УДК 519.873

В.Н. Губин, Г.Г. Пестов

ОБ ОДНОМ КЛАССЕ РЕЗЕРВИРУЕМЫХ УСТРОЙСТВ

Рассмотрены 3 модели резервированных устройств и исследованы их общие свойства с использованием сигма-оператора.

Ключевые слова: *резервирование*, *система*, *надёжность*, *стратегия*, *среднее время безотказной работы*, *модель*, *критерий оптимизации*, *сигма-оператор*, *промежуток* K_0*-постоянства.*

Задача повышения надёжности сложных устройств остаётся актуальной, несмотря на прогресс в технологии изготовления элементов систем. Прогресс в повышении надёжности элементов систем компенсируется растущим усложнением структуры и возрастающими требованиями к надёжности систем. Среди моделей с управляемым резервом, рассмотренных в работах Райкина [1], Герцбаха [2], Томиленко [3], Ушаковой – Пестова [4], можно выделить один класс систем с управляемым резервом. Задача, аналогичная данной, решалась другими методами в работах [5–7].

Далее мы дадим описание систем этого класса. Время в системе дискретно и может принимать значения, кратные некоторой положительной константе Δ: Δ, 2Δ, 3Δ,… . В каждый из этих моментов времени производится проверка исправности всех включённых в работу элементов и принимается решение о том, какое количество исправных элементов следует включить в работу. Исправные элементы в резерве (не включённые в работу) остаются исправными. Пусть состояние системы в данный момент времени полностью характеризуется набором параметров $(r,\boldsymbol{s})$, где r – количество исправных элементов в данный момент времени, как включённых, так и не включённых в работу, $\boldsymbol{s}$ – некоторый конечный вектор параметров системы, задаваемый в начале работы системы. В дальнейшем исследуются системы, у которых в процессе работы вектор параметров $\boldsymbol{s}$ не изменяется. Функцию $K(r,\boldsymbol{s})$, принимающую целые значения и такую, что для каждого натурального r выполнено неравенство $1 \le K(r,\boldsymbol{s}) \le r$, назовём *стратегией резервирования* системы. Поскольку вектор параметров $\boldsymbol{s}$ не изменяется в процессе работы системы, то в перечне аргументов различных функций мы будем его опускать. Например, вместо $K(r,\boldsymbol{s})$ всюду пишем $K(r)$. Система рассматривается на этапе нормальной работы, когда элементы не стареют (или почти не стареют).

Заметим, что через K (K прописное с индексами) будем обозначать стратегию резервирования, в отличие от k строчного, обозначающего целочисленную константу.

Функционал T, заданный на множестве пар (r,K) и принимающий неотрицательные значения, назовём *критерием оптимизации*. Таким образом, если задано количество r исправных элементов и стратегия K, то задано и значение критерия $T(r,K)$. Рассмотрим несколько моделей, где функционал T имеет уже конкретный смысл. В каждой из моделей, рассмотренных ниже, задан свой критерий оптимизации.

Модель $\boldsymbol{M_1}$. Система S_m функционирует на конечном промежутке $[1,n]$, где n – натуральное число. Система S_m функционирует исправно тогда и только тогда, когда количество включённых в работу исправных элементов не меньше чем m. Для вычисления характеристик системы ещё необходимо знать распределения вероятностей отказов элементов за один шаг, если в работу включено k исправных элементов. Обозначим через $f(k,i)$ вероятность следующего события: в работу включено k исправных элементов, из них за один шаг отказало ровно i. Будем считать функцию $f(k,i)$ известной. В качестве критерия оптимизации в модели $\boldsymbol{M_1}$ используем среднее время исправной работы системы. Обозначим через $T(r)$ математическое ожидание времени работы системы при стратегии, оптимальной по критерию среднего времени работы системы, если в начальный момент имеется ровно r исправных элементов. Через $T(k,r)$ обозначим математическое ожидание времени работы системы, если в начальный момент включено в работу k элементов, а в дальнейшем используется стратегия, оптимальная по критерию среднего времени работы системы. Из определения системы S_m следует, что $k \geq m$. По формуле полного математического ожидания [8] имеем

$$T(k,r) = \sum_{i=0}^{k-m} T(r-i)F(k,i)\,. \tag{a}$$

Рассмотрим максимум величины $T(k,r)$ по k. Этот максимум существует в силу конечности модели S_m. Очевидно, что $\max\limits_{k} T(k,r) = T(r)$.

Всюду в дальнейшем предполагаем, что исправные элементы в резерве остаются исправными, а каждый исправный элемент, включённый в работу, отказывает за один шаг с вероятностью $q = 1-p$, независимо от состояния других элементов, и остаётся исправным с вероятностью p . Итак, если в работу включено k элементов, то количество элементов, отказавших за один шаг, подчиняется биномиальному распределению. Значит, $F(k,i) = C_k^i p^{k-i} q^i$, и также

$$T(k,r) = \sum_{i=0}^{k-m} C_k^i p^{k-i} q^i T(r-i)\,. \tag{b}$$

Модель $\boldsymbol{M_2}$. Система функционирует на промежутке $[1,\infty)$. Как и в модели M_2, вводим характеристики системы: $T(k,r)$ – математическое ожидание времени работы системы, если в начальный момент включено в работу k элементов, а в дальнейшем используется стратегия, оптимальная по критерию среднего времени работы системы; обозначим через $T(r)$ математическое ожидание времени работы системы при стратегии, оптимальной по критерию среднего времени работы системы, если в начальный момент имеется ровно r исправных элементов. По формуле полного математического ожидания [8] имеем

$$T(k,r) = \sum_{i=0}^{k-m} C_k^i p^{k-i} q^i T(r-i)\,. \tag{c}$$

Модель $\boldsymbol{M_3}$. Пусть система функционирует на промежутке $[1, n]$, где n – натуральное число. Пусть K есть стратегия резервирования. Иначе, K есть функция, заданная на множестве натуральных чисел N, такая, что для каждого r из N величина $K(r)$ есть количество исправных элементов, которые следует включить в работу, если количество исправных элементов равно r. Обозначим через $T(K,r)$ вероятность того, что система не откажет на $[1,n]$ при стратегии K, если в начальный момент имеется r исправных элементов. Как и раньше, будем считать известной функцию $f(k,l)$ – вероятность такого события: если в работу включено k исправных элементов, то из них за один шаг отказало ровно l. Обозначим через $T(r)$ математическое ожидание времени исправной работы системы при стратегии, оптимальной по времени работы системы, если в начальный момент имеется r исправных элементов.

По формуле полной вероятности имеем

$$T(k,r)=\sum_{i=0}^{k-m} C_k^i p^{k-i} q^i T(r-i)\,. \qquad (\mathrm{d})$$

В каждой модели стратегию, обеспечивающую максимум заданного в этой модели критерия оптимизации, назовём **оптимальной стратегией** (подробнее: стратегией, оптимальной по заданному критерию). Оптимальную стратегию обозначим через K_0. Естественно, в различных моделях различны и оптимальные стратегии.

1. Некоторые свойства функций *T*(*r*), *T*(*r*,*k*)

В моделях резервированных систем M_1, M_2, M_3 величины $T(r)$, $T(r,k)$ имеют различный смысл. Тем не менее для них выполнены следующие общие свойства:

1) По физическому смыслу $T(r) > 0$, $T(r)$ возрастает с ростом r.

2) Экспериментальные данные приводят к гипотезе: если $K_0(r)$ постоянна на некотором промежутке $[r_1,r_2]$ и $p>0{,}5$, то имеет место неравенство

$$T(r+2)-T(r+1) \le T(r+1)-T(r) \qquad (1)$$

или

$$T(r+2)-2T(r+1)+T(r) \le 0\,, \qquad (2)$$

$$r\in[r_1, r_2-2]\,.$$

Геометрически (1) означает, что график функции $T(r)$ – выпуклый.

С физической стороны неравенство (2) означает, что скорость роста показателя качества уменьшается с ростом r.

3) В каждой из моделей M_1, M_2, M_3 введём оператор σ на множестве функций $\{T(r)\}$ следующим образом. Для каждого положительного r положим по определению $\sigma T(r+1)=T(r)$. Далее оператор σ продолжаем как линейный оператор на множество функций вида $\sum_{i=0}^{m} a_i T(r+b_i)$, где a_i, b_i – вещественные константы.

Таким образом, $\sigma\sum_{i=0}^{m} a_i T(r+b_i)=\sum_{i=0}^{m} a_i T(r+b_i-1)$.

В частности, $\sigma\, T(k,r)=\sum_{i=0}^{k-m} C_k^i p^{k-i} q^i T(r-i-1)=T(k,r-1)$.

Итак, при $r>1$ имеем

$$\sigma T(k,r)=T(k,r-1)\,.$$

Запишем свойство 2) с помощью оператора σ:

$$(\sigma-1)^2 T(r+2)\le 0\,. \qquad (1.1)$$

4) Так как $T(r)$ строго возрастает, то из 2) следует $\dfrac{T(r+2)}{T(r+1)}<\dfrac{T(r+1)}{T(r)}$.

Итак, функция $T(r+1)/T(r)$ строго убывает с ростом r. Данное свойство в частном случае доказано в [4].

5) Из свойства 4) непосредственно следует, что функция $\ln T(r)$ выпукла.

6) Так как $T(r+1)/T(r)$ >1, строго убывает с ростом r , то по теореме Больцано – Вейерштрасса существует $\lim\limits_{r\to\infty} T(r+1)/T(r)$. Обозначим этот предел через l .

Докажем, что этот предел равен 1.

Теорема. При $r \to \infty$ имеет место соотношение $T(r+1)/T(r) \to 1$.

***Доказательство*:**

По теореме возможны два случая:

1) $k_0(r+1) = k_0(r) = k$.

Тогда, используя сигма-оператор, получим

$$T(k,r+1) - T(k,r) \le T(k,r+1) - T(k-1,r) = [(p+q\sigma)^{k-1}(p+q\sigma-\sigma)]T(r+1)$$

$$-(q\sigma)^{k-1}(q\sigma-\sigma)T(r+1) = p(p+q\sigma)^{k-1}(1-\sigma)T(r+1)+p(q\sigma)^{k-1}T(r) =$$

$$= p(p+q\sigma)^{k-1}T(r+1) - p(q\sigma)^{k-1}T(r+1)+p(q\sigma)^{k-1}T(r+1) - p(p+q\sigma)^{k-1}T(r)+p(q\sigma)^{k-1}T(r) =$$

$$= p(T(k-1,r+1)-T(k-1,r)+q^{k-1}T(r-k+2)).$$

Имеем $T(k,r+1) - T(k,r) \le p(T(k-1,r+1)-T(k-1,r)+q^{k-1}T(r-k+2))$.

Продолжая неравенство, имеем

$$T(k,r+1) - T(k,r) \le p^2(T(k-2,r+1)-T(k-2,r)+q^{k-2}T(r-k+3))+pq^{k-1}T(r-k+2)) \le \ldots$$

$$\le pq^{k-1}T(r+1-(k-1))+p^2q^{k-2}T(r+1-(k-2))+\ldots+p^{k-1}qT(r)+p^{k-1}(T(1,r+1)-T(1,r))$$

$$\le (pq^{k-1}+p^2q^{k-2}+\ldots+p^{k-1}q)T(r) = pq(p^{k-1}-q^{k-1})/(p-q) \to 0 ,$$

при $r\to\infty$ по лемме 1.

2) $k_0(r) = k$, $k_0(r+1) = k+1$.

Доказательство проводится аналогично.

2. Возрастание $k_0(r)$ с ростом r

Обозначим через S_m модель, в которой система исправна, если и только если в работу включено не менее m исправных элементов.

Рассмотрим разность

$$T_m(k+1,r) - T_m(k,r) = \sum_{i=0}^{k-m+1} C_{k+1}^i p^{k+1-i} q^i T_m(r-i) - \sum_{i=0}^{k-m} C_k^i p^{k-i} q^i T_m(r-i) .$$

Воспользуемся свойством биномиальных коэффициентов:

$$C_{k+1}^i = C_k^i + C_k^{i-1},$$

$$T_m(k+1,r) - T_m(k,r) =$$

$$= \sum_{i=0}^{k-m+1} C_k^i p^{k+1-i} q^i T_m(r-i) + \sum_{i=1}^{k-m+1} C_k^{i-1} p^{k+1-i} q^i T_m(r-i) - \sum_{i=0}^{k-m} C_k^i p^{k-i} q^i T_m(r-i) =$$

$$= \sum_{i=0}^{k-m+1} C_k^i p^{k+1-i} q^i T_m(r-i) + \sum_{i=1}^{k-m+1} C_k^{i-1} p^{k+1-i} q^i T_m(r-i) - \sum_{i=0}^{k-m} C_k^i p^{k-i} q^i T_m(r-i) =$$

$$= -q\sum_{i=0}^{k-m} C_k^i p^{k-i} q^i T_m(r-i) + q\sum_{i=0}^{k-m} C_k^i p^{k-i} q^i T_m(r-i-1) + C_k^{k+1-m} p^m q^{k+1-m} T_m(r-k+m-1) =$$

$$= q(T_m(k,r-1) - T_m(k,r)) + C_k^{k+1-m} p^m q^{k+1-m} T_m(r-k-i-1).$$

Окончательно получаем

$$T_m(k+1,r)-T_m(k,r)=q(\sigma-1)T_m(k,r)+C_k^{k+1-m}p^m q^{k+1-m}T_m(r-k-i-1)\,. \quad (2.1)$$

Так как в выражении (2.1) разность $T_m(k,r-1)-T_m(k,r)$ возрастает с ростом r, то и $T_m(k+1,r)-T_m(k,r)$ возрастает при увеличении r.

Докажем теперь, что $k_0(r)$ возрастает с увеличением параметра r.

Пусть $T_m(k,r)$ достигает максимума при $k = k_0(r)$. Тогда

$$T_m(k_0(r),r) - T_m(k_0(r)-1,r) \geq 0.$$

Отсюда в силу предыдущего свойства получаем, что

$$T_m(k_0(r),r+1) - T_m(k_0(r)-1,r+1) \geq 0.$$

Значит, $k_0(r+1) \geq k_0(r)$, то есть, $k_0(r+1) \geq k_0(r)$. Итак, в модели S_m функция $k_0(r)$ возрастает (нестрого) с ростом r.

3. Выпуклость $T(k,r)$ по k в S_m

Теорема: При $p \geq \dfrac{k}{2k-m+1}$ функция $T_m(k,r)$ для системы S_m имеет не более двух максимумов при фиксированном r, причем она выпукла вверх по k в области $m \leq k \leq k_0^m(r)+1$ и не возрастает при $k_0^m(r) < k \leq r$.

***Доказательство*:**

Воспользуемся соотношением (2.1):

$$T(k+1,r)-T(k,r)=q(\sigma-1)T(k,r)+C_k^{k+1-m}p^m q^{k+1-m}T(r-k-1+m)\,.$$

Преобразуем с помощью него следующую разность:

$$\begin{aligned}
&[T(k+1,r)-T(k,r)]-p[T(k,r)-T(k-1,r)]=\\
&=q(\sigma-1)T(k,r)+C_k^{k+1-m}p^m q^{k+1-m}T(r-k-1+m)-pq(\sigma-1)T(k-1,r)-\\
&-pC_{k-1}^{k-m}p^m q^{k-m}T(r-k+m)=q(\sigma-1)[T(k,r)-pT(k-1,r)]+\\
&+C_k^{k+1-m}p^m q^{k+1-m}T(r-k-1+m)-pC_{k-1}^{k-m}p^m q^{k-m}T(r-k+m).
\end{aligned}$$

Упростим выражение в квадратных скобках:

$$\begin{aligned}
T(k,r)-pT(k-1,r)&=\sum_{i=0}^{k-m}C_k^i p^{k-i}q^i T(r-i)-p\sum_{i=0}^{k-m-1}C_{k-1}^i p^{k-i-1}q^i T(r-i)=\\
&=\sum_{i=0}^{k-m}C_{k-1}^i p^{k-i}q^i T(r-i)+\sum_{i=1}^{k-m}C_{k-1}^{i-1}p^{k-i}q^i T(r-i)-\sum_{i=0}^{k-m-1}C_{k-1}^i p^{k-i}q^i T(r-i)=\\
&=\sum_{j=0}^{k-m-1}C_{k-1}^j p^{k-j-1}q^{j+1}T(r-j-1)+C_{k-1}^{k-m}p^m q^{k-m}T(r-k+m)=\\
&=qT(k-1,r-1)+C_{k-1}^{k-m}p^m q^{k-m}T(r-k+m).
\end{aligned}$$

Окончательно получаем

$$\begin{aligned}
&[T(k+1,r)-T(k,r)]-p[T(k,r)-T(k-1,r)]=\\
&=q(\sigma-1)[qT(k-1,r-1)+C_{k-1}^{k-m}p^m q^{k-m}T(r-k+m)]+\\
&+C_k^{k+1-m}p^m q^{k+1-m}T(r-k-1+m)-pC_{k-1}^{k-m}p^m q^{k-m}T(r-k+m).
\end{aligned} \quad (3.1)$$

В (3.1) слагаемое $q(\sigma-1)[qT(k-1,r-1)+C_{k-1}^{k-m}p^m q^{k-m}T(r-k+m)] \leq 0$. Потребуем, чтобы $C_k^{k+1-m}p^m q^{k+1-m}-pC_{k-1}^{k-m}p^m q^{k-m} \leq 0$. Это выполнено тогда и только тогда, когда

$$k - p(2k - m + 1) \le 0 \text{ или } p \ge \frac{k}{2k - m + 1}.$$

Таким образом, если $T(k,r) - T(k-1,r) > 0$ и $p \ge \frac{k}{2k-m+1}$, то выполнено

$$T(k+1,r) - T(k,r) \le p[T(k,r) - T(k-1,r)] \le T(k,r) - T(k-1,r). \quad (3.2)$$

Это значит, что функция $T(k,r)$ при фиксированном r выпукла по k на промежутке $m \le k \le k_0^m(r) + 1$, где $k_0^m(r)$ – значение параметра k, при котором функция $T(k,r)$ в системе S_m достигает максимума при фиксированном r. Также из (3.2) следует, что когда $T(k,r) - T(k-1,r) \le 0$, разность $T(k+1,r) - T(k,r) < 0$, а это означает, что при $k_0^m(r) < k \le r$ функция $T(k,r)$ убывает по k.

Свойство системы, состоящее в том, что при возрастании резерва на единицу оптимальное количество элементов, включаемых в работу, возрастает не более чем на 1, доказано в работе [1] для модели 3. Выкладки для моделей 1,2 аналогичны, поэтому в данной работе доказательство этого свойства опустим.

4. Поведение функции *T*(*r*) на скачках функции *K*₀(*r*)

Рассмотрим поведение функции $(\sigma - 1)^2 T(r)$ при тех r, где $K_0(r)$ возрастает на единицу. Так как $K_0(r) \le K_0(r+1) \le K_0(r)+1$, то возможны три случая:

1) $K_0(r-1) = k-1$, $K_0(r) = k$, $K_0(r+1) = k$.

2) $K_0(r-1) = k-1$, $K_0(r) = k-1$, $K_0(r+1) = k$.

3) $K_0(r-1) = k$, $K_0(r) = k$, $K_0(r+1) = k$.

В **случае 1** получаем

$$(\sigma - 1)^2 T(r+1) = T(k, r+1) - 2T(k,r) + T(k-1, r-1) =$$

$$= (p + q\sigma)^{k-1}(p + (q-2p)\sigma + (p-q)\sigma^2)T(r+1) - (q\sigma)^{k-1}(q\sigma + (p-q)\sigma^2)T(r+1).$$

Так как $\sigma T(r+1) = \alpha T(r+1)$, $\sigma^2 T(r+1) = \alpha\beta T(r+1)$, то в правой части имеем

$$(p + q\sigma)^{k-1}(p + (q-2p)\alpha + (p-q)\alpha\beta)T(r+1) - (q\sigma)^{k-1}(q\alpha + (p-q)\alpha\beta)T(r+1).$$

Оценим $\Delta_1 = p + (q-2p)\alpha + (p-q)\alpha\beta$, учитывая, что $\alpha > \beta$:

$$\Delta_1 = p + (q-2p)\alpha + (p-q)\alpha\beta = p(1-\alpha) + (q-p)\alpha(1-\beta) < (1-\alpha)(p + (q-p)\alpha).$$

Так как $\alpha \to 1$, то начиная с некоторого r, выполнено неравенство $1 - \alpha < q\alpha$. Тогда

$$\Delta_1 < 2q\alpha(1-\alpha) < 2q(1-\alpha).$$

Оценим

$$\Delta_2 = (q\alpha + (p-q)\alpha\beta)(q\sigma)^{k-1}T(r+1) > p\alpha\beta(q\sigma)^{k-1}T(r+1) > p^3(q\sigma)^{k-1}T(r+1).$$

Используя оценку $\sigma T(r+1) > pT(r+1)$, имеем

$$(\sigma - 1)^2 T(r+1) < [2q(1-\alpha) - p^{k+2}q^{k-1}]T(r+1). \quad (4.1)$$

Таким образом, если

$$2q(1-\alpha) < p^{k+2}q^{k-1}, \qquad (4.2),$$

то из неравенства (4.1) следует, что $(\sigma-1)^2 T(r+1) < 0$.

Неравенство (4.2) выполняется, начиная с некоторого $r = r_0$, в силу того, что величина $p^{k+2}q^{k-1}$ с ростом r либо не изменяется, либо уменьшается в pq раз.

Для дальнейшего удобно ввести следующие обозначения.

Определение. Через $\hat{r}_i$ обозначим значение r, при котором оптимальное значение $K_0(r)$ изменяется с i на $i+1$.

Изучение экспериментальных данных приводит к следующим предположениям:

1) Расстояние между соседними скачками $|\hat{r}_{i+1} - \hat{r}_i|$ увеличивается при возрастании i ;

2) функция $1-\alpha(\hat{r}_i)$ всё быстрее убывает при увеличении i.

Случай 2. Пусть $K_0(r-1) = k-1$, $K_0(r) = k-1$, $K_0(r+1) = k$. Тогда

$$(\sigma-1)^2 T(r+1) = T(k,r+1) - 2T(k-1,r) + T(k-1,r-1) =$$
$$= (p+q\sigma)^{k-1}(p-(1+p)\sigma+\sigma^2)T(r+1) + (q\sigma)^{k-1}((1+p)\sigma-\sigma^2)T(r+1) =$$
$$= [(p+q\sigma)^{k-1}(p-(1+p)\alpha+\alpha\beta) + (q\sigma)^{k-1}((1+p)\alpha-\alpha\beta)]T(r+1).$$

Оценим каждое из слагаемых в прямых скобках. Для первого имеем

$$(p-(1+p)\alpha+\alpha\beta)(p+q\sigma)^{k-1}T(r+1) = (p(1-\alpha)-\alpha(1-\beta))(p+q\sigma)^{k-1}T(r+1) >$$
$$> -\alpha(1-\beta)(p+q\sigma)^{k-1}T(r+1) > -(1-\beta)(p+q\sigma)^{k-1}T(r+1) > -(1-\beta)T(r+1).$$

Для второго слагаемого выполнено

$$(q\sigma)^{k-1}((1+p)\alpha-\alpha\beta)]T(r+1) = (q\sigma)^{k-1}((1-\beta)+p]T(r) >$$
$$> p(q\sigma)^{k-1}T(r) = pq^{k-1}\sigma^k T(r+1).$$

Воспользуемся неравенством: $\sigma^k T(r+1) > p^k T(r+1)$. Тогда

$$(\sigma-1)^2 T(r+1) > [p^{k+1}q^{k-1} - (1-\beta)]T(r+1). \qquad (4.3)$$

Первое слагаемое в квадратных скобках с ростом k уменьшается в pq раз, а второе – с возрастанием k всё быстрее стремится к нулю. Поэтому первое слагаемое, начиная с некоторого r, будет превосходить второе. Из неравенства (4.3) вытекает, что существует такое r_0, что при $r>r_0$ первое слагаемое больше второго и, следовательно, $(\sigma-1)^2 T(r+1)$ положительно.

Введем **определение**.

Назовем максимальный промежуток $[r_1, r_2]$, на котором функция $K_0(r)$ постоянна, промежутком K_0-постоянства.

Таким образом,

1) промежуток $[0,+\infty)$ разбивается на непересекающиеся промежутки K_0-постоянства;

2) при входе в очередной промежуток постоянства значение функции $(\sigma-1)^2 T(r+1)$ становится положительным;

3) внутри промежутка и на выходе из него функция $(\sigma-1)^2 T(r+1)$ остается отрицательной.

Случай 3 исследуется аналогично.

5. Алгоритм вычисления оптимальной стратегии резервирования

Построим алгоритм вычисления оптимальной стратегии резервирования по заданному критерию $T(r)$ в модели S_m с помощью метода динамического программирования Беллмана [9].

Для вычисления оптимальной стратегии будем использовать равенства (b),(c),(d).

1) Пусть количество исправных элементов r равно m. По построению S_m имеем $k_0(m) = m$.

Далее для каждой модели необходимо вычислить $T(m)$. В данной работе ограничимся вычислением $T(m)$ для модели 2.

В модели 2 система S_m работает на бесконечном промежутке и в качестве критерия выступает среднее время безотказной работы системы на бесконечном промежутке. Рассмотрим события вида A_{lm} = {система из m элементов проработала безотказно l шагов, а на следующем шаге отказала}:

$$P(A_{lm}) = p^{ml}(1-p^m)\,.$$

Тогда $T(m) = \sum_{l=1}^{\infty} lP(A_{lm}) == (1-p^m)\sum_{l=1}^{\infty} lp^{ml}$.

Переобозначим $p^m = x$. Используя почленное интегрирование ряда, вычисляем сумму

$$\sum_{l=1}^{\infty} lx^l = \frac{x}{(1-x)^2}\,.$$

Тогда выражение для $T(m)$ принимает вид

$$T(m) = \frac{p^m}{(1-p^m)}\,.$$

Замечательно, что дальнейшие вычисления для всех рассмотренных моделей производятся одинаково.

2) Имеем $T(k,r) = \sum_{i=0}^{k-m} C_k^i p^{k-i} q^i T(r-i) = p^k T(r) + \sum_{i=1}^{k-m} C_k^i p^{k-i} q^i T(r-i)$: (5.1)

a) Подставляя в (5.1) $k = k_0(r) = k_0$, получим

$$T(r) = p^{k_0} T(r) + \sum_{i=1}^{k_0-m} C_{k_0}^i p^{k_0-i} q^i T(r-i)\,,$$

откуда находим $$T(r) = \frac{1}{1-p^{k_0}} \sum_{i=1}^{k_0-m} C_{k_0}^i p^{k_0-i} q^i T(r-i)\,.$$

b) Подставим теперь в (5.1) значение $k_1 \neq k_0(r)$. Получим неравенство

$$T(r) \geq \mathrm{T}(k_1,r) = \frac{1}{1-p^{k_1}} \sum_{i=1}^{k_1-m} C_{k_1}^i p^{k_1-i} q^i T(r-i)\,.$$

Таким образом,

$$T(r) = \max \frac{1}{1-p^k} \sum_{i=1}^{k-m} C_k^i p^{k-i} q^i T(r-i)\,, \tag{5.2}$$

где максимум берётся по всем натуральным k, таким, что $k \geq m$.

Обозначим $f(k,r) = \dfrac{1}{1-p^k} \sum_{i=1}^{k-m} C_k^i p^{k-i} q^i T(r-i)$.

Пусть уже вычислены $k_0(m)$, $k_0(m+1)$, … $k_0(r-1)$, $T(m)$, $T(m+1)$, … , $T(r-1)$. Вычислим $k_0(r)$ и $T(r)$. Для этого вычисляем $f(k_0\,(r-1),r)$ и $f(k_0\,(r-1)+1,r)$.

Если $f(k_0(r-1),r) \geq f(k_0(r-1)+1,r)$, то полагаем

$$k_0(r) = k_0(r-1) \text{ и } T(r) = f(k_0\,(r-1),r).$$

Если же $f(k_0(r-1)+1,r) \geq f(k_0\,(r-1),r)$, полагаем

$$k_0(r) = k_0(r-1)+1, \text{ и } T(r) = f(k_0\,(r-1)+1,r).$$

ЛИТЕРАТУРА

1. *Райкин А.Л.* Элементы теории надёжности технических систем. М.: Сов. радио, 1978.
2. *Герцбах И.Б.* Об оптимальном управлении включением резервных элементов // Изв. АН СССР. Техническая кибернетика. 1966. № 5.
3. *Томиленко В.А.* Об одной задаче динамического резервирования // Изв. АН СССР. Техническая кибернетика. 1975. № 4.
4. *Пестов Г.Г., Ушакова Л.В.* Исследование оптимальных стратегий в задаче динамического резервирования // Изв. АН СССР. Техническая кибернетика. 1973. № 5.
5. *Конев В.В.* Об оптимальном включении резервных элементов // Изв. АН СССР. Техническая кибернетика. 1974. № 4. С. 75–83.
6. *Конев В.В.* Об оптимальном программном включении резервных элементов // Изв. АН СССР. Техническая кибернетика. 1975. № 3. С. 109–117.
7. *Конев В.В., Овчинников А.В.* Оптимальное резервирование группы однотипных элементов // Изв. АН СССР. Техническая кибернетика. 1976. № 4. С. 75–84.
8. *Renyi A.* Wahrscheinlichkeitsrechnung. Berlin: VEB Deutscher Verlag der Wissenschaften, 1966.
9. *Беллман Р., Дрейфус С.* Прикладные задачи динамического программирования. М.: Наука, 1965. 458 с.

Статья поступила 03.06.2014 г.

Gubin V.N., *Pestov G.G.* ON A CLASS OF RESERVED DEVICES

In this paper, we consider three models of redundancy:
(1) By use of the mean time between system failures on a finite interval;
(2) By use of the mean time between system failures on a infinite interval;
(3) By use of the system reliability on a finite interval.
For all three models, the redundancy criterion has the following form:

$$T(k,r) = \sum_{i=0}^{k-m} C_k^i p^{k-i} q^i T(r-i). \tag{1}$$

Using the sigma-operator turns out to be an effective way for proving many properties of optimal strategies. Let $T(r) > 0$ and $T(r)$ increase.

The following properties are proved:

(1) If $p \geq \dfrac{k}{2k-m+1}$, then the function $T_m(k,r)$ for the system S_m has at most two maximums for a fixed r, it is convex on the interval $m \leq k \leq k_0^m(r)+1$ and nonincreasing on $k_0^m(r) < k \leq r$.

(2) Since $T(r+1)/T(r) > 1$ and strictly decreases, $\lim\limits_{r\to\infty} T(r+1)/T(r)$ exists by the Bolzano–Weierstrass theorem and this limit is equal to 1.

From convexity of the function $T(r)$, it is easy to prove that

(3) $\frac{T(r+2)}{T(r+1)} < \frac{T(r+1)}{T(r)}$.

Under more restrictive conditions, this inequality was obtained in the thesis of L.V. Ushakova.

(4) The function ln $T(r)$ is convex;

(5) $T(k+1,r)-T(k,r)$ increases with an increase in r.

To find the optimal strategy, a simplified algorithm is obtained using the properties. This algorithm is based on a modification of the Bellman dynamic programming method mentioned in V.V. Travkina's work. The essence of the algorithm is as follows.

(1) If there are m elements, then we have $k_0(m) = m$. For each model, $T(m)$ is calculated.

(2) All further calculations for the three models are similar. Then it is necessary to calculate the values of the function $T(r)$ ***by means*** of its previous values using the formula

$$T(k,r) = \frac{1}{1-p^k}\sum_{i=1}^{k-m} C_k^i p^{k-i} q^i T(r-i), \tag{2}$$

(3) Suppose that $k_0(m)$, $k_0(m+1),\ldots k_0(r-1)$, $T(m)$, $T(m+1)$, … , $T(r-1)$ have already calculated.

To find $k_0(r)$, we need to calculate $k_0(r-1)$ and $k_0(r-1)+1$. Then, using (2), we calculate $T(k_0(r-1), r)$ and $T(k_0(r-1), r)$ and compare them. If $T(k_0(r-1), r) \geq T(k_0(r-1)+1, r)$ then $k_0(r) = k_0(r-1)$ and $T(r) = T(k_0(r-1), r)$. If $T(k_0(r-1)+1, r) \geq T(k_0(r-1), r)$ then $k_0(r) = k_0(r-1)+1$, and $T(r) = T(k_0(r-1)+1, r)$.

Keywords: redundancy, system, reliability, strategy, mean time between failures, optimization criterion, model, sigma-operator, K_0-constancy interval.

Gubin Vladimir Nikolaevich (M.Sc., Tomsk State University,
Tomsk Polytechnic University, Tomsk, Russian Federation)
Email: vovantus@sibmail.com

Pestov German Gavrilovich (Doctor of Physics and Mathematics, Prof.,
Tomsk State University, Tomsk, Russian Federation)
Email: gpestov@mail.ru

REFERENCES

1. Raykin A.L. *Elementy teorii nadezhnosti tekhnicheskikh sistem*. Moscow, Sovetskoe radio Publ., 1978. (in Russian)
2. *Gertsbakh I.B.* Ob optimal'nom upravlenii vklyucheniem rezervnykh elementov (1966) *Izv. AN SSSR. Tekhnicheskaya kibernetika*, no. 5. (in Russian)
3. Tomilenko V.A. Ob odnoy zadache dinamicheskogo rezervirovaniya (1975) *Izv. AN SSSR. Tekhnicheskaya kibernetika*, no. 4. (in Russian)
4. Pestov G.G., Ushakova L.V. Issledovanie optimal'nykh strategiy v zadache dinamicheskogo rezervirovaniya (1973) *Izv. AN SSSR. Tekhnicheskaya kibernetika*, no. 5. (in Russian)
5. Konev V.V. Ob optimal'nom vklyuchenii rezervnykh elementov (1974) *Izv. AN SSSR. Tekhnicheskaya kibernetika*, no. 4, p. 75–83. (in Russian)
6. Konev V.V. Ob optimal'nom programmnom vklyuchenii rezervnykh elementov (1975) *Izv. AN SSSR. Tekhnicheskaya kibernetika*, no. 3, pp. 109–117. (in Russian)
7. Konev V.V., Ovchinnikov A.V. Optimal'noe rezervirovanie gruppy odnotipnykh elementov (1976) *Izv. AN SSSR. Tekhnicheskaya kibernetika*, no. 4, p. 75–84. (in Russian)
8. Renyi A. *Wahrscheinlichkeitsrechnung*. Berlin, VEB Deutscher Verlag der Wissenschaften, 1966.
9. Bellman R., Dreyfus S. *Prikladnye zadachi dinamicheskogo programmirovaniya.* Moscow, Nauka Publ., 1965. 458 p. (in Russian)