УДК 512.623

Г.Г. Пестов, Е.А. Фомина

О СЕЧЕНИЯХ В БАЗЕ 2-УПОРЯДОЧЕННОГО ПОЛЯ

Рассматриваются свойства сечений в базе двумерно упорядоченного поля. Получено уравнение, характеризующее такие сечения, и сформулированы некоторые следствия.

Две функции в 2-упорядоченном поле

Пусть в $\left\langle P, P^u \right\rangle$ нет бесконечно малых (следовательно, и бесконечно больших [1], лемма 5.3.18). Обозначим через $\widetilde{P}_0$ непрерывное замыкание поля P_0. Пусть $(a_\tau)_{\tau<\alpha}$ есть последовательность элементов базы, сходящаяся к $a \notin P_0$. Тогда ([1], теорема 6.3.4.), *a* бесконечно близок к базе P_0. Фундаментальная последовательность элементов линейно упорядоченного поля P_0 включает эквивалентную монотонную подпоследовательность. Будем считать, что последовательность $(a_\tau)_{\tau<\alpha}$ – монотонно возрастающая.

Определение 1.1. Пусть $x \in P_0[a]$. Положим

$$\psi_a^-(a) = \{r \in P_0 \,|\, ra <_u x\},\ \psi_a^+(a) = \{r \in P_0 \,|\, x <_u ra\}.$$

Если ($\psi_a^-(x), \psi_a^+(x)$) есть фундаментальное сечение в P_0, то элемент из $\widetilde{P}_0$, который производит это сечение, обозначим через $\psi_a(x)$. Пусть для определённости $a \in \overset{o}{P^u} \bigcap P^r$.

Определение 1.2. Пусть $x \in P_0[a]$. Положим

$$\varphi^-(x) = \{r \in P_0 \,|\, r < x\},\ \varphi^+(x) = \{r \in P_0 \,|\, x < r\}.$$

Если ($\varphi^-(x), \varphi^+(x)$) есть фундаментальное сечение в P_0, то элемент из $\tilde{P}_0$, который производит это сечение, обозначим через $\varphi(x)$.

По определению φ имеем

$$\varphi^-(a) = \{r \in P_0 \,|\, r < a\},\ \varphi^+(a) = \{r \in P_0 \,|\, a < r\}.$$

Так как последовательность $(a_\tau)_{\tau<\alpha}$ фундаментальная и возрастающая в P_0, то сечение ($\varphi^-(a), \varphi^+(a)$) фундаментально в P_0, следовательно, значение $\varphi(a)$ определено.

При любом фиксированном натуральном *n* последовательность (a_r^n) фундаментальна, монотонна и сходится к a^n. Следовательно, сечение ($\varphi^-(a^n), \varphi^+(a^n)$) фундаментально в P_0. Поэтому $\varphi(a^n)$ определено.

Лемма 1.1. $\varphi(a^n) = \varphi^n(a)$.

Доказательство следует немедленно из определения фундаментального сечения в линейно упорядоченном поле.

Далее, очевидно, что φ – линейная функция,

$$\varphi\left(\sum_{k=0}^{n} \lambda_k a^k\right) = \sum_{k=0}^{n} \lambda_k \varphi(a)^k .$$

Итак, функция φ определена всюду на $P_0[a]$.

Основное уравнение

Теорема 2.1. Для каждого бесконечно близкого к базе P_0 элемента $a \in P$ выполнено равенство

$$\psi_a(a^m) = m\varphi(a^{m-1}) = m\varphi^{m-1}(a).$$

Доказательство. В [1] доказано включение

$$m(\varphi^-(a))^{m-1} \subset \psi_a^-(a^m). \qquad (1)$$

Докажем включение

$$m(\varphi^+(a))^{m-1} \subset \psi_a^+(a^m). \qquad (2)$$

Пусть $a > 0$. Пусть $0 < r_0 < r < a < s$, где

$$r\_0, r, s \in P_0^+,\ a \in \overset{o}{P^u}.$$

Имеем

$$a^m = (s-(s-a))^m =$$
$$= s^m - m(s-a)s^{m-1} + C_m^2(s-a)^2 s^{m-2} \ldots (-1)^m (s-a)^m,$$
$$a^m = s^m + mas^{m-1} - ms^m + C_m^2(s-a)^2 s^{m-2} \ldots (-1)^m (s-a)^m.$$

Обозначим

$$\Delta(s) = [(C_m^2(s-a)^2 s^{m-2} - C_m^3(s-a)^3 s^{m-3}) + \ldots +$$
$$+ (C_m^{m-1}(s-a)^{m-1}s - (s-a)^m)]$$

для нечётного *m* и

$$\Delta(s) = [(C_m^2(s-a)^2 s^{m-2} - C_m^3(s-a)^3 s^{m-3}) + \ldots +$$
$$+ (C_m^{m-2}(s-a)^{m-2}s^2 - C_m^{m-1}(s-a)^{m-1}s) + (s-a)^m]$$

для чётного *m*.

Покажем, что $\Delta(s) \in -\overset{o}{P^u}$. Для этого достаточно показать, что каждая разность в круглых скобках и элемент $(s-a)^m$ (случай чётного *m*) принадлежит $-\overset{o}{P^u}$. Элемент $(s-a)^m \in -\overset{o}{P^u}$ в силу теоремы об элементах, бесконечно близких к базе [3]. Рассмотрим произвольную разность.

$$(C_m^k(s-a)^k s^{m-k} - C_m^{k+1}(s-a)^{k+1} s^{m-k-1}) =$$
$$= C_m^{k+1}(s-a)^k s^{m-k-1}\left(\frac{C_m^k}{C_m^{k+1}} s - (s-a)\right).$$

Далее нам понадобится

Лемма 2.2. Пусть α – бесконечно близкий к базе элемент, $\alpha \in -\overset{o}{P^u}$, $0 < \alpha < \varepsilon/2$, где $\varepsilon \in P_0^+$. Тогда $\forall k \in N\ \ \alpha^k(\varepsilon - \alpha) \in -\overset{o}{P^u}$.

Доказательство. 1) Пусть сначала $k = 1$.

Имеем $(\frac{\varepsilon}{2} - \alpha) \in \overset{o}{P^u} \bigcap P^r$, т.к. α – бесконечно близкий к базе элемент, то и

$$(\frac{\varepsilon}{2}-\alpha)^2 \in \overset{o}{P^u}\bigcap P^r \Rightarrow -\varepsilon\alpha+\alpha^2 \in \overset{o}{P^u}\bigcap P^r \Rightarrow$$

$$a(\varepsilon-a) \in -\overset{o}{P^u}\bigcap P^r .$$

2) Определим отношение частичного порядка: $\dot{\succ}$ на $-\overset{o}{P^u}$. Пусть $\alpha,\beta \in -\overset{o}{P^u}$. Положим

$$\beta \dot{\succ} \alpha \Leftrightarrow \beta\alpha^{-1} \in -\overset{o}{P^u} .$$

Можно показать, что это отношение антирефлексивно, антисимметрично и транзитивно. Имеем

$$a(\varepsilon-a) \in -\overset{o}{P^u} \Rightarrow a \dot{\succ} (\varepsilon-a)^{-1}$$

$$a^k \dot{\succ} a \dot{\succ} (\varepsilon-a)^{-1} \Rightarrow a^k \dot{\succ} (\varepsilon-a)^{-1} \Rightarrow a^k(\varepsilon-a) \in -\overset{o}{P^u} .$$

Лемма доказана.

Обозначим $\mu = \min\left\{\frac{r_0 C_m^k}{C_m^{k+1}}, 2 \le k \le m-1\right\}$.

Так как a производит фундаментальное сечение в P_0, то $s \in P_0$ можно выбрать так, чтобы $0 < s-a < \frac{\mu}{2}$, а значит, $s-a < \frac{r_0 C_m^k}{2C_m^{k+1}} < \frac{sC_m^k}{C_m^{k+1}}$ при любом $2 \le k \le m-1$.

Теперь условия леммы выполнены, следовательно, каждая скобка принимает вид

$$(C_m^k(s-a)^k s^{m-k} - C_m^{k+1}(s-a)^{k+1} s^{m-k-1}) =$$
$$= C_m^{k+1}(s-a)^k s^{m-k-1}(\frac{C_m^k}{C_m^{k+1}}s-(s-a)) =$$
$$= -q_k(s-a)^k(\varepsilon_k-(s-a)) \in -\overset{o}{P^u},$$

где $q_k = C_m^{k+1}s^{m-k-1} \in P_0, q_k > 0$, $\varepsilon_k = \frac{C_m^k}{C_m^{k+1}}s$, $0 < s-a < \mu/2$.

Так как нижний открытый конус $-\overset{o}{P^u}$ замкнут относительно сложения, то $\Delta(s) \in -\overset{o}{P^u}$.

Итак, $a^m \in \overset{o}{P^u}$, $a^m = s^m + mas^{m-1} - ms^m + \Delta(s)$.

Так как $s^m - ms^m \in P_0$, то $a^m <_u ms^{m-1}a$. Следовательно, $ms^{m-1} \in \psi_a^+(a^m)$.

Это включение получается для каждого $s \in \varphi^+(a)$. Значит, $m(\varphi^+(a))^{m-1} \subset \psi_a^+(a^m)$. Итак,

$$m(\varphi(a))^{m-1} = \psi_a(a^m) .$$

Докажем, что сечение $(\psi_a^-(a^n), \psi_a^+(a^n))$ фундаментально в P_0.

Пусть $\delta \in P_0$, $\delta > 0$. Убедимся, что существует такое $r \in P_0^+$, что для всех натуральных n $1 < n \le m$:

$$(a-r)^{n+1} <_u \delta(a-r)^n . \tag{3}$$

Имеем

$$(a-r)^{n+1} - \delta(a-r)^n = (a-r)^n(a-r-\delta).$$

Выберем $r > 0$, $r < a$ так, чтобы $(a-r) < \delta/2$. Поскольку a бесконечно близко к базе P_0, $a \in \overset{o}{P^u}$, то и (a–r) бесконечно близко к P_0 и для каждого натурального n:

$$(a-r)^n \in \overset{o}{P^u}\bigcap P^r .$$

Обозначим $b = a - r$. Теперь $b < \delta/2$. По лемме 6.3.3. [1] для всех натуральных $n > 0$ выполнено

$$b^n(\delta-a) >_u 0 \Rightarrow$$
$$(a-r)^n(\delta-a) >_u 0 \text{ и } (a-r)^n >_u 0 \Rightarrow r(a-r)^n >_u 0 \Rightarrow$$
$$((a-r)^n(\delta-a) >_u 0) + (r(a-r)^n >_u 0) \Rightarrow$$
$$(a-r)^n(\delta-a+r) >_u 0,$$

или

$$(a-r)^n(\delta-(a-r)) >_u 0 .$$

Отсюда

$$(a-r)^n\delta >_u (a-r)^{n+1} >_u 0 .$$

Итак, формула (3) доказана. Из (3) находим

$$(a-r)^2 <_u \delta(a-r),$$

откуда

$$(a-r)^2 <_u \delta a.$$

Далее

$$(a-r)^3 <_u \delta(a-r)^2 <_u \delta^2 a.$$
$$\dots\dots\dots$$
$$(a-r)^m <_u \delta^{m-1}a.$$

Итак,

$$(a-r)^{n+1} <_u \delta^n a. \tag{4}$$

В равенстве

$$a^n = r^n + n(a-r)r^{n-1} + \dots + (a-r)^n$$

заменим слагаемые в правой части, используя неравенства (4). Получим

$$a^n <_u nr^{n-1}a + \delta C_n^2 r^{n-2}a + \dots + \delta^{n-1}a. \tag{5}$$

Пусть $\varepsilon \in P_0^+$.

Выберем $\delta \in P_0$ так, чтобы выполнялось неравенство

$$\delta C_n^2 r^{n-2} + \dots + \delta^{n-1} < \varepsilon.$$

Соответственно, выберем $r_1 \in P_0^+$ так, чтобы

$$r \le r_1 < a,\ a-r_1-\delta < 0$$
$$\text{или } a > r_1 > a-\delta .$$

Тогда из (5), учитывая неравенство $r \le r_1$, получим

$$a^n <_u a(nr_1^{n-1}+\varepsilon).$$

Это значит, что

$$(nr_1^{n-1}+\varepsilon) \in \psi_a^+(a^n), \tag{6}$$

где

$$nr_1^{n-1} \in \psi_a^-(a^n). \tag{7}$$

Итак, для каждого ε > 0 существует такое $r_1 <_u a$, $r_1 \in P_0$, что выполнены отношения (6), (7).

Но это означает, что сечение ($\psi_a^-(a^n), \psi_a^+(a^n)$) фундаментально в P_0, и значит, определено значение $\psi_a(a^n)$.

Далее

$$\psi_a^-(a^n) = n(\varphi^-)^{n-1}(a) = n(\varphi^-(a^{n-1})),$$

$$\psi_a^+(a^n) = n(\varphi^+)^{n-1}(a) = n(\varphi^+(a^{n-1})),$$

т.е.

$$\psi_a(a^n) = n\varphi^{n-1}(a) = n\varphi(a^{n-1}).$$

Теорема доказана.

Очевидным следствием является следующая

Теорема 2.3. Пусть P есть 2-упорядоченное поле без бесконечно малых относительно базы P_0. Если $a \in P$ есть предел последовательности элементов базы $F(x) \in P_0[x]$, то имеет место равенство

$$\psi_a(F(a)) = F'(\varphi(a)) = \varphi(F'(a)).$$

ЛИТЕРАТУРА

1. *Пестов Г.Г.* Двумерно упорядоченные поля. Томск: Томский государственный университет, 2003. 128 с.
2. *Пестов Г.Г., Фомина Е.А.* О бесконечно близких к базе элементах // Вестник Томского государственного университета. 2007. № 297. С. 157–158.

Статья поступила в редакцию журнала 11 декабря 2006 г., принята к печати 18 декабря 2006 г.