4394	0.4326
$SD(\theta_1^*)$	0.009	0.004	0.003	0.004	0.003	0.001	0.006	0.003	0.001
$SD(\theta_2^*)$	0.008	0.006	0.004	0.004	0.005	0.001	0.068	0.023	0.007
$SD(\hat{\theta}_1)$	0.008	0.004	0.002	0.005	0.004	0.001	0.006	0.003	0.001
$SD(\hat{\theta}_2)$	0.007	0.006	0.004	0.003	0.005	0.001	0.05	0.019	0.008
T_1	128	640	1280	196	980	1960	4	20	40
T_2	90	450	900	100	500	1000	86	430	860
T	128	640	1280	196	980	1960	86	430	860

ЛИТЕРАТУРА

1. Troutman, B. M. Some results in periodic autoregression // Biometrika. – 1979.
2. Franses, P. H. Periodic time series models. – Oxford : Oxford University Press, 2002.
3. Lopez-de-Lacalle J. Periodic autoregressive time series models in R: the partsm package // Journal of Statistical Software. – 2005.
4. Tesfaye Y. G., Meerschaert M. M., Anderson P. L. Identification of periodic autoregressive moving average models and their application to the modelling of river flows // Water Resources Research. – 2006.
5. Ширяев, А. Н. Вероятность. – М. : Наука, 1980.
6. Galtchouk, L., Konev V. On sequential squares estimates of autoregressive parameters // Sequential Analysis. – 2005.

ФОРМИРОВАНИЕ ИНВЕСТИЦИОННОГО ПОРТФЕЛЯ С ИСПОЛЬЗОВАНИЕМ МОДЕЛЕЙ АВТОРЕГРЕССИИ

Т. Б. Тарбаева

Томский государственный университет
E-mail: t.b.tarbaeva@gmail.com

Введение

В докладе рассматривается проблема формирования и управления портфелем ценных бумаг, а также анализируется метод построения инвестиционного портфеля, который может быть использован на российском фондовом рынке. Исследуются основные характеристики, свойства и возможности стохастических и динамических моделей типа AR. Рассматривается задача построения адаптивного прогноза будущих доходностей акций и формирования инвестиционного портфеля.

Под инвестиционным портфелем понимается некая совокупность ценных бумаг, принадлежащих физическому или юридическому лицу, выступающая как целостный объект управления. Это означает, что при формировании портфеля и в дальнейшем, изменяя его состав и структуру, управляющий формирует новое инвестиционное качество с заданным соотношением – риск / доходность. Модель Марковица является одним из основных методов формирования инвестиционного портфеля, которая позволяет построить портфель минимального риска при заданной его эффективности.

Для практического использования модели Марковица необходимо определить для каждой акции ожидаемую доходность, ее стандартное отклонение и ковариацию между акциями. Но модель Марковица не дает возможности выбрать оптимальный портфель, а определяет набор эффективных портфелей. Каждый из этих портфелей обеспечивает наибольшую ожидаемую доходность для определенного уровня риска.

1. Постановка задачи

Ставится задача о формировании эффективного портфеля из n обыкновенных акций на срок (инвестиционный горизонт) T_i с текущего момента времени t_{i-1} до будущего момента времени t_i . В рамках работы моменты времени дискретны и представляют собой моменты окончания торговых дней (остановки торгов).

Постановка задачи

Пусть структура портфеля акций за срок T_i задаётся вектором их долей в портфеле:

$$X_i = (x_1, x_2, \dots, x_n)^T. \quad (1)$$

Требуется найти такой портфель, который минимизировал бы риск σ и обеспечивал бы заданную величину ожидаемой доходности μ . Таким образом, ставится задача нахождения портфеля минимального риска при заданной его эффективности.

Задача нахождения эффективного портфеля (или портфеля минимальной дисперсии) по Марковицу заключается в решении следующей оптимизационной задачи:

$$\begin{cases} \sigma_{P,i}^2 = \bar{X}_i^T V_i \bar{X}_i \rightarrow \min, \\ \mu_{P,i} = \bar{\mu}_i^T \bar{X}_i, \\ \bar{I}^T \bar{X}_i = 1, \\ \bar{X}_i \geq 0, \end{cases} \quad (2)$$

где V_i – ожидаемая за срок T_i ковариационная матрица доходностей акций, $\sigma_{P,i}^2$ – ожидаемый риск (дисперсия) портфеля, $\bar{\mu}_i$ – вектор-столбец ожидаемых доходностей акций, $\mu_{P,i}$ – ожидаемая доходность портфеля, $\bar{I}$ – единичный вектор.

Под доходностью понимается логарифмическая доходность за период. Неявно предполагается, что V_i положительно определена и не вырождена, а вектор доходностей не коллинеарен единичному. Последнее выражение системы (2) налагает ограничение: веса в портфеле должны быть неотрицательны. В случае отсутствия этого ограничения, задача (2), имеет явное и единственное решение (тогда она называется задачей Блэка). Однако и в случае наличия этого ограничения задача (2) также имеет единственное решение. Оно может быть найдено многомерными оптимизационными методами.

Оценки параметров модели

Пусть инвестиционный период времени T_i зафиксирован. Тогда в модели два параметра: вектор ожидаемых доходностей акций за этот период и ожидаемая ковариационная матрица доходностей акций за этот период:

$$\bar{\mu}_i = (\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_n)^T, \quad V_i = \begin{pmatrix} v_{11}^2 & \dots & v_{1n}^2 \\ \dots & \dots & \dots \\ v_{n1}^2 & \dots & v_{nn}^2 \end{pmatrix}. \quad (3)$$

Оба эти параметра содержат много величин, подлежащих оценке. В работе рассматривается оценка этих величин по предыстории поведения временного ряда доходностей активов. Теперь следует определить процедуру использования данных.

Пусть $r_0^j, r_1^j, \dots, r_m^j$ – временной ряд дневных лог-доходностей акции под номером j . Пусть T_i будет промежутком времени продолжительностью $|T_i| = N$ дней. Эта величина представляет продолжительность горизонта прогноза. Текущим моментом времени считается $t_i = i$ день (полагается, что день закончился, и информация о доходности известна). Оценка величин (3) даётся в момент времени i по предыстории в k дней (то есть, по наблюдениям $r_{i-k+1}^j, \dots, r_{i-1}^j, r_i^j$) на горизонт продолжительностью N .

Таким образом, моделируемой и оцениваемой случайной величиной является доходность за период времени N . Величины (3) – это параметры распределения случайного вектора, взвешенной свёрткой которого и является доходность портфеля.

2. Решение задачи

Для решения задачи нахождения портфеля минимального риска при заданной его эффективности введем некоторые константы:

$$\alpha = \bar{I}^T V_i^{-1} \bar{I}, \quad \beta = \bar{\mu}_i^T V_i^{-1} \bar{I}, \quad \gamma = \bar{\mu}_i^T V_i^{-1} \bar{\mu}_i, \quad \delta = \alpha\gamma - \beta^2. \quad (4)$$

Положительность чисел α, γ следует из того, что для любой положительно определенной матрицы M и любого ненулевого вектора K число $K^T M K$ положительно. Для доказательства положительности числа δ в качестве вектора K рассмотрим ненулевой вектор $\alpha\bar{\mu} - \beta I$ (по предположению вектор эффективностей $\bar{\mu}$ не коллинеарен вектору I). Имеем

$$(\alpha\bar{\mu} - \beta I)^T V_i^{-1} (\alpha\bar{\mu} - \beta I) = \alpha^2\gamma - \alpha\beta^2 = \alpha\delta > 0,$$

поэтому $\delta > 0$.

Докажем, что оптимизационная задача (2) нахождения оптимального портфеля с целевой функцией $\bar{X}_i^T V_i \bar{X}_i \rightarrow \min$ при условиях $\mu_{p,i} = \bar{\mu}_i^T \bar{X}_i, \quad \bar{I}^T \bar{X}_i = 1, \quad \bar{X}_i \geq 0$ имеет единственное решение:

$$\bar{X}_i = V_i^{-1} (\lambda \bar{I} + v \bar{\mu}_i), \quad \lambda = \frac{\gamma - \beta \bar{\mu}_i}{\delta}, \quad v = \frac{\alpha \bar{\mu}_i - \beta}{\delta}. \quad (5)$$

Чтобы найти явные формулы (5), воспользуемся методом множителей Лагранжа. Рассмотрим функцию Лагранжа для оптимизационной задачи (2):

$$L(\bar{X}_i, \lambda, v) = \bar{X}_i^T V_i \bar{X}_i + \lambda(1 - \bar{I}^T \bar{X}_i) + v(\mu_{p,i} - \bar{\mu}_i^T \bar{X}_i).$$

Для удобства запишем в следующем виде:

$$L(X, \lambda, v) = X^T V X + \lambda(1 - I^T X) + v(\mu - \bar{\mu}^T X). \quad (6)$$

Приравняв нулю производные по X, λ, v , получим систему из трех уравнений:

$$\begin{cases} VX = \lambda I + v \bar{\mu}, \\ I^T X = 1, \\ \bar{\mu}^T X = \mu. \end{cases} \quad (7)$$

Выразим неизвестное X из первого уравнения

$$X = V^{-1}(\lambda I + v \bar{\mu}) \quad (8)$$

и подставим во второе и третье уравнения системы

$$\begin{cases} \alpha\lambda + \beta v = 1, \\ \beta\lambda + \gamma v = \mu. \end{cases} \quad (9)$$

Определитель системы (9) $\delta \neq 0$ (доказано выше, что $\delta > 0$), поэтому система имеет единственное решение, что, с учетом (8), дает решение оптимизационной задачи (2):

$$X = V^{-1} \left(\frac{\gamma - \beta \mu}{\delta} I + \frac{\alpha \mu - \beta \bar{\mu}}{\delta} \right). \quad (10)$$

Для каждого значения ожидаемой доходности μ имеется единственный портфель X , обеспечивающий минимальное значение риска σ , т.е. определена функция $\sigma = \sigma(\mu)$, график которой называют минимальной границей.

3. Идентификация на основе авторегрессионных моделей

Доходности акций, в нашем случае для удобства используем лог-доходность, аппроксимируемую процессом авторегрессии.

Пусть финансовый процесс $\{h_n\}$ описывается уравнением в конечных разностях порядка p :

$$h_n = a_0 + a_1 h_{n-1} + a_2 h_{n-2} + \dots + a_p h_{n-p} + \sigma \varepsilon_n \quad (11)$$

Величины $\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n, \dots$ — последовательность независимых стандартных нормально распределённых случайных величин, $\varepsilon_n \sim N(0,1)$, моделирующих «случайность», «неопределённость» в рассматриваемой модели. При подгонке авторегрессионной модели к реальным данным требуется оценить параметры модели. Если порядок модели не выбран, то он включается в число неизвестных параметров, подлежащих оцениванию. Для определения порядка используются информационные критерии Акаике, Шварца и Хеннана-Куинна. Работоспособность этих критериев проверялась при построении модели доходности акций таких компаний как ОАО «Роснефть», ОАО «Лукойл», ОАО «Газпром», ОАО «Сургутнефтегаз», которые будут формировать инвестиционные портфели.

Предположим, что процесс X_t может быть аппроксимирован моделью $AR(k)$, которая описывается уравнением:

$$\sum_{j=0}^k a_{kj} (X_{t-j} - \mu) = \varepsilon_t, \quad a_{k0} = 1$$

с неизвестным истинным порядком k .

Для определения k долгое время использовался информационный критерий Акаике. Согласно этому критерию, среди альтернативных значений k выбирается значение, минимизирующее величину

$$AIC(k) = \ln \hat{\sigma}_k^2 + \frac{2k}{T}, \quad (12)$$

где T — количество наблюдений, k — количество параметров, $\hat{\sigma}_k^2$ — оценка дисперсии шума ε_t .

Получим выборочные оценки для ε_t :

$$\hat{\varepsilon}_t = \sum_{j=0}^k \hat{a}_{kj} (x_{t-j} - \bar{x}),$$

по этим оценкам строим выборочную оценку дисперсии шумов $\hat{\sigma}_k^2$ по формуле:

$$\hat{\sigma}_k^2 = \frac{1}{T} \sum_{t=1}^T \hat{\varepsilon}_t^2.$$

Известно, что критерий Акаике склонен завышать порядок модели. Шварц предложил модификацию критерия Акаике вида:

$$SC(k) = \ln \hat{\sigma}_k^2 + k \frac{\ln T}{T}. \quad (13)$$

Завышению порядка при оценивании препятствует наличие второго слагаемого в правой части (13).

Несколько позже был предложен критерий Хеннана-Куинна:

$$HQ(k) = \ln \hat{\sigma}_k^2 + k \frac{\ln(\ln T)}{T}. \quad (14)$$

Этот критерий несколько ослабляет вес второго слагаемого в п.ч. (14) и приводит к более быстрой сходимости оценки порядка к истинному значению k_0 при $T \rightarrow \infty$. Однако, при небольших значениях T этот критерий недооценивает порядок авторегрессии, т.е. для малых выборок предпочтительнее использование критерия Шварца или Акаике.

Таким образом, было установлено, что лог-доходности акций нефтегазовых компаний ОАО «Роснефть», ОАО «Лукойл», ОАО «Газпром», ОАО «Сургутнефтегаз» подчиняются процессу авторегрессии первого порядка AR(1). После идентификации модели переходим к построению адаптивного прогноза цен акций, входящих в портфель ценных бумаг.

4. Процедура адаптивного прогноза на 1 шаг

Исходя из результатов оценивания порядка модели на основе информационных критериев, для прогнозирования используется авторегрессионная модель порядка $p = 1$, имеющая вид:

$$h_n = a_0 + a_1 h_{n-1} + \sigma \varepsilon_n, \quad (15)$$

где $\{h_n\}$ – процесс, описывающий лог-доходность, т.е.

$$h_n = \ln \left(\frac{S_n}{S_{n-1}} \right). \quad (16)$$

Прогнозное значение цены акции на следующий день $\hat{S}_{n+1}$ по имеющимся ценам за предыдущие дни, определяется по формуле:

$$\hat{S}_{n+1} = S_n e^{\hat{h}_{n+1}}. \quad (17)$$

Проводится сравнение «реальных» и «прогнозных» значений, вычисляются ошибки аппроксимации.

Заключение

Согласно теории портфеля Марковица при одинаковой доходности акций стоит выбирать актив с меньшей волатильностью (чем ниже волатильность, тем ниже риск). Таким образом, при формировании инвестиционного портфеля, выбираются акции, у которых волатильность меньше, затем решается оптимизационная задача нахождения портфеля минимального риска при заданной его эффективности, определяются доли входящих в портфель акций. Финальный этап заключается в построении адаптивного прогноза цен акций, на основе которого находятся волатильности доходности акций на одну неделю. Результаты прогноза сравниваются с реальными значениями за этот же день. Для построения прогноза на весь указанный период каждый день использовались реальные данные о предыдущем дне.

Результаты численного моделирования и графическая иллюстрация приводятся в докладе.

ЛИТЕРАТУРА

1. Ширяев А. Н. Основы стохастической финансовой математики. – М. : Фазис, 1998. – Т. 1 : Факты. Модели. 512 с.
2. Шарп У., Александр Г., Бейли Дж. Инвестиции / пер. с англ. – М. : ИНФРА-М, 2012. – XII, 1028 с.
3. Andersen T. G., Bollerslev T., Diebold F. X., Labys P. Modeling and Forecasting Realized Volatility // Econometrica. – 2003. – Vol. 71(1). – С. 3–29.
4. Брусов П. Н., Филатова Т. В. Финансовый менеджмент. Инвестиции. – М. : Кнорус, 2013.
5. Markowitz H. Portfolio selection. Journal of Finance, 8:77–91, 1952.
6. Markowitz H. Portfolio Selection: Efficient Diversification of Investments. John Wiley and Sons (Basil Blackwell, 1991), 1959.