

**ВОПРОСЫ
ГЕОМЕТРИЧЕСКОЙ
ТЕОРИИ
ФУНКЦИЙ**

Томск — 1977

ВОПРОСЫ ГЕОМЕТРИЧЕСКОЙ ТЕОРИИ ФУНКЦИЙ

Выпуск 8

ИЗДАТЕЛЬСТВО ТОМСКОГО УНИВЕРСИТЕТА

Томск — 1977

В сборнике представлены работы по различным вопросам геометрической теории функций комплексного переменного.

Сборник представляет интерес для научных работников в области теории функций.

Редакторы — профессор И. А. Александров,
доцент В. В. Черников.

О НЕКОТОРЫХ СВОЙСТВАХ РЕГУЛЯРНЫХ ОГРАНИЧЕННЫХ ФУНКЦИЙ

Е. С. ДЬЯКОВА

Пусть функция $f(z) = a_0 + a_1 z + \dots$ регулярна в круге $E = \{z: |z| < 1\}$ и $|f(z)| < M$ в E .

Пусть $f(E) = \{w: w = f(z), z \in E\}$ и $R = \sup_{K_f \in f(E)} \rho$, где $K_\rho = \{w: |w| = \rho\}$. Положим $R=0$, если таких ρ не существует.

В работе [1] с помощью принципа симметризации для функций с такими свойствами получена оценка

$$|a_1| \leq \frac{4(M - |a_0|)(M^2 + |a_0|R)(|a_0| + R)}{(M + R)^2(M + |a_0|)}. \quad (1)$$

Равенство имеет место для функции

$$f_0(z) = e^{i\varphi_0} F_M^{-1}(c F_1(z) + d), \quad (2)$$

где $\varphi_0 = \arg a_0$, $F_M(z) = \left(\frac{M + z}{M - z}\right)^2$,

$F_M^{-1}(w)$ — обратная к $F_M(z)$ функция.

$$d = \left(\frac{M - R}{M + R}\right)^2, \quad c = \frac{4(M^2 + |a_0|R)(|a_0| + R)M}{(M - |a_0|)^2(M + R)^2}.$$

Функция $f_0(z)$ отображает E на круг $|w| < M$ с радиальным разрезом от точки $-Me^{i\varphi_0}$ до точки $-Re^{i\varphi_0}$.

В данной работе с помощью неравенства (1) получены результаты типа теорем искажения и покрытия для регулярных и ограниченных функций.

Если в неравенстве (1) положить $a_0 = 0$, то оно примет вид

$$|a_1| \leq \frac{4 M^2 R}{(M + R)^2}, \quad (3)$$

а при $a_1 = 1$

$$1 \leq \frac{4 M^2 R}{(M + R)^2}. \quad (4)$$

Заметим, что неравенство (4) содержит в неявном виде известную теорему Г. Пика [2] о том, что при отображении круга E функцией класса S_M образ окружности $|z|=1$ находится в кольце

$$\frac{1}{\left(\sqrt{1-\frac{1}{M}+1}\right)^2} \leq |w| \leq M.$$

Действительно, если $f(z) \in S_M$, то $a_0=0$ и $a_1=1$. Кроме того, $f(E)$ — односвязная область, а значит, круг $|w| < R$, где $R = \sup_{K \in f(E)} \rho$ целиком покрывается областью $f(E)$.

Решая неравенство (4) относительно R при фиксированном M , получаем $R \geq R_0$, где

$$R_0 = M(2M-1) - 2M\sqrt{M(M-1)} = \frac{1}{\left(\sqrt{1-\frac{1}{M}+1}\right)^2}. \quad (5)$$

Из формулы (2) с учетом нормировки функций класса S_M получаем функции вида

$$f_\alpha(z) = e^{i\alpha} F_M^{-1} \left(\frac{1}{M} F_1(e^{-i\alpha} z) - \frac{1}{M} + 1 \right).$$

При каждом фиксированном α , $0 \leq \alpha \leq 2\pi$; функция $f_\alpha(z) \in S_M$ и точка $e^{i\alpha} R_0$ лежит на границе $f_\alpha(E)$.

Теорема. Пусть функция $f(z) = a_0 + a_1 z + \dots$ регулярна в E , и $|f(z)| < M$ в E . Тогда при $|z|=r$, $0 < r < 1$,

$$\frac{(M^2 + R|f(z)|)(R - |f(z)|)}{(M - |f(z)|)^2} \leq \frac{(M^2 + R|a_0|)(R - |a_0|)}{(M - |a_0|)^2} \left(\frac{1+r}{1-r} \right)^2, \quad (6)$$

$$|f'(z)| \leq \frac{4(M - |f(z)|)(M^2 + |f(z)| \cdot R)(|f(z)| + R)}{(M + R)^2(M + |f(z)|)(1-r^2)}, \quad (7)$$

$$|f'(z)| \leq \frac{4M^2(M^2 + R|a_0|)(R - |a_0|)}{(M + R)^2(M - |a_0|)^2} \cdot \frac{1+r}{(1-r)^3}, \quad (8)$$

где $R = \sup_{K \in f(E)} \rho$.

Оценки (6) и (7) точные.

Доказательство. Для функции $f(z)$ выполняется неравенство (1). Рассмотрим функцию ($z_0 \in E$)

$$\varphi(z) = f\left(\frac{z+z_0}{1+\bar{z}_0 z}\right) = f(z_0) + (1-|z_0|^2) f'(z_0) \cdot z + \dots,$$

регулярную в E . Так как $\varphi(E) = f(E)$, то для $\varphi(z)$ можно записать неравенство (1) с теми же значениями M и R .

$$(1-|z_0|^2) |f'(z_0)| \leq \frac{4(M - |f(z_0)|)(M^2 + |f(z_0)| \cdot R)(|f(z_0)| + R)}{(M + R)^2(M + |f(z_0)|)}.$$

Опуская индекс у z_0 , получаем неравенство (7).

Положим $z = re^{i\varphi_0}$, где φ_0 — фиксировано, $f(z) = T(r)e^{i\Phi(r)}$, где $T(r) = |f(z)|$, $\Phi(r) = \arg f(z)$. Тогда

$$e^{i\varphi_0} f'(re^{i\varphi_0}) = T'(r)e^{i\Phi(r)} + ie^{i\Phi(r)}\Phi'(r) \cdot T(r)$$

или

$$e^{i(\varphi_0 - \Phi(r))} f'(re^{i\varphi_0}) = T'(r) + i\Phi'(r) \cdot T(r).$$

Следовательно, имеем с учетом неравенства (7)

$$T'(r) \leq |f'(z)| \leq \frac{4(M - T(r))(M^2 + T(r) \cdot R)(T(r) + R)}{(M + R)^2(M + T(r))(1 - r^2)} \quad (9)$$

и равенство слева возможно, только если $\Phi'(r) = 0$

Неравенство (9) может быть записано в виде

$$\frac{(M + R)^2(M + T(r))dT(r)}{(M - T(r))(M^2 + RT(r))(T(r) + R)} \leq \frac{4dr}{1 - r^2}$$

или

$$d \left[\ln \frac{(M^2 + RT(r))(R + T(r))}{(M - T(r))^2} \right] \leq d \left[2 \ln \frac{1 + r}{1 - r} \right],$$

т. е.

$d[\ln \Psi(r)] \leq 0$, где

$$\Psi(r) = \frac{(M^2 + RT(r))(R + T(r))(1 - r)^2}{(M - T(r))(1 + r)^2}.$$

Так как $\Psi(r) > 0$ при $0 \leq r < 1$, то $d\Psi(r) \leq 0$. Поэтому $\Psi(r)$ — монотонно убывающая функция от r и, следовательно:

$$\Psi(r) \leq \Psi(0) = \frac{(M^2 + R|a_0|)(R + |a_0|)}{(M - |a_0|)^2},$$

т. е.

$$\frac{(M^2 + R|f(z)|)(R + |f(z)|)}{(M - |f(z)|)^2} \leq \frac{(M^2 + R|a_0|)(R + |a_0|)}{(M - |a_0|)^2} \left(\frac{1 + r}{1 - r} \right)^2.$$

Таким образом, доказано неравенство (6), а с его помощью из (7) легко получить неравенство (8).

Укажем способ получения функции, дающей равенство в неравенствах (6) и (7).

Если при некотором $\varphi = \varphi_0$ и $0 < r_0 < 1$ значение $\Psi(r_0) = \Psi(0)$, то $\Psi(r) = \Psi(0)$ на всем промежутке $[0, r_0]$ в силу монотонности функции $\Psi(r)$, и $d\Psi(r) = 0$ на $(0, r_0)$. Значит, в неравенстве (9) в этом случае — равенства. Но это возможно лишь, если $\Phi'(r) = 0$. Следовательно, $\Phi(r) = \Phi_0$, а $f(z) = |f(z)|e^{i\varphi_0}$ на $[0, r_0]$. Так как $f(0) = a_0$, то $\Phi_0 = \arg a_0$.

С учетом этого из (6) получаем

$$\frac{(M^2 + R|f(z)e^{-i\varphi_0}|)(R + |f(z)e^{-i\varphi_0}|)}{(M - |f(z)e^{-i\varphi_0}|)^2} = \frac{(M^2 + R|a_0e^{-i\varphi_0}|)(R + |a_0e^{-i\varphi_0}|)}{(M - |a_0e^{-i\varphi_0}|)^2} \left(\frac{1 + ze^{-i\varphi_0}}{1 - ze^{-i\varphi_0}} \right)^2. \quad (10)$$

Следовательно, функция $f(z)$, дающая равенство в неравенствах (6) и (7), должна удовлетворять уравнению (10) при $z = re^{i\varphi_0}$, $0 \leq r \leq r_0$, а значит, и везде в E в силу единственности аналитического продолжения. Уравнение (10) является квадратным относительно $f(z)$. Легко проверить, что меньший по модулю корень уравнения (10) удовлетворяет условию теоремы и при $z = re^{i\varphi_0}$ даст равенство в неравенствах (6) и (7).

Теорема доказана полностью.

Замечание. В неравенстве (6) в неявном виде содержится оценка сверху для $|f(z)|$.

Действительно, (6) равносильно квадратному неравенству

$$g(y) \equiv ay^2 + by + c > 0,$$

где

$$\begin{aligned} y &= |f(z)|, \quad a = A(r) - R > 0, \\ b &= -(2MA(r) + M^2 + R^2), \quad c = M^2(A(r) - R), \\ A(r) &= \frac{(M^2 + R|a_0|)(R + |a_0|)}{(M - |a_0|)^2} \left(\frac{1 + r}{1 - r} \right)^2. \end{aligned}$$

Так как

$$g(M) \equiv -(M^2 + RM)(R + M) < 0,$$

то корни y_0, y_1 полинома $g(y)$ вещественны, и $0 < y_0 < M < y_1$.

Следовательно, неравенство (6) справедливо при $|f(z)| \leq y_0$.

Отметим, что доказанная теорема содержит как частный случай лемму Шварца.

Следствие. Пусть $f(z) = a_1z + \dots$ регулярна в E и $|f(z)| < M$ в E . Тогда

$$\begin{aligned} |f(z)| &\leq \frac{2Mk(r)}{L^2 + L\sqrt{L^2 + 4k(r)} + 2k(r)} \leq Mr, \\ |f'(0)| &\leq \frac{4M}{L^2} \leq M, \end{aligned}$$

где

$$\begin{aligned} k(r) &= \frac{4r}{(1-r)^2}, \\ L &= L(M, R) = \sqrt{\frac{M}{R}} + \sqrt{\frac{R}{M}}. \end{aligned}$$

Доказательство. Так как $a_0 = 0$, то неравенство (6) принимает вид

$$\frac{(M^2 + R|f(z)|)(R + |f(z)|)}{(M - |f(z)|)^2} \leq R \left(\frac{1 + r}{1 - r} \right)^2,$$

откуда получаем

$$|f(z)| \leq y_0,$$

где

$$y_0 = \frac{2MRk(r) + (M+R)^2 - \sqrt{(M+R)^4 + 4(M+R)^2MRk(r)}}{2Rk(r)} = \\ = \frac{2Mk(r)}{L^2 + L\sqrt{L^2 + 4k(r)} + 2k(r)}.$$

Рассмотрим выражение $L = L(M, R) = \sqrt{\frac{M}{R}} + \sqrt{\frac{R}{M}}$, которое определено при $M > 0$ и $0 < R \leq M$.

Заметим, что $L(M, R)$ является монотонно убывающей функцией от R при фиксированном M , а значит, y_0 является монотонно возрастающей функцией от R при фиксированном M . Следовательно,

$$L(M, R) \geq L(M, M) = 2, \\ y_0 \leq y_0|_{R=M} = Mr, \text{ где } r = |z|.$$

Итак,

$$|f(z)| \leq y_0 \leq Mr,$$

а из (3) имеем

$$|f'(0)| = |a_1| \leq \frac{4M^2R}{(M+R)^2} = \frac{4M}{L^2} \leq M.$$

ЛИТЕРАТУРА

1. Хейман В. К. Многолистные функции. ИЛ. М., 1960.
2. Pick G. Leipz. Ber. math.—phys. Klasse. 68 (1916), 58—64.

ЭКСТРЕМАЛЬНЫЕ СВОЙСТВА КОЭФФИЦИЕНТОВ ФАБЕРА, ПОРОЖДЕННЫХ ЗВЕЗДООБРАЗНЫМИ КONTИНУУМАМИ ПОРЯДКА α

В. И. КАН, ЕН-ХИ КАН

§ 1. Введение.

Пусть $E = \{z : |z| > 1\}$ и $\alpha \in [0; 1)$.

Определение. Однолиственная и голоморфная в области E , за исключением простого полюса $z = \infty$, функция

$$w = F(z) = z + \sum_{n=2}^{\infty} \frac{a_n}{z^n}, \quad (1)$$

не принимающая в E нулевого значения, называется звездобразной порядка α , если

$$\operatorname{Re} \frac{zF'(z)}{F(z)} > \alpha, \quad z \in E.$$

Через Σ_{α}^* мы обозначим класс всех функций, звездобразных порядка α . Очевидно, что $\Sigma_0^* = \Sigma^*$ и $\Sigma_{\alpha}^* \subset \Sigma^*$ для всех $\alpha \in [0; 1)$.

Нетрудно доказать (см., например, [1]), что класс $F(z) \in \Sigma_{\alpha}^*$ можно представить структурной формулой

$$F(z) = z \exp \left[\int_{-\pi}^{\pi} 2(1-\alpha) \log \left(1 - \frac{1}{z} e^{-i\theta} \right) dm(\theta) \right]. \quad (2)$$

В (2) $m(\theta)$ — неубывающая на $[-\pi, \pi]$ функция, нормированная условием $\int_{-\pi}^{\pi} dm(\theta) = 1$ (совокупность таких функций будем обозначать через M), под логарифмом понимается ветвь, обращающаяся в нуль при $z = \infty$, а интеграл понимается в смысле Стильтеса.

Сформулируем две вариационные формулы для класса Σ_{α}^* (см., например, в [1] формулы (5) и (6)).

Вариация А. Пусть $F(z) \in \Sigma_{\alpha}^*$, где $F(z)$ определена формулой (2). Пусть θ_1 и θ_2 , $-\pi \leq \theta_1 < \theta_2 < \pi$, произвольно заданные числа. Тогда существует действительная постоянная $C = \text{const}$ такая, что функции

$$F^*(z) = F(z) + \lambda \int_{\theta_1}^{\theta_2} 2(1-\alpha) F(z) \frac{iz^{-1}e^{-i\theta}}{1-z^{-1}e^{-i\theta}} |m(\theta) - C| d\theta + o(\lambda) \quad (3)$$

принадлежат Σ_α^* для всех $-1 < \lambda < 1$.

Вариация В. Пусть $F(z) \in \Sigma_\alpha^*$, причем $F(z)$ задана в виде (2). Пусть θ_1 и θ_2 , $-\pi \leq \theta_1 < \theta_2 < \pi$ служат точками разрыва функции $m(\theta)$. Тогда существует постоянная, зависящая от высоты скачков η , $\eta > 0$, такая, что функции

$$F^{**}(z) = F(z) + \lambda 2(1-\alpha)F(z)[\log(1-z^{-1}e^{-i\theta})]_{\theta_1}^{\theta_2} + o(\lambda) \quad (4)$$

принадлежат Σ_α^* для всех $-\eta < \lambda < \eta$.

Заметим, что всюду мы полагаем

$$[f(\theta)]_{\theta_1}^{\theta_2} = f(\theta_1) - f(\theta_2) \quad (5)$$

и считаем $\lambda^{-1} \cdot o(\lambda) \rightarrow 0$ при $\lambda \rightarrow 0$ равномерно внутри E .

Отметим, что класс Σ_α^* нормальный, компактный и связный [2].

§ 2. Вариационные формулы для коэффициентов Фабера

Пусть $F(z) \in \Sigma_\alpha^*$. Обозначим через K дополнение образа E при отображении функцией $F(z)$ до расширенной плоскости w , то есть $K = \mathbb{C} \setminus F(E)$. Ясно, что K — ограниченный континуум, содержащий начало. Семейство таких континуумов обозначим через Δ_α^* . Для каждого континуума $K \in \Delta_\alpha^*$ образуем [3] полиномы Фабера $\Phi_n(w)$, $n = 1, 2, \dots$, с помощью порождающей функции

$$\log \frac{F(z) - w}{z} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \Phi_n(w) z^{-n}, \quad w \in K, F(z) \in \Sigma_\alpha^*. \quad (6)$$

Напомним [4], что функцию $\Phi_n[F(z)]$, $n = 1, 2, \dots$, называем n -й функцией Фабера, а коэффициенты c_{nm} , $n, m = 1, 2, \dots$, разложения n -й функции Фабера в окрестности $z = \infty$ в ряд Лорана, то есть

$$\Phi_n[F(z)] = z^n + \sum_{m=1}^{\infty} c_{nm} z^{-m} \quad (7)$$

называем коэффициентами Фабера.

Установим вариационные формулы для c_{nm} .

Лемма 1. Пусть $K \in \Delta_\alpha^*$ и $\Phi_n(w)$, $n = 1, 2, \dots$, — полином Фабера для K . Тогда в Δ_α^* существуют два таких континуума K^* и K^{**} , полиномы Фабера для которых соответственно представимы в виде

$$\Phi_n^*(w) = \Phi_n(w) + \lambda 2(1-\alpha) \left[-n \sum_{k=0}^{n-1} P_k(\theta) \frac{\Phi'_{n-k}(w)}{n-k} |m(\theta) - C| d\theta + o(\lambda) \right], \\ w \in K \cap K^*, \lambda \in (-1, 1) \quad (8)$$

$$\Phi_n^{**}(w) = \Phi_n(w) + \lambda 2(1-\alpha) \left(-n \sum_{k=0}^{n-1} |Q_k(\theta)|_{\theta_1}^{\theta_2} \frac{\Phi_{m-k}(w)}{m-k} \right) + \\ + o(\lambda), \quad w \in K \subset K^{**}, \lambda \in (-\eta, \eta). \quad (9)$$

В (8) и (9) положено

$$P_k(\theta) = \sum_{j=0}^k i a_{k-j-1} e^{-i(j+1)\theta}, \quad a_{-1} \equiv 1, \quad (10)$$

$$Q_k(\theta) = \sum_{j=0}^k -a_{k-j-1} \frac{e^{-i(j+1)\theta}}{j+1}, \quad a_{-1} \equiv 1. \quad (11)$$

Доказательство. Докажем формулу (8).

Пусть $K \in \Delta_\alpha^*$. Тогда существует функция $F(z) \in \Sigma_\alpha^*$ такая, что $CF(E) = K$. Подвергнем $F(z)$ вариации (3). Отсюда следует, что существует континуум $CF^*(E) = K^* \in \Delta_\alpha^*$, полиномы Фабера для которого $\Phi_n(\omega)$, $n = 1, 2, \dots$ определяются из (6) заменой $F(z)$ на $F^*(z)$:

$$\log \frac{F^*(z) - \omega}{z} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \Phi_n^*(\omega) z^{-n}, \quad \omega \in K^*, \quad F^*(z) \in \Sigma_\alpha^*. \quad (12)$$

С учетом (3) из (12) следует, что

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \Phi_n^*(\omega) z^{-n} &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \Phi_n(\omega) z^{-n} \\ &+ \lambda \int_{\theta_1}^{\theta_2} 2(1-\alpha) \left\{ F(z) \frac{iz^{-1}e^{-i\theta}}{1-z^{-1}e^{-i\theta}} \cdot \frac{1}{F(z)-\omega} \right\} |m(\theta) - C| d\theta + o(\lambda), \quad \omega \in K \cap K^*. \end{aligned} \quad (13)$$

Разложим выражение, стоящее в {...}, по отрицательным степеням z . Имеем

$$F(z) \frac{iz^{-1}e^{-i\theta}}{1-z^{-1}e^{-i\theta}} \cdot \frac{1}{F(z)-\omega} = \sum_{n=1}^{\infty} \left[-n \sum_{k=0}^{n-1} P_k(\theta) \frac{\Phi_{n-k}'(\omega)}{n-k} \right] z^{-n}. \quad (14)$$

В справедливости (14) нетрудно убедиться, если учесть легко проверяемое тождество

$$F(z) \frac{iz^{-1}e^{-i\theta}}{1-z^{-1}e^{-i\theta}} = \sum_{k=0}^{\infty} \left(\sum_{j=0}^k i a_{k-j-1} e^{-i(j+1)\theta} \right) z^{-k} \equiv \sum_{k=0}^{\infty} P_k(\theta) z^{-k}, \quad a_{-1} \equiv 1 \quad (15)$$

и разложение

$$(F(z) - \omega)^{-1} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \Phi_n'(\omega) z^{-n},$$

получающееся из (6) дифференцированием по ω .

Сравнивая коэффициенты при z^n , $n = 1, 2, \dots$, в обеих частях (13), принимая во внимание (14), и получаем искомую формулу (8).

Перейдем к рассмотрению аналогичной ситуации, когда функция $\Gamma(z)$ подвергнута вариации (4). Как и выше, мы имеем

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \Phi_n^*(\omega) z^{-n} &= \log \frac{F^{**}(z) - \omega}{z} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \Phi_n(\omega) z^{-n} + \\ &+ \lambda F(z) \left[\log(1 - z^{-1}e^{-i\theta}) \right]_{\theta_1}^{\theta_2} (F(z) - \omega)^{-1} + o(\lambda), \quad \omega \in K \cap K^{**}, \end{aligned} \quad (16)$$

С учетом легко проверяемого тождества

$$F(z)|\log(1-z^{-1}e^{-i\theta})|_{\theta_1}^{\theta_2} = \\ = \sum_{k=0}^{\infty} \left[\sum_{j=0}^k -a_{k-j-1} \frac{e^{-i(j+1)\theta}}{j+1} \right]_{\theta_1}^{\theta_2} z^{-k} \equiv \sum_{k=0}^{\infty} |Q_k(\theta)|_{\theta_1}^{\theta_2} z^{-k}$$

из (16) сравнением коэффициентов при z^{-n} получаем формулу (9). Лемма полностью доказана.

Замечание 1. В силу (10) и (11) $Q'_k(0) = P_k(0)$.

Лемма 2. Пусть $K \in \Delta_{\alpha}^*$ и $\Phi_n[F(z)]$, $n=1, 2, \dots$, — n -я функция Фабера для K . Тогда в Δ_{α}^* существуют два таких континуума K^* и K^{**} , n -е функции Фабера для которых представимы соответственно в виде

$$\Phi_n^*[F^*(z)] = \Phi_n[F(z)] + \lambda \int_{\theta_1}^{\theta_2} 2(1-\alpha) \left\{ n \sum_{k=0}^{n-1} P_k(\theta) \frac{\Phi_{n-k}'[F(z)]}{n-k} \right. \\ \left. + \Phi_n'[F(z)] F(z) \frac{iz^{-1}e^{-i\theta}}{1-z^{-1}e^{-i\theta}} \right\} |m(\theta) - C| d\theta + o(\lambda), \omega \in K \cap K^*; \quad (17)$$

$$\Phi_n^{**}[F^{**}(z)] = \Phi_n[F(z)] + \lambda \int_{\theta_1}^{\theta_2} 2(1-\alpha) \left\{ -n \sum_{k=0}^{n-1} |Q_k(\theta)|_{\theta_1}^{\theta_2} \frac{\Phi_{n-k}'[F(z)]}{n-k} \right. \\ \left. + \Phi_n'[F(z)] F(z) |\log(1-z^{-1}e^{-i\theta})|_{\theta_1}^{\theta_2} \right\} + o(\lambda), \omega \in K \cap K^{**}, \quad (18)$$

причем функции $P_k(0)$ и $Q_k(0)$ определяются по формулам (10) и (11).

Доказательство. Пусть $K \in \Delta$, $F(z) \in \Sigma$ и $K = CF(E)$. Функции $F^*(z)$, определяемой по (3), сопоставим континуум $K^* \in \Delta_{\alpha}^*$. Пусть теперь $\Phi_n^*[F^*(z)]$ — n -я функция Фабера для K^* . Вычислим $\Phi_n^*[F^*(z)]$. Заменяя $F^*(z)$ по формуле (3) и разложив n -ю функцию Фабера по формуле Тейлора по степеням λ , ограничившись лишь ее первым порядком, получим

$$\Phi_n^*[F^*(z)] = \Phi_n[F(z)] + 2(1-\alpha)\lambda \int_{\theta_1}^{\theta_2} \Phi_n'[F(z)] \left| F(z) \frac{iz^{-1}e^{-i\theta}}{1-(ze^{i\theta})^{-1}} \right| m(\theta) \\ - C|d\theta + o(\lambda).$$

Отсюда следует вариация (17), если принять во внимание, что $\Phi_n^*[F(z)]$ и $\Phi_n[F(z)]$ подсчитаны по формуле (8) с последующей заменой ω на $F(z)$.

Совершенно аналогично доказывается вариационная формула (18) с использованием (4). Лемма доказана.

Замечание 2. Укажем, что и здесь производная от выражения, стоящего в {...} в (18), совпадает, как нетрудно проверить, с выражением в {...} в (17).

Теорема 1. Пусть $K \in \Delta_{\alpha}^*$ и c_{nm} , $n, m=1, 2, \dots$, — коэффициенты Фабера для K . Тогда в Δ_{α}^* существуют два таких континуума K^* и K^{**} , коэффициенты Фабера c_{nm}^* и c_{nm}^{**} для которых представимы в виде

$$c_{nm}^* = c_{nm} + \lambda \int_{\theta_1}^{\theta_2} 2(1-\alpha) P_{nm}(\theta) |m(\theta) - C| d\theta + o(\lambda), \quad (19)$$

$$c_{nm}^{**} = c_{nm} [-\lambda 2(1-\alpha) |Q_{nm}(\theta)|_{\theta_1}^{\theta_2} + o(\lambda)], \quad (20)$$

где

$$P_{nm}(\theta) = \sum_{k=0}^{n+m-1} A_k P_k(\theta), \quad (21)$$

$$Q_{nm}(\theta) = \sum_{k=0}^{n+m-1} A_k Q_k(\theta) \quad (22)$$

и A_k — комплексные постоянные, причем $A_{n+m-1} = n$.

Доказательство. Пусть континууму $K \in \Lambda_\alpha^*$ коэффициенты Фабера c_{nm} для которого определяются из (7), сопоставляется функция $F(z) \in \Sigma_\alpha^*$. Обозначим через c_{nm}^* коэффициенты Фабера для такого $K^* \in \Lambda_\alpha^*$, что $K^* = CF^*(E)$, где $F^*(z) \in \Sigma_\alpha^*$ — вариация (3), то есть

$$\Phi_n^*[F^*(z)] = z^n \sum_{m=1}^{\infty} c_{nm}^* z^{-m}. \quad (23)$$

Если теперь использовать разложение функции $F(z) iz^{-1} e^{-\theta_1} \times \times (1 - z^{-1} e^{-i\theta})^{-1}$ по отрицательным степеням z , определяемое по (15), и представление (7) для $\Phi_n[F(z)]$ и учесть, что

$$\Phi_n'[F(z)] F'(z) = nz^{n-1} + \sum_{m=1}^{\infty} -mc_{nm} z^{-m-1},$$

то из вариационной формулы (17) для n -й функции Фабера следует соотношение

$$\begin{aligned} z^n \sum_{m=1}^{\infty} c_{nm}^* z^{-m} &= z^n \sum_{m=1}^{\infty} c_{nm} z^{-m-1} + \\ &+ \lambda \int_{\theta_1}^{\theta_2} \frac{2(1-\alpha)}{F'(z)} \left\{ -n \sum_{k=0}^{n-1} P_k(\theta) z^{n-k-1} - n \sum_{k=0}^{n-1} P_k(\theta) \frac{1}{n-k} \sum_{m=1}^{\infty} -mc_{n-km} z^{-m-1} + \right. \\ &\left. + \left(nz^{n-1} + \sum_{m=1}^{\infty} -mc_{nm} z^{-m-1} \right) \sum_{k=0}^{\infty} P_k(\theta) z^{-k} \right\} |m(\theta) - C| d\theta + o(\lambda), \end{aligned}$$

из которого, принимая во внимание, что

$$|F'(z)|^{-1} = 1 + a_1 z^{-2} + 2a_2 z^{-3} + \dots,$$

сравнением коэффициентов при z^{-n} и получаем искомую вариацию для коэффициентов Фабера (19). Причем символом $P_{nm}(\theta)$ обозначен коэффициент при z^{-n} в разложении подынтегральной функции, и нетрудно проверить, что он имеет вид (21). Для справки приведем значения $P_{nm}(\theta)$ для $m=1, 2, 3$:

$$\begin{aligned} P_{n1}(\theta) &= nP_n(\theta), \\ P_{n2}(\theta) &= nP_{n+1}(\theta) + \sum_{k=0}^{n-1} \frac{n}{n-k} P_k(\theta) c_{n-k1} - P_0(\theta) c_{n1}, \\ P_{n3}(\theta) &= nP_{n+2}(\theta) + \sum_{k=0}^{n-1} \frac{2n}{n-k} P_k(\theta) c_{n-k2} - \sum_{k=0}^1 (2-k) P_k(\theta) c_{n2-k}. \end{aligned}$$

Из (18) рассуждениями, совершенно аналогичными вышеприведенным, доказывается справедливость формулы (20).

Теорема доказана.

Замечание 3. Отметим, что и здесь в силу замечаний 1 и 2 имеет место равенство

$$Q'_{nm}(0) = P_{nm}(0), \quad (24)$$

которое потребуется нам в дальнейшем.

§ 3. Экстремальные свойства коэффициентов Фабера

Пусть $J = J(t_1, t_2, \dots, t_{2mn})$ — аналитическая функция $2mn$ комплексных переменных и c_{nm} , $n, m = 1, 2, \dots$, — коэффициенты Фабера для $K \in \Delta_\alpha^*$.

Рассмотрим на семействе Δ_α^* функционал

$$J = J(c_{11}, \bar{c}_{11}, \dots, c_{1m}, \bar{c}_{1m}; \\ c_{21}, \bar{c}_{21}, \dots, c_{2m}, \bar{c}_{2m}; \dots; c_{n1}, \bar{c}_{n1}, \dots, c_{nm}, \bar{c}_{nm}). \quad (25)$$

Теорема 2. *Граничными функциями $F_0(z) \in \Sigma_\alpha^*$, соответствующими экстремальным континуумам $K_0 = CF_0(E) \in \Delta_\alpha^*$, относительно функционала (25) на семействе Δ_α^* , являются только функции вида*

$$F_0(z) = z \sum_{j=1}^{m+n} (1 - z^{-1} e^{-i\theta_j})^{2(1-\alpha)\gamma_j}, \quad (26)$$

где $\alpha \in [0; 1)$, $\theta_j \in [-\pi, \pi)$, $\gamma_j \geq 0$ для всех j и $\sum_{j=1}^{m+n} \gamma_j = 1$.

Доказательство. Так как континуум $K \in \Delta_\alpha^*$ и функция $F(z) \in \Sigma_\alpha^*$ связаны соотношением $K = CF(E)$, то это позволяет рассмотреть функционал (25) на классе Σ_α^* . Нормальность и компактность класса обеспечивает существование граничной функции, принадлежащей этому классу, относительно данного функционала. Пусть $F_0(z)$ — граничная функция, представимая в виде (2), и c_{nm} , $n, m = 1, 2, \dots$, — соответствующие этой функции $F_0(z)$ коэффициенты Фабера. Предположим, что $F_0(z)$ подвергнута вариации (3) и $\dot{c}_{nm}$, определяемые по (19), проварьированные соответственно коэффициенты Фабера. Пусть $J^* = J(\dot{c}_{11}, \bar{\dot{c}}_{11}, \dots, \dot{c}_{nm}, \bar{\dot{c}}_{nm})$. Вычислим J^* . Если учесть, что $\dot{c}_{nm}$ и $\bar{\dot{c}}_{nm}$ определяются по (19), и разложить функцию J^* по степеням λ , ограничившись первым ее порядком, то получим

$$J^* = J + \lambda \sum_{r=1}^n \sum_{j=1}^m \left(\frac{\partial J}{\partial c_{rj}} B_{rj} + \frac{\partial J}{\partial \bar{c}_{rj}} \bar{B}_{rj} \right) + o(\lambda), \quad (27)$$

где

$$B_{rj} = \int_{\theta_1}^{\theta_2} 2(1-\alpha) P_{rj}(\theta) |m(\theta) - C| d\theta. \quad (28)$$

Положив в (27)

$$\frac{\partial J}{\partial c_{rj}} = y_{rj}, \frac{\partial J}{\partial \bar{c}_{rj}} = z_{rj},$$

имеем

$$J^* = J + \lambda \sum_{r,j=1}^{n,m} (y_{rj} B_{rj} + z_{rj} \bar{B}_{rj}) + o(\lambda). \quad (29)$$

Условие экстремальности означает, что

$$|J^* - J_e| \geq |J - J_e|. \quad (30)$$

Здесь J_e — точка, не принадлежащая замкнутому множеству значений функционала. Обозначим

$$x = e^{-i\beta}, \quad \beta = \arg(J - J_e). \quad (31)$$

Из (30) с учетом (29) и (31) следует неравенство

$$\lambda \operatorname{Re} x \sum_{r,j=1}^{n,m} (y_{rj} B_{rj} + z_{rj} \bar{B}_{rj}) \geq 0.$$

В силу произвольности $\lambda \in (-1, 1)$ и того, что $F_0(z)$ — граничная функция, заключаем, что стоящая в неравенстве вещественная часть должна быть равна нулю. Это приводит с использованием формулы (28) к условию

$$\sum_{r,j=1}^{n,m} \int_{\theta_1}^{\theta_2} |\operatorname{Re}(xy_{rj}P_{rj}(\theta) + xz_{rj}\overline{P_{rj}(\theta)})| m(\theta) - C |d\theta = 0. \quad (32)$$

Отметим, что в силу (21) и (10) выражение

$$\sum_{r,j=1}^{n,m} P_{rj}(\theta) = \sum_{r=1}^n \sum_{j=1}^m \sum_{k=0}^{r+j-1} A_k P_k(\theta) = \sum_{r=1}^n \sum_{j=1}^m \sum_{k=0}^{r+j-1} \sum_{l=0}^k i a_{k-l-1} A_k e^{-i(l+1)\theta}.$$

представляет полином степени $n+m$ относительно переменной $e^{-i\theta}$, а

$$\operatorname{Re} \sum_{r,j=1}^{n,m} (xy_{rj}P_{rj}(\theta) + xz_{rj}\overline{P_{rj}(\theta)}) = G(\theta)$$

— полином степени $2(n+m)$ относительно $e^{i\theta}$.

Условие (32) означает, что если промежуток (θ_1, θ_2) такой, что в нем нет корней уравнения $G(\theta) = 0$, то в этом промежутке должно быть $m(\theta) = C = \text{Const}$. Если $G(\theta) = 0$ имеет не более $2(n+m)$ корней в интервале $\theta \in [-\pi, \pi)$, то мы заключаем, что $m(\theta)$ — ступенчатая функция, имеющая не более $2(m+n)$ точек разрыва в этом интервале.

Покажем, что $G(\theta) = 0$ на самом деле не может иметь $2(m+n)$ корней в $[-\pi, \pi)$. Предположим, что $m(\theta)$ имеет $2(n+m)$ точек разрыва $-\pi \leq \theta_1 < \theta_2 < \dots < \theta_{2(m+n)} < \pi$. Причем эти точки разрыва служат нулями функции $G(\theta)$.

Вариация c_{nm}^{**} , даваемая формулой (20), позволяет подсчитать сначала $J^{**} = J(c_{11}^{**}, \bar{c}_{11}^{**}, \dots, c_{1m}^{**}, \bar{c}_{1m}^{**}; \dots; c_{n1}^{**}, \bar{c}_{n1}^{**}, \dots, c_{nm}^{**}, \bar{c}_{nm}^{**})$,

а затем по аналогии с вышесказанным прийти к заключению (в силу граничного свойства функции $F_0(z)$ совместно с произволом λ изменяться в $(-\eta, \eta)$), что

$$[R(\theta)]_{\theta_1}^{\theta_2} = \operatorname{Re} x \sum_{r,j=1}^{n,m} \left\{ [Q_{rj}(\theta)]_{\theta_1}^{\theta_2} y_{rj} + \overline{[Q_{rj}(\theta)]_{\theta_1}^{\theta_2}} z_{rj} \right\} = 0.$$

Это условие показывает, что функция $R(\theta)$ принимает равные значения при $\theta = \theta_1$ и $\theta = \theta_2$.

Следовательно, $R^1(\theta)$ должна обратиться в нуль внутри промежутка (θ_1, θ_2) . Но $R^1(\theta) = G(\theta)$ в силу (24). Ничто нам не мешает считать, что θ_1 и θ_2 два последовательных корня функции $G(\theta)$. Но тогда мы приходим к противоречию с тем фактом, что $G(\theta)$ имеет ровно $2(m+n)$ корней. Это противоречие доказывает, что $m(\theta)$ имеет не более $m+n$ точек разрыва. Указанная характеристика функции $m(\theta)$ позволяет нам в силу (2) придать функции $F_0(z) \in \Sigma_\alpha$ вид (25).

Теорема доказана.

ЛИТЕРАТУРА

1. Pinchuk B. On Starlike and Convex Functions of order α . Duke Math. J. 35 (1968), № 4, 721—734.
2. Лебедев Н. А., Александров И. А. К методу вариаций в классах функций, представимых с помощью интегралов Стильеса.—«Труды матем. ин-та им. В. А. Стеклова», 94 (1968), Л., «Наука», 79—89.
3. Смирнов В. И., Лебедев Н. А. Конструктивная теория функций комплексного переменного, М., «Наука», 1964.
4. К а н В. И. Вариация полиномов Фабера.—Вопросы геометрич. теории функ. «Труды Томского ун-та», 175 (1964), вып. 2, 50—58.

ОДНО ЗАМЕЧАНИЕ О ПОЛИНОМАХ ФАБЕРА

В. И. КАН, В. В. ЧЕРНИКОВ

Пусть α — произвольно заданное вещественное число. Мероморфную в $E = \{z: |z| > 1\}$ функцию $F(z)$, имеющую полюс только в точке $z = \infty$ и лорановское разложение в ее окрестности вида

$$F(z) = z + c_0 + \frac{c_1}{z} + \dots,$$

назовем, по аналогии с определением из [1], α -звездной, если $F(z)$ удовлетворяет в E условиям $F(z) \cdot F^1(z) \neq 0$,

$$\operatorname{Re} \left[(1 - \alpha) \frac{zF'(z)}{F(z)} + \alpha \left(1 + \frac{zF''(z)}{F'(z)} \right) \right] > 0. \quad (1)$$

Множество всех таких функций обозначим через $\Sigma_0^*(\alpha)$. Заметим, что если функция $F(z)$ принадлежит классу $\Sigma_0^*(\alpha)$, то в $|\zeta| < 1$ функция

$$f(\zeta) = \frac{1}{F(\zeta^{-1})} \quad (2)$$

регулярна и удовлетворяет условиям $\zeta^{-1}f(\zeta) \cdot f^1(\zeta) \neq 0$,

$$\operatorname{Re} \left[(1 + \alpha) \frac{\zeta f'(\zeta)}{f(\zeta)} - \alpha \left(1 + \frac{\zeta f''(\zeta)}{f'(\zeta)} \right) \right] > 0.$$

Из результатов работ [2], [3] и формулы (2) следует, что функции $\omega = F(z) \in \Sigma_0^*(\alpha)$ отображают E на области, дополнения K которых до расширенной плоскости звездообразны относительно точки $\omega = 0$, а при $\alpha \geq 1$ — выпуклы.

Обозначим через $\Phi_n(\omega)$, $n = 1, 2, \dots$, полином Фабера степени n , порожденный континуумом K . Имеет место следующее утверждение.

Теорема. Пусть $\alpha \geq 1$, $K = CF(E)$ — дополнение до расширенной плоскости ω образа E при отображении $\omega = F(z) \in \Sigma_0^*(\alpha)$. Тогда при $n = 1, 2, \dots$, справедливы неравенства

$$1 \leq \max_{\omega \in K} |\Phi_n(\omega)| \leq 2. \quad (3)$$

Знак равенства слева в (3) достигается только тогда, когда K есть круг $|\omega| \leq 1$. Знак равенства справа в (3) достигается при $1 \leq \alpha \leq 2$, когда K есть отрезок.

Доказательство. Так как $\alpha \geq 1$, то дополнение $K = CF(E)$ образа E до расширенной плоскости ω при отображении $\omega = F(z) \in \Sigma_0^*$ (а) является выпуклым континуумом. Поэтому при любом $\omega \in K$ функция $F_1(z) = F(z) - \omega$ отображает E на область со звездообразным относительно начала координат дополнением, т. е. в E

$$\operatorname{Re} \frac{zF_1'(z)}{F_1(z)} = \operatorname{Re} \frac{zF'(z)}{F(z)} > 0.$$

Принимая во внимание это неравенство и равенство (см., например, [4], стр. 117).

$$\frac{zF'(z)}{F(z) - \omega} = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\Phi_n(\omega)}{z^n}, \quad (4)$$

закключаем, на основании известных (см., например, [5], стр. 199) оценок коэффициентов функций с положительной вещественной частью, что $|\Phi_n(\omega)| \leq 2$, $n = 1, 2, \dots$. Отсюда следует правое неравенство (3). Левое неравенство (3) легко следует из принципа максимума, примененного к функции $z^{-\alpha} \cdot \Phi_n(F(z))$ в области $|z| \geq 1$. Эта функция есть постоянная только при $F(z) = z$, так что знак равенства слева в (3) реализуется, когда K есть круг $|\omega| \leq 1$.

Рассмотрим теперь функцию

$$\omega = F(z) = \frac{(z - e^{i\theta})^2}{z}, \quad (5)$$

где θ — вещественная постоянная. Она отображает E на внешность отрезка $[0, -4e^{i\theta}]$. Простыми вычислениями убедимся, что функция (5) принадлежит классу Σ_0^* (а) только при $0 \leq \alpha \leq 2$. Для этой функции из (4) найдем

$$\Phi_n(\omega) = 2e^{in\theta} \cos n\varphi,$$

где $\cos \varphi = 1 - 0,5|\omega|$, а ω — любая точка отрезка $[0, -4e^{i\theta}]$. Отсюда получаем, что $\max |\Phi_n(\omega)| = 2$, если

$$\omega = -2 \left(1 - \cos \left(\frac{k\pi}{n} \right) \right) e^{i\theta}, \quad k - \text{целое}.$$

Так как все функции $F(z)$ класса Σ_0^* (а) отображают E на области с выпуклыми дополнениями при $\alpha \geq 1$, то, следовательно, при $1 \leq \alpha \leq 2$ мы доказали точность правого неравенства (3). Теорема доказана.

При $\alpha = 1$ неравенства (3) дают известные оценки, полученные Поммеренке [6]. При $\alpha > 2$ в (3) справа будет строгое неравенство, поскольку функция (5) не принадлежит теперь классу Σ_0^* (а). И в общем случае произвольного выпуклого континуума K , отличного от отрезка, на основании известной оценки [7]

$$|\Phi_n(F(z)) - z^n| < 1 \quad \text{при } |z| > 1.$$

мы имеем справа в (3) строгое неравенство.

ЛИТЕРАТУРА

1. Mocanu P. T. Une propriété de convexité généralisée dans la théorie de la représentation conforme, *Mathematica (RSR)*, 11, 1 (1969), 127—133.
 2. Miller S. S., Mocanu P. T., Reade M. O. All α -convex functions are starlike, *Rev. Roumaine Math. Pures Appl.*, 17, 9(1972), 1395—1397.
 3. Miller S. S., Mocanu P. T., Reade M. O. All α -convex functions are univalent and starlike, *Proc. Amer. Math. Soc.* 37, 2 (1973), 553 -554.
 4. Маркушевич А. И. Теория аналитических функций, т. 2. М., 1968
 5. Голузин Г. М. Геометрическая теория функций комплексного переменного М., 1966.
 6. Pommerenke Ch. Über die Fabeschen Polynome schlichter Functionen. *Math. Z.*, 85, 3 (1964), 197—208.
 7. Kövari T., Pommerenke Ch. On Faber polynomials and Faber expansions, *Math. Z.*, 99, 3 (1967), 193—206.
-

ЭКСТРЕМАЛЬНЫЕ ЗАДАЧИ НА КЛАССАХ ОГРАНИЧЕННЫХ ЗВЕЗДНЫХ ФУНКЦИЙ

Г. М. КЕСЕЛЬМАН

1. Пусть S — класс функций $w=f(z)=z+c_2z^2+\dots$, голоморфных и однолистных в круге $E=\{z:|z|<1\}$; S_p ($p=1, 2, \dots$) — класс функций $f(z)=z+\sum_{k=1}^{\infty} c_{kp+1}z^{kp+1} \in S$; S_r — класс функций $f(z)=z+c_2z^2+\dots$

с вещественными коэффициентами $c_2, c_3, \dots$; $S(M)$ ($M>1$) — класс функций $f(z) \in S$, для которых $f(E) \subset D_M = \{w: |w| < M\}$; S^* — класс функций $f(z) \in S$, для которых $f(E)$ звезда относительно $w=0$; Σ —

класс функций $\omega=F(\zeta)=\zeta+a_0+\frac{a_1}{\zeta}+\dots$, мероморфных и однолистных в области $\Omega=\{\zeta: |\zeta|>1\}$, $F(\zeta) \neq 0$ в Ω ; Σ_p ($p=1, 2, \dots$) — класс функций $F(\zeta)=\zeta+\sum_{k=1}^{\infty} \frac{a_{kp-1}}{\zeta^{kp-1}} \in \Sigma$; Σ_r — класс функций $F(\zeta)=\zeta+a_0+\frac{a_1}{\zeta}+\dots \in \Sigma$ с вещественными коэффициентами $a_0, a_1, \dots$; $\Sigma(m)$

($0 \leq m < 1$) — класс функций $F(\zeta) \in \Sigma$, для которых $F(\Omega) \subset \Delta_m = \{\omega: |\omega| > m\}$; Σ^* — класс функций $F(\zeta) \in \Sigma$, для которых $C_w/F(\overline{\Omega})$ звезда относительно $\omega=0$. Для обозначения классов функций, являющихся подклассами одновременно нескольких из указанных выше классов, буквы S и Σ будем снабжать совокупностью соответствующих индексов, например $S_p(M) = S_p \cap S(M) \cap S^*$.

Применение известного метода внутренних вариаций (см., например, [1]) к решению экстремальных задач на классах $S(M)$, $\Sigma(m)$ осложняется тем, что для них не найдены вариационные формулы типа Г. М. Голузина. Полученные в данной заметке качественные результаты для классов $S^*(M)$, $\Sigma^*(m)$ опираются на вариацию функций некоторых специальных подклассов, объединение которых плотно в соответствующем классе. Такой подход восходит, видимо, к Кжижу [10] и применялся Барнардом [9] при исследовании простейших задач на классе $S^*(M)$.

Обозначим через $S_n^*(M)$ ($n=1, 2, \dots$) класс функций $f(z) \in S(M)$, для которых $f(E)$ получена из D_M исключением не более n радиальных отрезков; S_n^* ($n=1, 2, \dots$) — класс функций $f(z) \in S^*$, для которых $f(E)$ получена из C_w исключением не более n лучей, имеющих точку $w=0$ на своих продолжениях. Соответственно определяются классы $S_{np}^*(M)$, $S_{np}^*, S_{nrp}^*(M)$, S_{nrp}^* , а также классы $\Sigma_n^*(m)$, Σ_n^* и их подклассы $\Sigma_{np}^*(m)$, Σ_{np}^* , $\Sigma_{nrp}^*(m)$, Σ_{nrp}^* .

Переходим к выводу формул для функций, близких к данным, в перечисленных классах. Для их получения используется обобщение дифференциального уравнения Лёвнера.

Пусть $f(z) \in S_n^*(M)$ и $f(E)$ получена из D_M проведением разрезов вдоль l радиальных отрезков L_k с концами в точках $f(e^{i\theta_k})$, $|f(e^{i\theta_k})| < M$ ($k=1, \dots, l \leq n$). Выберем среди точек $f(e^{i\theta_k})$ ($k=1, \dots, l$) какие-нибудь q ($q < n$) точек, например $f(e^{i\theta_1}), \dots, f(e^{i\theta_q})$. Отметим на границе $\partial f(E)$ m точек $f(e^{i\psi_s})$ ($s=1, \dots, m$), среди которых нет выбранных выше и не более $n-l$ лежат на $|\omega|=M$, и выпустим из них радиальные разрезы Γ_s .

Уравнение $f(\gamma_s) = \Gamma_s$ ($s=1, \dots, m$) однозначно определяет дугу γ_s , целиком лежащую в E , кроме одного своего конца $e^{i\psi_s}$. При надлежащей параметризации дуг γ_s ($s=1, \dots, m$) функция $g(z, t)$, $g(0, t)=0$, $g^1(0, t) > 0$, $0 < t < t_0$, однолистно и конформно отображающая E на $E \setminus \bigcup_{s=1}^m \gamma_s(t)$, имеет разложение $g(z, t) = e^{-t}z + \dots$ и удовлетворяет уравнению ([2], с. 196)

$$\frac{\partial g(z, t)}{\partial t} = -z \frac{\partial g(z, t)}{\partial z} \sum_{s=1}^m \tilde{\delta}_s(t) \frac{e^{i\psi_s(t)} + z}{e^{i\psi_s(t)} - z} \quad (1)$$

с начальным условием $g(z, 0) = z$, где $\tilde{\delta}_s(t)$ — некоторые вещественные коэффициенты, $0 \leq \tilde{\delta}_s(t) \leq 1$, $\tilde{\delta}_1(t) + \dots + \tilde{\delta}_m(t) = 1$.

При каждом t , $0 < t < t_0$ параметризуем разрезы L_k ($k=1, \dots, q$) та, что функция $\omega = \Psi(z, \tau)$, $\Psi(0, \tau) = 0$, $\Psi^1(0, \tau) > 0$, $0 < \tau < \tau_0$, однолистно и конформно отображающая E на $\bigcup_{k=1}^q L_k(\tau) \cup f(g(E, t))$, имеет разложение $\Psi(z, \tau) = e^{-\tau}z + \dots$ и является решением уравнения

$$\frac{\partial \Psi(z, \tau)}{\partial \tau} = z \frac{\partial \Psi(z, \tau)}{\partial z} \sum_{k=1}^q \delta_k(\tau) \frac{e^{i\theta_k(\tau)} + z}{e^{i\theta_k(\tau)} - z} \quad (2)$$

с начальным условием $\Psi(z, 0) = f(g(z, t))$, где вещественные коэффициенты $\delta_k(\tau)$ связаны соотношениями: $0 \leq \delta_k(\tau) \leq 1$, $\delta_1(\tau) + \dots + \delta_q(\tau) = 1$.

Из (1) и (2) следует, что если $\tau > 0$ и достаточно мало, то первые члены разложения по степеням τ функции $f_*(z) = \Psi(g(z, \tau), \tau) = z + \dots$, однолистно и конформно отображающей E на область, полученную из $f(E)$ исключением отрезков $\Gamma_s(\tau)$ ($s=1, \dots, m$) и присоединением отрезков $L_k(\tau)$ ($k=1, \dots, q$), имеют вид

$$f_*(z) = f(z) + \tau z f'(z) \left(\sum_{k=1}^q \delta_k \frac{e^{i\theta_k} + z}{e^{i\theta_k} - z} - \sum_{s=1}^m \tilde{\delta}_s \frac{e^{i\psi_s} + z}{e^{i\psi_s} - z} \right) + o(\tau)^1. \quad (3)$$

В частности, полагая $\delta_k = \tilde{\delta}_s = 1/p$, $e^{i\theta_k} = e_k e^{i\theta}$, $e^{i\psi_s} = e_s e^{i\psi}$, где $e_k = \exp \{2\pi i(k-1)/p\}$, получаем, что вместе с функцией $f(z)$ классу $S_{np}^*(M)$ ($n \geq 2p$) принадлежит при малых $\tau > 0$ функция

¹ Здесь и дальше через $o(\tau)$ обозначается некоторая функция, для которой равномерно внутри E $o(\tau)/\tau \rightarrow 0$ при $\tau \rightarrow 0$.

$$f_*(z) = f(z) + \tau z f'(z) \left(\frac{e^{i p \theta} | z^p}{e^{i p \theta} - z^p} - \frac{e^{i p \psi} | z^p}{e^{i p \psi} - z^p} \right) + o(\tau). \quad (4)$$

Аналогично находим, что вместе с функцией $f(z)$ классу S_{nrp}^* ($n \geq 4p$) принадлежит при малых $\tau > 0$ функция

$$f_*(z) = f(z) + \tau z f'(z) \left(\frac{1 - z^{2p}}{1 - 2z^p \cos p\theta | z^{2p}} - \frac{1 - z^{2p}}{1 - 2z^p \cos p\psi | z^{2p}} \right) + o(\tau). \quad (5)$$

Из (4) и (5), пользуясь соотношением $F(\xi) = f^{-1}(\xi^{-1})$, устанавливающим взаимно однозначное соответствие между классами S и Σ , получаем вариационные формулы

$$F_*(\zeta) = F(\zeta) + \tau \zeta F'(\zeta) \left(\frac{e^{-i p \theta} | \zeta^p}{e^{-i p \theta} - \zeta^p} - \frac{e^{-i p \psi} | \zeta^p}{e^{-i p \psi} - \zeta^p} \right) + o(\tau) \quad (6)$$

в классе $\Sigma_{nrp}^*(m)$ и

$$F_*(\zeta) = F(\zeta) + \tau \zeta F'(\zeta) \left(\frac{1 - \zeta^{2p}}{1 - 2\zeta^p \cos p\theta | \zeta^{2p}} - \frac{1 - \zeta^{2p}}{1 - 2\zeta^p \cos p\psi | \zeta^{2p}} \right) + o(\tau) \quad (7)$$

в классе $\Sigma_{nrp}^*(m)$.

Формулы (4), (5), (6), (7) остаются справедливыми в классах S_{nr}^* , S_{nrp}^* , Σ_{nr}^* , Σ_{nrp}^* соответственно. Подчеркнем, что $f(e^{i\theta})$ и $f(e^{i\psi})$ обозначают подвижные концы разрезов.

2. Пусть $B \subset C_z$ и $K = \{f(z), z \in B\}$ — некоторый компактный в себе относительно равномерной сходимости внутри B класс аналитических функций $f(z)$, допускающих в B гомотопию в фиксированную функцию $f_0(z) \in K$. Все упомянутые в $n^{\text{ой}}$ классы функций обладают указанными свойствами.

Следуя [3], напомним несколько известных понятий и фактов.

Ограниченный комплекснозначный функционал $I(f)$ называется слабо дифференцируемым на классе K , если для любой функции $f(z) \in K$ и функции $f_*(z) = f(z) + \tau P(z) + o(\tau) \in K$ ($\tau > 0$), равномерно внутри B дифференцируемой по τ при $\tau = 0$, существует функциональная производная

$$\lim_{\tau \rightarrow +0} \frac{I(f_*) - I(f)}{\tau} = \Phi[f, P],$$

представимая в виде следующей суммы двух линейных функционалов $\Phi^{(1)}[f, P]$ и $\Phi^{(2)}[f, P]$ на классе мероморфных функций P :

$$\Phi[f, P] = \Phi^{(1)}[f, P] + \overline{\Phi^{(2)}[f, P]}.$$

Непрерывная система $I(f) = \{I_n(f)\}$ ($n = 1, 2, \dots$) слабо дифференцируемых функционалов со сходящейся суммой квадратов модулей называется слабо дифференцируемой, если $\sum_{n=1}^{\infty} |\Phi_n[f, P]|^2 < +\infty$, где $\Phi_n[f, P]$ — функциональная производная для $I_n(f)$ на классе K .

Множество G значений $I(f) = \{I_n(f)\}$ в пространстве l^2 на классе K связно и замкнуто. Точка $I^0 = \{I_n^0\}$ границы ∂G области G называется неособой [8], если существует такая точка $I^e = \{I_n^e\}$, что $\rho(I^0, I^e) =$

$= \min_{I \in G} \rho(I, I^e)$ ($\rho(x, y)$ — расстояние между элементами x и y пространства l^2). Остальные точки границы ∂G , называемые особыми, являются предельными для неособых граничных точек. Функции из K , вносящие в G неособые граничные точки, называются граничными функциями относительно $I(f)$ на классе K .

Доказательство нижеследующей леммы опирается на необходимое условие ([3]) для граничных функций, состоящее в том, что если функция $f(z)$ вносит в область G неособую граничную точку $I^0 = \{I_n^0\}$, то выполнено неравенство $\operatorname{Re}(\Phi[f, P], N) \geq 0$, $N = I^0 - I^e$.

Формулы (4)–(7) можно записать в виде $f_*(z) = f(z) + \tau P(z; \lambda') - \tau P(z; \lambda'') + o(\tau)$, где $\lambda', \lambda'' \in (-\pi, \pi]$. Обозначим для фиксированного z и данной f

$$\varphi(\lambda) = (\Phi[f, P], N). \quad (8)$$

Л е м м а. Пусть $I(f) = \{I_n(f)\}$ — слабо дифференцируемая система функционалов на классе² $S^*(M)$, для которой уравнение $\operatorname{Re} \varphi(\lambda) = A$ имеет не более $2N$ корней на промежутке $(-\pi, \pi]$ при любом вещественном A . Тогда все граничные функции относительно $I(f)$ принадлежат классу $S_N^*(M)$.

Доказательство. Сначала докажем, что если $f_n(z)$ — граничная функция относительно $I(f)$ на классе $S_n^*(M)$, то $f_n(z) \in S_{2N}^*(M)$. Допустим противное. Пусть $f_n(e^{i\lambda_k}), |f(e^{i\lambda_k})| < M$, $\lambda_k \in (-\pi, \pi]$ ($k=1, \dots, 2N+1$) — концы разрезов, входящих в состав $\partial f_n(E)$ ($n > 2N$). Среди чисел $\lambda_1, \dots, \lambda_{2N+1}$ можно найти такие два числа θ и ν , что $\operatorname{Re} \varphi(\theta) < \operatorname{Re} \varphi(\nu)$. Значит, $\operatorname{Re}(\Phi[f, P], N) < 0$, чего не может быть для граничной функции.

Пусть теперь $f(z)$ — граничная функция относительно $I(f)$ на классе $S^*(M)$. В силу плотности $\bigcup_{n=1}^{\infty} S_n^*(M)$ в $S^*(M)$ функция $f(z)$ представляема в виде равномерного внутри E предела $f(z) = \lim_{k \rightarrow \infty} f_{n_k}(z)$, где $f_{n_k}(z)$ — граничная функция относительно $I(f)$ на классе $S_{n_k}^*(M)$. Поскольку $f_{n_k}(z) \in S_{2N}^*(M)$, и класс $S_{2N}^*(M)$ — компактный в себе, то $f(z) \in S_{2N}^*(M)$. Покажем, что $f(z) \in S_N^*(M)$. Снова допуская противное, обозначим через $f(e^{i\lambda_s}), |f(e^{i\lambda_s})| < M$, $\lambda_s \in (-\pi, \pi]$ ($s=1, \dots, N+1$) концы разрезов, содержащихся в $\partial f(E)$. Если среди чисел $\lambda_1, \dots, \lambda_{N+1}$ найдутся такие два числа θ и ν , что $\operatorname{Re} \varphi(\theta) \neq \operatorname{Re} \varphi(\nu)$, то, как и выше, придем к противоречию. Если же $\operatorname{Re} \varphi(\lambda_1) = \dots = \operatorname{Re} \varphi(\lambda_{N+1}) = m$, то $m < \max_{-\pi < \lambda \leq \pi} \operatorname{Re} \varphi(\lambda)$ (так как функция $\operatorname{Re} \varphi(\lambda)$, очевидно, не может иметь на $(-\pi, \pi]$ более N различных точек глобального максимума). Выбирая тогда $\nu \in (-\pi, \pi)$ такое, что $\operatorname{Re} \varphi(\theta) < \operatorname{Re} \varphi(\nu)$ где $\theta = \lambda_1$, и выпуская из $f(e^{i\nu})$ радиальный разрез, получим используя в качестве функций сравнения функции вида (4), что $\operatorname{Re}(\Phi[f, P], N) < 0$. Но для граничной функции это невозможно. Лемма доказана.

3. Примерами слабо дифференцируемых систем функционалов являются конечные системы $I(f) = \{I_1(f), \dots, I_r(f)\}$ функционалов

$$I_n(f) = J_n u_{01}, v_{01}, \dots, u_{s,1}, v_{s,1}; \dots; u_{0r}, v_{0r}, \dots, u_{s,r}, v_{s,r}, \quad (9)$$

где J_n ($n=1, \dots, r$) — произвольные функции, аналитически зависящие

² Класс $S^*(M)$ взят лишь для определенности. Утверждение справедливо и для классов $S_p^*(M), S_{rp}^*(M), S_p^* \cap S_{rp}^*$, а также для $\Sigma_p^*(m), \Sigma_{rp}^*(m), \Sigma_p^*, \Sigma_{rp}^*$.

от $u_{kj}=f^{(k)}(z_j)$, $v_{kj}=\overline{f^{(k)}(z_j)}$ ($k=0, \dots, s_j$; $j=1, \dots, l$),

$z_1, \dots, z_l$ — различные фиксированные в E точки, f пробегает класс S или какой-нибудь его подкласс, а также системы $I(F) = \{I_1(F), \dots, I_r(F)\}$ функционалов

$$I_n(F) = J_n(u_{01}, v_{01}, \dots, u_{s_1 1}, v_{s_1 1}; \dots; u_{0l}, v_{0l}, \dots, u_{s_l l}, v_{s_l l}), \quad (10)$$

где J_n ($n=1, \dots, r$) — произвольные функции, аналитически зависящие от $u_{kj}=F^{(k)}(z_j)$, $v_{kj}=\overline{F^{(k)}(z_j)}$ ($k=0, \dots, s_j$; $j=1, \dots, l$), $\zeta_1, \dots, \zeta_l$ — различные фиксированные в Ω точки, F пробегает класс Σ или какой-нибудь его подкласс.

Для функционалов (9) и (10) функциональная производная имеет вид

$$\Phi_n[f, P] = \sum_{j=1}^l \sum_{k=0}^{s_j} \left(a_{kj}^{(n)} \frac{d^k}{dz^k} P(z_j) + \overline{b_{kj}^{(n)}} \frac{d^k}{dz^k} P(z_j) \right), \quad (11)$$

где $a_{kj}^{(n)} = \frac{\partial J_n}{\partial u_{kj}}$, $b_{kj}^{(n)} = \frac{\partial J_n}{\partial v_{kj}}$ — величины, зависящие только от f или F соответственно.

Следуя [7], граничную относительно системы функционалов (9) или (10) функцию $\hat{f}(z)$ назовем граничной функцией первого рода, если для нее

$$\sum_{n=1}^r \sum_{j=1}^l \sum_{k=0}^{s_j} |a_{kj}^{(n)} \bar{N}_n + \overline{b_{kj}^{(n)}} N_n| \neq 0, \quad (12)$$

где $N_n = I_n^0 - I_n^e$, $I_n^0 = \{I_1^0, \dots, I_r^0\} = I(f)$, $I^e = \{I_1^e, \dots, I_r^e\}$ — внешняя точка.

Число $Q = s_1 + \dots + s_l$ называется порядком функционала (9) или (10).

Теорема 1. *Граничные функции первого рода относительно конечной системы функционалов вида (9) (или (10)) на классе $S_p^*(M)$ (классе $\Sigma_p^*(m)$), отображают круг E (область Ω) на круг D_m (область Δ_m) с N разрезами вдоль радиальных отрезков, обладающих p -кратной симметрией вращения относительно точки $\omega=0$ (точки $\omega=0$), причем $N \leq p(Q+1)$, если все $z_k \neq 0$, $k=1, \dots, l$ (все ζ_k конечны, $k=1, \dots, l$), и $N \leq p(Q+l-2)$, если одно из z_k равно нулю (одно из ζ_k равно бесконечности).*

Доказательство. В соответствии с утверждением леммы, все граничные функции относительно системы $I(\hat{f})$ функционалов $I_n(\hat{f})$ ($n=1, \dots, r$) вида (9) на классе $S_p^*(M)$ принадлежат классу $S_{Np}^*(M)$. Остается установить оценку сверху для числа $2N$ корней уравнения $\text{Re} f(\lambda) = A$ на $(-\pi, \pi]$.

Простыми вычислениями, пользуясь формулой (4), получим

$$\varphi(\lambda) = \sum_{n=1}^r \sum_{j=1}^l \sum_{k=0}^{s_j} \gamma_{kj}^{(n)} \frac{d^k}{dz^k} \left[z f'(z) \frac{e^{l p \lambda} + z^p}{e^{l p \lambda} - z^p} \right]_{z=z_j},$$

где $\gamma_{kj}^{(n)} = a_{kj}^{(n)} \bar{N}_n + \overline{b_{kj}^{(n)}} N_n$ не обращаются в нуль одновременно.

Заметим, что

$$\sum_{k=0}^{s_j} \gamma_{kj}^{(n)} \frac{d^k}{dz^k} \left[z f'(z) \frac{e^{l p \lambda} + z^p}{e^{l p \lambda} - z^p} \right]_{z=z_j} = \frac{H_{s_j+1}^{(n)}(e^{l p \lambda})}{(e^{l p \lambda} - z_j^p)^{s_j+1}},$$

где $H_{s_j+1}^{(n)}(e^{ip\lambda})$ — некоторый многочлен, порядок которого относительно $e^{ip\lambda}$ не выше, чем s_j+1 , и

$$\sum_{j=1}^l \frac{H_{s_j+1}^{(n)}(e^{ip\lambda})}{(e^{ip\lambda} - z_j^p)^{s_j+1}} = \frac{L_{Q+l}^{(n)}(e^{ip\lambda})}{\prod_{j=1}^l (e^{ip\lambda} - z_j^p)^{s_j+1}}, \quad (1)$$

где $L_{Q+l}^{(n)}(e^{ip\lambda})$ — также некоторый многочлен относительно $e^{ip\lambda}$, порядок которого не превосходит числа $Q+l$. Следовательно, уравнение

$$\operatorname{Re}(\lambda) = \frac{G_{2p(Q+l)}(e^{i\lambda})}{\prod_{j=1}^l [(e^{ip\lambda} - z_j^p)(1 - e^{ip\lambda} \bar{z}_j^p)]^{s_j+1}} = A,$$

где $G_{2p(Q+l)}(e^{i\lambda})$ — многочлен, порядок которого относительно $e^{i\lambda}$ не выше, чем $2p(Q+l)$, и таким же является выражение в знаменателе, может иметь на $(-\pi, \pi]$ не более, чем $2p(Q+l)$ корней. Поэтому, $N \leq p(Q+l)$. Далее, если, например, $z_l = 0$, то

$$\sum_{k=0}^{s_j} \gamma_{kl}^{(n)} \frac{d^k}{dz^k} \left[z f'(z) \frac{e^{ip\lambda} - z^p}{e^{ip\lambda} - z^p} \right]_{z=0} = \frac{H_{s_l-1}^{(n)}(e^{ip\lambda})}{e^{ip(s_l-1)\lambda}},$$

где $H_{s_l-1}^{(n)}(e^{ip\lambda})$ — многочлен относительно $e^{ip\lambda}$, имеющий порядок не выше s_l-1 . Аналогично общему случаю отсюда следует что $N \leq p(Q+l-2)$. Наконец, если рассматривается система функционалов вида (10) на классе $\Sigma_p^*(m)$, то она определяет некоторую систему функционалов вида (9) на классе $S_p^*(m^{-1})$ (благодаря связи между этими классами). Применяя к ней уже доказанные результаты, получаем то, что требуется. Теорема полностью доказана.

Следствие. Все граничные функции первого рода относительно конечной системы функционалов вида $I_n(f) = J_n(c_2, \bar{c}_2, \dots, c_q, \bar{c}_q)$ на классе $S^*(M)$ (соответственно функционалов вида $I_n(F) = J_n(a_1, \bar{a}_1, \dots, a_{q-1}, \bar{a}_{q-1})$ на классе $\Sigma^*(m)$) отображают круг E (область Ω) на круг D_M (область Δ_m) с N разрезами вдоль радиальных отрезков, причем $N \leq q-1$.

Теорема 2. Граничные функции первого рода относительно конечной системы функционалов вида (9) (или (10)) на классе $S_{rp}^*(M)$ (классе $\Sigma_{rp}^*(m)$) отображают круг E (область Ω) на круг D_M (область Δ_m) с N разрезами вдоль радиальных отрезков, обладающими симметрией относительно вещественной оси и p -кратной симметрией вращения относительно точки $\omega=0$ (точки $\omega=0$), причем $N \leq 2p(Q+l)$, если все $z_k \neq 0, k=1, \dots, l$ (все ζ_k конечны, $k=1, \dots, l$) и $N \leq 2p(Q+l-2)$, если одно из z_k равно нулю (одно из ζ_k равно бесконечности).

Доказательство этой теоремы выполняется аналогично доказательству теоремы 1. Функция $\varphi(\lambda)$ в данном случае принимает вид

$$\varphi(\lambda) = \sum_{n=1}^r \sum_{j=1}^l \sum_{k=0}^{s_j} \gamma_{kj}^{(n)} \frac{d^k}{dz^k} \left[z f'(z) \frac{1 - z^{2p}}{1 - 2z^p \cos d\lambda + z^{2p}} \right]_{z=z_j}.$$

Далее,

$$\sum_{k=0}^{s_j} \gamma_k^{(n)} \frac{d^k}{dz^k} \left[z f'(z) \frac{1-z^{2p}}{1-2z^p \cos p\lambda + z^{2p}} \right]_{z=z_j} = \frac{H_{s_j}^{(n)}(\cos p\lambda)}{(1-2z_j^p \cos p\lambda + z_j^{2p})^{s_j+1}},$$

где $H_{s_j}^{(n)}(\cos p\lambda)$ — некоторый многочлен, порядок которого относительно $\cos p\lambda$ не выше, чем s_j ; отсюда

$$\sum_{j=1}^l \frac{H_{s_j}^{(n)}(\cos p\lambda)}{(1-2z_j^p \cos p\lambda + z_j^{2p})^{s_j+1}} = \frac{L_{Q+l}^{(n)}(\cos p\lambda)}{\prod_{j=1}^l (1-2z_j^p \cos p\lambda + z_j^{2p})^{s_j+1}},$$

где $L_{Q+l}(\cos \lambda)$ — многочлен, порядок которого относительно $\cos p\lambda$ не превосходит числа $Q+l$. Таким образом, уравнение $\operatorname{Re} f(\lambda) = A$ принимает вид

$$\frac{G_{2p(Q+l)}(\cos \lambda)}{\prod_{j=1}^l (1-2z_j^p \cos p\lambda + z_j^{2p})^{2(s_j+1)}} = A,$$

где $G_{2p(Q+l)}(\cos \lambda)$ — многочлен относительно $\cos \lambda$, порядок которого не выше, чем $2p(Q+l)$, и таким же является многочлен относительно $\cos \lambda$, стоящий в знаменателе левой части уравнения. Следовательно, уравнение $\operatorname{Re} f(\lambda) = A$ имеет не более $4p(Q+l)$ корней на $(-\pi, \pi]$, и поэтому $N \leq 2p(Q+l)$. Если, например, $z_l = 0$, то

$$\sum_{k=0}^{s_l} \gamma_{kl}^{(n)} \frac{d^k}{dz^k} \left[z f'(z) \frac{1-z^{2p}}{1-2z^p \cos p\lambda + z^{2p}} \right]_{z=0} = H_{s_l-1}^{(n)}(\cos p\lambda),$$

где $H_{s_l-1}^{(n)}(\cos p\lambda)$ — многочлен, порядок которого относительно $\cos p\lambda$ не превосходит числа s_l-1 . Отсюда, как и выше, получаем, что $N \leq 2p(Q+l-2)$.

Следствие. Все граничные функции первого рода относительно конечной системы функционалов вида $I_n(f) = J_n(c_2, \bar{c}_2, \dots, c_q, \bar{c}_q)$ на классе $S_r^*(M)$ (соответственно функционалов $I_n(F) = J_n(\alpha_1, \bar{\alpha}_1, \dots, \alpha_{q-1}, \bar{\alpha}_{q-1})$ на классе $\Sigma_r^*(m)$) отображают круг E (область Ω) на круг D_m (область Δ_m) с N разрезами вдоль радиальных отрезков, симметричными относительно вещественной оси, причем $N \leq 2(q-1)$.

Замечание. Доказанные теоремы и следствия из них (с соответствующими изменениями) справедливы также в классах S_p^* , Σ_p^* , S_{rp}^* , Σ_{rp}^* . В этих случаях они являются известными ([4], [5]). Причем, как показано в [6], при $l=r=1$ оценка для N может быть улучшена.

4. Для функций, отображающих E на D_m с одним или двумя диаметрально противоположными разрезами вдоль радиальных отрезков, можно элементарно найти выражения. Например, функции

$$f_0(z) = \frac{z}{\psi^2(x, M)}, \quad g_0(z) = \frac{z}{\psi(x^2, M^2)},$$

где $x = ze^{-i\theta}$, $-\pi < \theta \leq \pi$, $\Psi(x, M) = (1+x+\sqrt{1+x^2+2(1-2/M)x})/2$, отображают E на D_m с разрезом вдоль радиального отрезка $[Me^{i\theta}, Me^{i\theta}(\sqrt{M}-\sqrt{M-1})^2]$ и на D_m с двумя разрезами равной длины вдоль радиальных отрезков $[\pm Me^{i\theta}, \pm Me^{i\theta}(M-\sqrt{M^2-1})]$ соответственно.

Введем обозначения:

$$\rho(\alpha) = \sqrt{1 - r^2 e^{2i\alpha} - 2(1-2M)re^{i\alpha}},$$

$$\psi(\alpha) = (1 - re^{i\alpha} - \rho(\alpha))^2, \quad 0 < r < 1.$$

Вычисляя значения простейших функционалов на указанных функциях и отыскивая среди них экстремальные значения, получаем следующие теоремы.

Теорема 3. При фиксированном $z \in E$, $|z| = r$, на классе $S^*(M)$, $M > 1$, справедлива точная оценка

$$\frac{1}{|\psi(\alpha_1)|^2} \leq \left| \frac{f(z)}{z} \right| \leq \frac{1}{|\psi(\alpha_2)|^2},$$

где α_1 и α_2 — те корни уравнения

$$r \sin \alpha + \frac{2}{M} \operatorname{Im} \left\{ \frac{r^2 - re^{i\alpha}}{\psi(\alpha)} \right\} = 0,$$

для которых $|\psi(\alpha)|$ принимает наибольшее и наименьшее значения соответственно.

В частности, если $2 \leq M < \infty$, то

$$\left| \frac{f(z)}{z} \right| \geq \frac{4}{(1+r + \sqrt{(1+r)^2 - 4rM})^2}.$$

Если $2 \leq \frac{1+r^2}{(1-r)^2} \leq M < \infty$, то

$$\left| \frac{f(z)}{z} \right| \leq \frac{4}{(1+r + \sqrt{(1+r)^2 - 4rM})^2}.$$

Теорема 4. При фиксированном $z \in E$, $|z| = r$, на классе $S^*(M)$, $M > 1$, справедлива точная оценка

$$\left| \arg \frac{f(z)}{z} \right| \leq |\arg \psi(\alpha_3)|,$$

где α_3 — корень уравнения

$$\begin{aligned} |\psi(\alpha)|^2 (r + \cos \alpha) - \frac{2r}{M^2} \left[4r - 4 + M \left(3r + \frac{1}{r} \right) \cos \alpha \right] - \\ - \frac{2}{M} \operatorname{Re} \{ (3r + e^{i\alpha}) \rho(\alpha) \} = 0, \end{aligned}$$

дающий наибольшее значение $|\arg \psi(\alpha)|$.

Следствие. На классе S^* справедливы следующие точные оценки (полученные вариационным методом в [4]):

$$\frac{1}{(1+r)^2} \leq \left| \frac{f(z)}{z} \right| \leq \frac{1}{(1-r)^2},$$

$$\left| \arg \frac{f(z)}{z} \right| \leq 2 \arcsin r, \quad r = |z|.$$

Теорема 5. Пусть $z \in E$ фиксировано, $|z| = r$. Тогда

а) для $1 < M < \infty$ справедливы неравенства

$$\frac{1-r}{1+r} \leq \min_{f \in S^*(M)} \left| \frac{zf'(z)}{f(z)} \right| \leq \left| \frac{1-re^{i\alpha_4}}{\rho(\alpha_4)} \right|,$$

$$\left| \frac{1-re^{i\alpha_5}}{\rho(\alpha_5)} \right| \leq \max_{f \in S^*(M)} \left| \frac{zf'(z)}{f(z)} \right| \leq \frac{1+r}{1-r},$$

где α_4 и α_5 — корни уравнения

$$\sin \alpha \left[\cos^2 \alpha - \frac{16r}{M(1-r^2)} \cos \alpha + \frac{(1-r^2)^2}{r^2} - \frac{8}{M} \right] = 0,$$

дающие $\left| \frac{1-re^{i\alpha}}{\rho(\alpha)} \right|$ наименьшее и наибольшее значения соответственно;

б) в частности, для $2 \leq M < \infty$ справедливы неравенства

$$\frac{1-r}{1+r} < \min_{f \in S^*(M)} \left| \frac{zf'(z)}{f(z)} \right| \leq \frac{1-r}{\sqrt{(1+r)^2 - 4r/M}},$$

$$\frac{1+r}{\sqrt{(1-r)^2 + 4r/M}} \leq \max_{f \in S^*(M)} \left| \frac{zf'(z)}{f(z)} \right| < \frac{1+r}{1-r}, \quad (*)$$

в каждом из которых крайние оценки имеют общий предел при $M \rightarrow \infty$;

в) если $r > r_1$, где r_1 — единственный в промежутке $(0,1)$ корень уравнения

$$2r^4 - 3r^3 - 3r - 2 = 0,$$

то для $2 \leq M \leq \frac{r(1+r)^2}{(1-r)(1-r^4)}$ более точной, чем (*), является оценка

$$\frac{1+r^2}{\sqrt{(1-r^2)^2 + 4r^2/M^2}} \leq \max_{f \in S^*(M)} \left| \frac{zf'(z)}{f(z)} \right| \leq \frac{1+r}{1-r}.$$

Замечание. Можно доказать существование такого числа $r_0 > 0$, что при $|z| < r_0$ экстремальные функции для $|zf'(z)/f(z)|$ на классе $S^*(M)$, $1 < M < \infty$ принадлежат семейству $f_\theta(z)$, $\pi < \theta \leq \pi$. С другой стороны, утверждение (в) теоремы 5 показывает, что при r , достаточно близких к 1, функции указанного семейства не являются экстремальными для $|zf(z)/f(z)|$ на классе $S^*(M)$, если $1 < M < M_0$ для некоторого M_0 .

Теорема 6. При фиксированном $z \in E$, $|z| = r$, справедливо неравенство

$$\left| \arg \frac{1-re^{i\alpha_6}}{\rho(\alpha_6)} \right| \leq \max_{f \in S^*(M)} \left| \arg \frac{zf'(z)}{f(z)} \right| \leq \arcsin \frac{2r}{1+r^2},$$

в котором предел при $M \rightarrow \infty$ отношения крайних оценок равен единице. Здесь α_6 — тот корень уравнения

$$\cos^2 \alpha - \frac{1-r^2}{2r} \cos \alpha + \frac{2}{M} = 0,$$

для которого $\left| \arg \frac{1-re^{i\alpha}}{\rho(\alpha)} \right|$ имеет наибольшее значение.

ЛИТЕРАТУРА

1. Александров И. А. Вариационный метод решения экстремальных проблем в некоторых классах аналитических функций. ДАН, 151, 5 (1963), 999—1002.
2. Александров И. А. Введение в геометрическую теорию функций. Донецкий ун-т, Ин-т прикл. матем. и мех. АН УССР, Донецк, 1972.
3. Александров И. А. Области значений систем функционалов «Труды Томского ун-та», 182 (1965), 59—70.
4. Александров И. А. Вариационные задачи для звездообразных однолистных в круге функций. «Изв. АН Арм. ССР», 14, 4 (1931), 7—19.
5. Александров И. А., Черников В. В. Экстремальные свойства звездообразных отображений. Сибирск. матем. ж., 4, 2 (1963), 961—976.
6. Александров И. А., Черников В. В. Об экстремальных свойствах одностолбчатых звездообразных отображений. Сибирск. матем. ж., 4, 6 (1963), 1201—1207.
7. Андреев В. А. Некоторые задачи о неналегающих областях СМЖ. 17, 3 (1976). 483—498.
8. Лебедев Н. А. Мажорантная область для выражения $l = \ln z^\lambda f'^{1-\lambda} / f^\lambda$ на классе S. Вест. Ленингр. ун-та, 8, 3 (1955), 29—41.
9. Barnard R. A. variational technique for bounded starlike functions. Can. J. Math. 27, 2 (1975), 337—347.
10. Krzyż J. Distortion theorems for bounded convex functions Bull. Acad. polon. sci. math., astron. et phys. 8, 9 (1960), 625—627.

ОБ ОТОБРАЖЕНИЯХ НА КРУГОВЫЕ МНОГОУГОЛЬНИКИ

Г. М. КЕСЕЛЬМАН

1. Односвязную область $B \subset \mathbb{C}_w$ назовем областью типа (λ) относительно точки $w_0 \in C_w$, если:

а) граница ∂B состоит из конечного числа дуг концентрических окружностей с центрами в точке $w = w_0$ и отрезков, идущих из точки $w = w_0$ лучей;

б) либо $w_0 \in B$, либо $\infty \in B$;

в) w_0 не принадлежит множеству ∂B и ∞ не принадлежит множеству ∂B .

Конечные области типа (λ) относительно точки $w = 0$ будем называть (для краткости) λ -областями. Отметим, что любую область типа (λ) можно преобразовать в λ -область с помощью дробно-линейной функции.

Теорема 1. Если функция $w = f(z)$, $f(0) = 0$, реализует однолистное и конформное отображение круга $E = \{z: |z| < 1\}$ на некоторую λ -область B , то

$$\frac{zf'(z)}{f(z)} = \prod_{k=1}^m \left(1 - \frac{z}{a_k}\right)^{v_k}, \quad v_k = \alpha_k - 1, \quad (1)$$

где $a_k = e^{i\varphi_k}$ ($\varphi_1 < \varphi_2 < \dots < \varphi_m < \varphi_1 + 2\pi$) прообразы при отображении $f(z)$ вершин A_k области B , $\alpha_k \pi$ — величины внутренних углов при этих вершинах ($k = 1, \dots, m$).

Прежде чем доказывать теорему, сделаем

Замечание. Вершины $A_1, \dots, A_m$ являются достижимыми граничными точками области B ; поэтому если в некоторой точке w лежит несколько угловых граничных точек, то столько же будет и вершин.

Множество индексов $M = \{1, \dots, m\}$ можно разбить на три попарно непересекающихся подмножества

$$P = \{k_q \in M: \alpha_{k_q} = 1/2, q = 1, \dots, p\}.$$

$$L = \{k_j \in M: \alpha_{k_j} = 3/2, j = 1, \dots, l\},$$

$$N = \{k_s \in M: \alpha_{k_s} = 2, s = 1, \dots, n\}.$$

При этом $m = p + l + n$.

Обозначим

$$\begin{aligned} b_q &= e^{i\beta_q} = a_{k_q}, \text{ если } k_q \in P, \quad q=1, \dots, p; \\ c_j &= e^{i\gamma_j} = a_{k_j}, \text{ если } k_j \in L, \quad j=1, \dots, l; \\ \mu_s &= e^{i\lambda_s} = a_{k_s}, \text{ если } k_s \in N, \quad s=1, \dots, n. \end{aligned}$$

Тогда формула (1) примет вид

$$\frac{zf'(z)}{f(z)} = \prod_{s=1}^n \left(1 - \frac{z}{\mu_s}\right) \prod_{j=1}^l \left(1 - \frac{z}{c_j}\right)^{1/2} \prod_{q=1}^p \left(1 - \frac{z}{b_q}\right)^{-1/2}. \quad (2)$$

Геометрические рассуждения показывают, что $p=l+2n$. Отсюда следует, что

$$\sum_{k=1}^m \alpha_k = m. \quad (3)$$

Доказательство теоремы. Пусть B — данная λ -область. По теореме Римана существует функция $w=f(z)$, $f(0)=0$, реализующая однолистное и конформное отображение E на B . Выполним (по принципу симметрии) всевозможные аналитические продолжения функции $f(z)$ через дуги a_k окружности $|z|=1$. Для полученной в результате аналитической функции $F(z)$ исходная функция $f(z)$ является в круге E одной из однозначных ветвей. Пусть $f_1(z)$ и $f_2(z)$ — две произвольные однозначные ветви функции $F(z)$ в круге E . Тогда они получены друг из друга четным числом инверсий относительно concentрических окружностей с центрами в начале и зеркальных отражений в прямых, проходящих через начало, и связаны одним из соотношений $f_2 = af_1$ или $f_2 = b/f_1$, где комплексные числа a и b зависят лишь от выбора ветвей. Отсюда следует, что функция

$$g(z) = \left[\frac{zf'(z)}{f(z)} \right]^2, \quad (4)$$

определенная сначала в E , а затем продолженная на всю плоскость $\mathbb{C}_z$, является однозначной функцией, голоморфной всюду, кроме, может быть, точек a_k ($k=1, \dots, m$). Голоморфность функции $g(z)$ в $z=0$ и $z=\infty$ очевидна; при этом

$$g(0) = g(\infty) = 1. \quad (5)$$

Если A_k — концевая точка прямолинейного разреза, то $\alpha_k=2$ и голоморфная в окрестности точки a_k функция $\omega(z) = (f(z) - A_k)^{1/2}$ имеет разложение $\omega(z) = c_1(z - a_k) + c_2(z - a_k)^2 + \dots$, $c_1 \neq 0$. Значит, в этом случае

$$f(z) = A_k + c_2(z - a_k)^2 + \dots \quad (6)$$

в окрестности точки $z = a_k$.

Пусть теперь A_k будет точкой пересечения отрезка и дуги окружности или концевой точкой разреза вдоль дуги окружности. Обозначим через A'_k вторую точку пересечения прямой и окружности, на которых лежат соседние стороны A_{k-1} и A_k и A_k и A_{k+1} , или, если $\alpha_k=2$, отличную от A_k точку, лежащую на дуге, по которой идет разрез. Функция $t = (w - A_k)^{1/\alpha_k} (w - A'_k)^{-1/\alpha_k}$ отображает часть окрестности точки A_k , лежащую в B , на часть окрестности точки

$l=0$, лежащую по одну сторону от некоторой прямой, проходящей через $t=0$. По принципу симметрии функция $\omega(z) = (f(z) - A_k)^{1/\alpha_k} (f(z) - \dots - A_k')^{-1/\alpha_k}$ аналитически продолжима из части окрестности точки a_k , лежащей в E , в часть окрестности, лежащую в $\bar{C}_z \setminus E$, и, следовательно, голоморфна и однолистка в точке a_k и представима рядом Тейлора $\omega(z) = c_1'(z - a_k) + \dots$. Отсюда находим представление для функции $f(z)$

$$f(z) = A_k + \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{j=0}^{\infty} b_{mj} (z - a_k)^{m\alpha_k + j}, \quad b_{10} \neq 0. \quad (7)$$

Разложения (6) и (7) показывают, что однозначная функция $g(z)$ имеет в точках $z = a_k$ ($k = 1, \dots, m$) особенности разве лишь алгебраического характера, которые поэтому обязаны быть полюсами. Значит, функция $g(z)$ представима в виде

$$g(z) = C \prod_{k=1}^m (z - a_k)^{\chi_k}, \quad (8)$$

где χ_k — целые числа, C — некоторое комплексное число. Из (8) получаем, что в окрестности точки a_k

$$g(z) = b_1'(z - a_k)^{\chi_k} + \dots, \quad b_1' \neq 0. \quad (9)$$

В то же время из (7) и (4) находим выражение

$$g(z) = b_1(z - a_k)^{2(\alpha_k - 1)} + \dots, \quad b_1 \neq 0. \quad (10)$$

Сравнивая разложения (9) и (10), устанавливаем: $\chi_k = 2(\alpha_k - 1)$ ($k = 1, \dots, m$). Наконец, заметим, что в силу (3) и (5) $C = 1$ и

$$\prod_{k=1}^m a_k^{v_k} = 1, \quad v_k = \alpha_k - 1, \quad (11)$$

так что (8) совпадает с (1). Теорема доказана.

З а м е ч а н и е. Пусть теперь функция $f(z)$ удовлетворяет уравнению (1), где числа $\alpha_1, \dots, \alpha_m$, каждое из которых равно $1/2$, $3/2$ или 2 , подчинены условию (3) и таковы, что $\lambda\alpha_1, \dots, \lambda\alpha_m$ могут являться величинами углов некоторой λ -области; $a_k = e^{i\varphi_k}$ ($k = 1, \dots, m$; $\varphi_1 < \varphi_2 < \dots < \varphi_m < \varphi_1 + 2\pi$) подчинены условию (11). Функция $f(z)$ голоморфна в E . Записывая уравнение (1) в виде (2), имеем

$$g(z) = \left[\frac{zf'(z)}{f(z)} \right]^2 = \prod_{s=1}^n \left(1 - \frac{z}{a_s} \right)^2 \prod_{j=1}^l \left(1 - \frac{z}{c_j} \right) \prod_{q=1}^p \left(1 - \frac{z}{b_q} \right)^{-1}$$

Таким образом,

$$g(e^{i\varphi}) = \prod_{s=1}^n \sin^2 \frac{\lambda_s - \varphi}{2} \prod_{j=1}^l \sin \frac{\gamma_j - \varphi}{2} \prod_{q=1}^p \sin^{-1} \frac{\beta_q - \varphi}{2}.$$

вещественно при всех $\varphi \in [0, 2\pi]$, $\varphi \neq \varphi_k$ ($k = 1, \dots, m$). Поэтому

$$h(e^{i\varphi}) = \frac{\partial}{\partial \varphi} \arg f(e^{i\varphi}) - i \frac{\partial}{\partial \varphi} \ln |f(e^{i\varphi})|,$$

где

$$h(z) = \frac{zf'(z)}{f(z)} = \frac{1}{i} \frac{\partial \ln f(z)}{\partial \arg z}$$

либо вещественно, либо чисто мнимо на любой дуге $a_k a_{k+1}$ окружности $|z|=1$. Геометрически это означает, что $f(z)$ осуществляет соответствие окружности $|z|=1$ и некоторой ломаной $A_1 A_2 \dots A_m$, состоящей из дуг концентрических окружностей с центрами в начале и отрезков, идущих из начала лучей, причем вершинам A_k соответствуют точки a_k ($k=1, \dots, m$). Вообще говоря, ломаная $A_1, A_2 \dots A_m$ может иметь самопересечения и ограничивать неоднолистную область.

2. Уравнение (1) содержит неизвестные постоянные a_k — прообразы вершин λ -области, нахождение которых составляет самостоятельную задачу. Следующая теорема указывает подход к их нахождению в случае, когда λ -область представляет круг с конечным числом разрезов вдоль радиальных отрезков. В основе ее доказательства лежит идея нахождения постоянных в интеграле Кристоффеля-Шварца, предложенная П. П. Куфаревым ([3], см., также [1], с. 315—327).

Теорема 2. Пусть функция $f(z)$, $f(0)=0$, $f'(0)=R^0>0$ реализует однолистное и конформное отображение круга $E=\{z:|z|<1\}$ на круг $D_M=\{w:|w|<M\}$ с разрезами вдоль n радиальных отрезков, выходящих из точек $Me^{i\theta_s}$ и имеющих длины L_s ($s=1, \dots, n$). Тогда

$$f(z) = R^0 z \exp \left\{ \int_0^z \left[\prod_{s=1}^n (1 - e^{-i\lambda_s} \zeta) \prod_{q=1}^{2n} (1 - e^{-i\beta_q} \zeta)^{-1/2} - 1 \right] \frac{d\zeta}{\zeta} \right\}, \quad (12)$$

где $\lambda_s = \lambda_s(\tau^0)$, $\beta_q = \beta_q(\tau^0)$, а функции $\lambda_1(t), \dots, \lambda_n(t)$, $\beta_1(t), \dots, \beta_{2n}(t)$, удовлетворяющие при $0 < t \leq \tau^0$ неравенствам $\beta_1(t) < \lambda_1(t) < \beta_2(t) < \dots < \beta_{2n-1}(t) < \lambda_n(t) < \beta_{2n}(t) < \beta_1(t) + 2\pi$, являются решением системы дифференциальных уравнений¹

$$\begin{aligned} \frac{d\lambda_s}{dt} &= \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq s}}^n (\delta_j - \delta_s) \operatorname{ctg} \frac{\lambda_s - \lambda_j}{2} - \frac{\delta_s}{2} \sum_{q=1}^{2n} \operatorname{ctg} \frac{\lambda_s - \beta_q}{2}, \\ \frac{d\beta_q}{dt} &= \sum_{j=1}^n \delta_j \operatorname{ctg} \frac{\beta_q - \lambda_j}{2} \quad (s=1, \dots, n; \quad q=1, \dots, 2n) \end{aligned} \quad (13)$$

с начальными данными

$$\lambda_s(+0) = \beta_{2s-1}(+0) = \beta_{2s}(+0) = \theta_s \quad (s=1, \dots, n), \quad (14)$$

в которой действительные коэффициенты $\delta_s = \delta_s(t)$ подчинены условиям: $0 \leq \delta_s(t) \leq 1$, $\delta_1(t) + \dots + \delta_n(t) = 1$ и

$$-\ln \left(1 - \frac{L_s}{M} \right) = \int_0^{\tau^0} \delta_s(t) \prod_{\substack{j=1 \\ j \neq s}}^n \left| \sin \frac{\lambda_j - \lambda_s}{2} \right| \prod_{q=1}^{2n} \left| \sin \frac{\beta_q - \lambda_s}{2} \right|^{-1/2} dt \quad (s=1, \dots, n). \quad (15)$$

Доказательство. Представление (12) функции $f(z)$ вытекает из теоремы 1.

Пусть $B=f(E)$. Укорачивая разрезы (входящие в состав границы ∂B области B), начиная с концов, лежащих в D_M , получим контину-

¹ Численные методы решения подобных систем разработаны в [2].

альное семейство $B(\tau)$ областей, представляющих круг D_M с разрезами вдоль n радиальных отрезков, $B(0)=B$. Функция $\Psi(z, \tau)$, $\Psi(0, \tau)=0$, $\Psi'(0, \tau)=e^z$, однолистно и конформно отображающая E на $B(\tau)$, равномерно внутри E удовлетворяет дифференциальному уравнению ([1], с. 196)

$$\frac{\partial \Psi}{\partial \tau} = z \frac{\partial \Psi}{\partial z} \sum_{s=1}^n \delta_s(\tau) \frac{\mu_s(\tau) + z}{\mu_s(\tau) - z} \quad (16)$$

на некотором промежутке $0 < \tau < \tau^0$, где $\mu_s(\tau)$ — прообразы подвижных конечных точек разрезом при отображении $\Psi(z, \tau)$, $\delta_s(\tau)$ — некоторые действительные коэффициенты, $0 \leq \delta_s(\tau) \leq 1$, $\delta_1(\tau) + \dots + \delta_n(\tau) = 1$.

С другой стороны, по теореме 1 при каждом $\tau \in (0, \tau^0)$ функция $\Psi(z, \tau)$ удовлетворяет уравнению

$$\frac{z \Psi'_z}{\Psi'} = h(z, \tau), \quad (17)$$

где

$$h(z, \tau) = \prod_{s=1}^n \left(1 - \frac{z}{\mu_s(\tau)} \right) \prod_{q=1}^{2n} \left(1 - \frac{z}{b_q(\tau)} \right)^{-1/2}$$

$$\text{и } \Psi(b_{2s-1}(\tau), \tau) = \Psi(b_{2s}(\tau), \tau) = M e^{i\theta_s} (s=1, \dots, n).$$

Из (16) и (17) выводим равенства

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial \tau} h(z, \tau) &= z \frac{\partial}{\partial \tau} \left(\frac{\Psi'_z}{\Psi'} \right) = z \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\Psi'_\tau}{\Psi'} \right) = z \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{z \Psi'_z}{\Psi'} \sum_{s=1}^n \delta_s(\tau) \frac{\mu_s(\tau) + z}{\mu_s(\tau) - z} \right) = \\ &= \sum_{s=1}^n \left[\delta_s \frac{2\mu_s z}{(\mu_s - z)^2} h(z, \tau) + z \frac{\mu_s + z}{\mu_s - z} \frac{\partial}{\partial z} h(z, \tau) \right]. \end{aligned}$$

Следовательно, функция

$$H(z, \tau) = \sum_{s=1}^n \ln \left(1 - \frac{z}{\mu_s(\tau)} \right) - \frac{1}{2} \sum_{q=1}^{2n} \ln \left(1 - \frac{z}{b_q(\tau)} \right) \quad (18)$$

является решением уравнения

$$H'_z = \sum_{s=1}^n \delta_s \left[\frac{2\mu_s z}{(\mu_s - z)^2} + z \frac{\mu_s + z}{\mu_s - z} H'_z \right]. \quad (19)$$

Подставляя (18) в (19), будем иметь соотношение

$$\begin{aligned} \sum_{s=1}^n \left(\frac{1}{\mu_s - z} - \frac{1}{\mu_s} \right) \frac{d\mu_s}{d\tau} - \frac{1}{2} \sum_{q=1}^{2n} \left(\frac{1}{b_q - z} - \frac{1}{b_q} \right) \frac{db_q}{d\tau} = \\ = \sum_{s=1}^n \delta_s \frac{z}{\mu_s - z} \left[1 - (\mu_s + z) \left(\sum_{j=1}^n \frac{1}{\mu_j - z} - \frac{1}{2} \sum_{q=1}^{2n} \frac{1}{b_q - z} \right) \right], \end{aligned} \quad (20)$$

которое должно выполняться при любом $\tau \in (0, \tau^0)$. Приравнявая вычеты левой и правой частей (20) в точках $z = \mu_s$ ($s=1, \dots, n$) и $z = b_q$ ($q=1, \dots, 2n$) и используя тождество $\frac{2\mu_s}{a-\mu_s} + 1 = \frac{a+\mu_s}{a-\mu_s}$, получаем систему

$$\frac{d\mu_s}{d\tau} = -\mu_s \left[\sum_{\substack{j=1 \\ j \neq s}}^n (\delta_j - \delta_s) \frac{\mu_j + \mu_s}{\mu_j - \mu_s} - \frac{\delta_s}{2} \sum_{q=1}^{2n} \frac{b_q + \mu_s}{b_q - \mu_s} \right], \quad (21)$$

$$\frac{db_q}{d\tau} = -b_q \sum_{j=1}^n \delta_j \frac{\mu_j + b_q}{\mu_j - b_q} \quad (s=1, \dots, n; \quad q=1, \dots, 2n)$$

для определения вектор-функции $\{\mu_1(\tau), \dots, \mu_n(\tau), b_1(\tau), \dots, b_{2n}(\tau)\}$
Скорость роста s -го разреза характеризуется производной

$$\frac{d\Psi(\mu_s(\tau), \tau)}{d\tau} = \left[\frac{\partial \Psi}{\partial \tau} + \frac{\partial \Psi}{\partial z} \frac{d\mu_s(\tau)}{d\tau} \right]_{z=\mu_s(\tau)} =$$

$$= \Psi(\mu_s(\tau), \tau) \left[\frac{z \Psi'_z}{\Psi} \sum_{s=1}^n \delta_s \frac{\mu_s + z}{\mu_s - z} + \frac{z \Psi'_z}{\Psi} \frac{\mu_s}{z} \right]_{z=\mu_s(\tau)}.$$

Отсюда и из (17) находим

$$\frac{d}{d\tau} \ln \Psi(\mu_s(\tau), \tau) = 2\delta_s(\tau) \prod_{\substack{j=1 \\ j \neq s}}^n \left(1 - \frac{\mu_s}{\mu_j} \right) \prod_{q=1}^{2n} \left(1 - \frac{\mu_s}{b_q} \right)^{-1/2}. \quad (22)$$

Таким образом, если l_s — текущая длина s -го разреза, то

$$\frac{d}{d\tau} \ln \left(1 - \frac{l_s}{M} \right) = 2\delta_s(\tau) \prod_{\substack{j=1 \\ j \neq s}}^n |\mu_j - \mu_s| \prod_{q=1}^{2n} |b_q - \mu_s|^{-1/2}.$$

Полная длина $\int_0^{\tau_0} \frac{d}{d\tau} \ln(1 - l_s/M) d\tau$ совпадает с заданным числом $\ln(1 - L_s/M)$.

Для того, чтобы получить уравнения (13) и (15), остается в (21) и (22) сделать замену $t = \tau_0 - \tau$ и перейти к вещественным переменным по формулам $\mu_s = e^{i\lambda_s}$ ($s=1, \dots, n$), $b_q = e^{i\beta_q}$ ($q=1, \dots, 2n$). Теорема доказана.

Следствие. Пусть $A(t)$ будет монотонно убывающая на некотором промежутке $(0, \tau_0)$ функция такая, что $A(0) = M$, $A(t) > 0$ и функция $\Psi(z, t)$, $\Psi(0, t) = 0$, $\Psi'(0, t) > 0$, однолистно и конформно отображающая E на круг D_M с разрезом вдоль радиального отрезка $[Me^{i\theta}, A(t)e^{i\theta}]$, $-\pi < \theta \leq \pi$, имеет разложение $\Psi(z, t) = Me^{-t} z + \dots$. Тогда движения точек $e^{i\beta_1(t)}$, $e^{i\lambda(t)}$, $e^{i\beta_2(t)}$, для которых $\Psi(e^{i\beta_1(t)}, t) = \Psi(e^{i\beta_2(t)}, t) = Me^{i\theta}$, $\Psi(e^{i\lambda(t)}, t) = A(t)e^{i\theta}$, описываются уравнениями

$$\lambda(t) = \theta,$$

$$\beta_1(t) = \theta - 2 \arccos e^{-t/2} = \theta - 2\sqrt{t} + \frac{1}{3!}(V\sqrt{t})^3 - \frac{1}{5!} \frac{(V\sqrt{t})^5}{2} + \dots,$$

$$\beta_2(t) = \theta + 2 \arccos e^{-t/2} = \theta + 2\sqrt{t} - \frac{1}{3!}(V\sqrt{t})^3 + \frac{1}{5!} \frac{(V\sqrt{t})^5}{2} - \dots$$

Доказательство выполняется интегрированием системы (13) при $n=1$.

Замечание 1. Произвольная λ -область является ядром семейства λ -областей, представляющих круг D_M с конечным числом прямо-

линейных и круговых разрезов. Поэтому идеи, использованные при доказательстве теоремы 2, применимы и к нахождению постоянных в уравнении (1) для функции, отображающей E на произвольную λ -область.

Замечание 2. В [4] рассмотрена задача о нахождении области G значений конечной системы $I(f) = \{I_n(f)\}$ функционалов $I_n(f)$ ($n=1, \dots, r$) определенного вида на классе $S^*(M)$ ограниченных звездных функций f и показано, что граница ∂G области G принадлежит множеству

$$(I_1(f_N), \dots, I_r(f_N)) \subset C^r,$$

где f_N пробегает класс $S_N^*(M)$ функций, отображающих единичный круг E на круг D_M с N разрезами вдоль радиальных отрезков, причем для N найдена оценка сверху.

Доказанная в данной заметке теорема 2 сводит определение границы ∂G к исследованию на экстремум некоторой функции $2N-1$ действительных переменных (начальные данные θ_s и L_s связаны между собой равенством единице конформного радиуса области $f_N(E)$).

ЛИТЕРАТУРА

1. Александров И. А. Введение в геометрическую теорию функций. Донецкий ун-т, Ин-т прикл. матем. и мех. АН УССР Донецк, 1972.
2. Александров В. П. Применение метода параметрического продолжения при нахождении постоянных в интеграле Кристоффеля-Шварца. Канд. дис. Тюмень, 1975.
3. Куфарев П. П. Об одном методе численного определения параметров в интеграле Шварца Кристоффеля ДАН, 57, 6 (1947), 535—537.
4. Кесельман Г. М. Экстремальные задачи на классах ограниченных звездных функций. Данный том, с 19—28.

ОБ ОЦЕНКАХ КОЭФФИЦИЕНТОВ АВТОМОРФНЫХ ФУНКЦИИ

М. Р. КУБАЕВ

Рассматривается класс автоморфных в единичном круге $E: |w| < 1$ функций

$$z = f(w) = w + c_2 w^2 + \dots, \quad (1)$$

отображающих его на p -связные области, принадлежащие кругу $|z| < R$, $R > 1$. Для этого класса имеют место равенства [1, 2]

$$f(w) = \lim_{t \rightarrow T} e^t \Phi(w, t), \quad (2)$$

$$c_k = \lim_{t \rightarrow T} a_k(t), \quad (3)$$

где

$$z = \Phi(w, t) = e^{-t} [w + a_2(t) w^2 + \dots] \quad (4)$$

отображает E на однопараметрическое семейство p -связных областей $B(t)$, $\tau \leq t \leq T$, $\tau > 0$, получаемых из круга $|z| < 1$ проведением p разрезов по частям

$$z = \varphi_v(\xi), \quad \tau \leq \xi \leq t, \quad v = \overline{1, p},$$

жордановых кривых C_v , не пересекающихся друг с другом и не проходящих через начало координат, C_1 выходит из некоторой точки единичной окружности. Область $B(\tau)$ получается из единичного круга выкалыванием точек $z_v = \varphi_v(\tau)$, $v = \overline{2, p}$, и пусть функция

$$z = \Psi(w) = e^{-\tau} (w + b_2 w^2 + \dots) \quad (5)$$

осуществляет отображение E на $B(\tau)$. Функция $\Phi(w, t)$ удовлетворяет дифференциальному уравнению типа Лёвнера

$$\Phi'_t + w \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{v=1}^p \delta_{nv} \frac{\mu_{nv} + w}{\mu_{nv} - w} \Phi'_w = 0, \quad (6)$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} \sum_{v=1}^p \delta_{nv}(t) = 1, \quad \delta_{nv}(t) > 0, \quad |\mu_{nv}(t)| = 1, \quad (7)$$

и начальному условию

$$\Phi(w, \tau) = \Psi(w). \quad (8)$$

Равенства (2), (3) позволяют задачи для функций (1) сводить к соответствующим задачам для функций (4).

В данной статье рассматривается задача об оценках коэффициентов класса функций (1).

Из дифференциального уравнения (6) и равенств (4), (5), (8) легко получаются дифференциальные уравнения для коэффициентов разложения (4) и начальные условия

$$\begin{aligned} a'_k(t) + (k-1)a_k(t) &= -2 \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{v=1}^p \delta_{nv}(t) \cdot \\ &\cdot \left\{ \bar{\mu}_{nv}^{k-1}(t) + \sum_{j=2}^{k-1} j a_j(t) \bar{\mu}_{nv}^{k-j}(t) \right\}, \\ a_k(\tau) &= b_k. \end{aligned}$$

Интегрируя эти уравнения и используя равенства (7), получим рекуррентное неравенство

$$\begin{aligned} |a_k(t) - b_k e^{(k-1)(\tau-t)}| &\leq \\ &\leq 2 \int_{\tau}^t e^{(k-1)(\xi-t)} \left\{ 1 + \sum_{j=2}^{k-1} j |a_j(\xi) - \right. \\ &\left. - b_j e^{(j-1)(\tau-\xi)}| + |b_j| e^{(j-1)(\tau-\xi)} \right\} |a(\xi)| d\xi. \end{aligned} \quad (9)$$

При $k=2$ отсюда находим

$$\begin{aligned} |a_2(t) - b_2 e^{\tau-t}| &\leq \\ &\leq 2 \int_{\tau}^t e^{\xi-t} d\xi = 2(1 - e^{\tau-t}). \end{aligned} \quad (10)$$

Далее при $k=3$ из рекуррентного неравенства (9) с помощью (10) находим

$$\begin{aligned} |a_3(t) - b_3 e^{2(\tau-t)}| &\leq 5(1 - e^{2(\tau-t)}) + \\ &+ 4(|b_2| - 2)(e^{\tau-t} - e^{2(\tau-t)}). \end{aligned} \quad (11)$$

Аналогично этому с помощью неравенств (10), (11) из (9) находим

$$\begin{aligned} |a_4(t) - b_4 e^{3(\tau-t)}| &\leq \\ &\leq \frac{40}{3}(1 - e^{3(\tau-t)}) + 14(|b_2| - 2)(e^{\tau-t} - e^{3(\tau-t)}) + \\ &+ 2[3|b_3| - 12(|b_2| - 2) - 15](e^{2(\tau-t)} - e^{3(\tau-t)}). \end{aligned} \quad (12)$$

И так далее.

Применим неравенства (10), (11), (12) к получению оценок коэффициентов c_k . Согласно (3) достаточно установить оценки для коэффициентов $a_k(t)$.

Имеют место следующие неравенства:

$$|c_k| \leq \begin{cases} |b_k|, & |b_k| \geq \gamma_k; \\ \gamma_k, & |b_k| < \gamma_k, \end{cases} \quad (13)$$

где величины γ_k будут определены ниже.

Покажем сначала справедливость оценки (13) при $k=2$, где величины $\gamma_2=2$. Предположим противное: при некотором значении t выполнено неравенство

$$|a_2(t)| > |b_2| \geq 2.$$

Тогда

$$\begin{aligned} |a_2(t) - b_2 e^{\tau-t}| &= |a_2(t)| \cdot |1 - b_2 a_2^{-1}(t) e^{\tau-t}| > \\ &> |a_2(t)| (1 - e^{\tau-t}) > 2(1 - e^{\tau-t}), \end{aligned}$$

что противоречит неравенству (10). Аналогично этому предположение $|a_2(t)| > 2$ в случае $|b_2| < 2$ приводит к противоречию и должно быть отброшено. Справедливость оценки (13) для $k=2$, где $\gamma_2=2$, доказана [3].

Покажем теперь справедливость оценки (13) для $k=3$, где положено

$$\gamma_3 = \begin{cases} 2|b_2| + 1, & |b_2| \geq 2; \\ 5, & |b_2| < 2. \end{cases} \quad (14)$$

Вновь предположим противное

$$|a_3(t)| > |b_3| \geq \gamma_3.$$

Тогда

$$|1 - b_3 a_3^{-1}(t) e^{2(\tau-t)}| > 1 - e^{2(\tau-t)}.$$

Из неравенства (11) находим

$$\begin{aligned} |a_3(t)| &< |1 - b_3 a_3^{-1}(t) e^{2(\tau-t)}|^{-1} \{ 5(1 - e^{2(\tau-t)}) + 4(|b_2| - 2)(e^{\tau-t} - e^{2(\tau-t)}) \} < \\ &< (1 - e^{2(\tau-t)})^{-1} \{ 5(1 - e^{2(\tau-t)}) + 4(|b_2| - 2)(e^{\tau-t} - e^{2(\tau-t)}) \} = \\ &= 5 + 4(|b_2| - 2)e^{\tau-t}(1 - e^{\tau-t})^{-1} \leq \\ &\leq \begin{cases} 2|b_2| + 1, & |b_2| \geq 2; \\ 5, & |b_2| < 2, \end{cases} \end{aligned}$$

т. е. $|a_3(t)| < \gamma_3 \leq |b_3|$. Но этому противоречит сделанное допущение. Аналогично этому приводит к противоречию предположение $|a_3(t)| > \gamma_3$ при $\gamma_3 > |b_3|$. Оценка (13) установлена при $k=3$.

Переходим к оценке четвертого коэффициента. Для этого рассмотрим отношение правой части неравенства (12) к $1 - e^{3(\tau-t)}$.

Имеем

$$(1 - e^{3(\tau-t)})^{-1} \left\{ \frac{40}{3} (1 - e^{3(\tau-t)}) + \right.$$

$$\begin{aligned}
& \cdot 14(|b_2|-2)e^{\tau-t}(1-e^{2(\tau-t)}) + \\
& \cdot 6(|b_3|-4 \cdot |b_2| + 3)e^{2(\tau-t)}(1-e^{\tau-t}) = \\
& = \frac{40}{3} + 2(1 + e^{-t} + e^{2(\tau-t)})^{-1} \cdot \\
& \cdot \{7(|b_2|-2)e^{\tau-t} + (3 \cdot |b_3| - 5 \cdot |b_2| - 5)e^{2(\tau-t)}\} \leq \\
\leq \gamma_4 = & \begin{cases} \frac{40 + a + b}{3} & \left\{ \begin{array}{l} \text{при } a > 0 \text{ и } b > 0 \\ \text{или при } a > -b > 0; \\ \text{при } a \leq 0 \text{ и } b \leq 0 \text{ или} \\ \text{при } 0 < -a \leq -b; \end{array} \right. \\ \frac{1}{3}(40 + 2a - b - 2\sqrt{a^2 - ab + b^2}) \\ \text{при } a < 0 \text{ и } b > 0, \end{cases} \quad (15)
\end{aligned}$$

где

$$\begin{aligned}
a &= 6|b_3| - 10 \cdot |b_2| - 10, \\
b &= 14(|b_2| - 2).
\end{aligned}$$

Теперь по методу от противного покажем справедливость оценки (13) при $k=4$.

Поступая аналогичным образом, определим величины γ_k и докажем справедливость оценки (13) при каждом фиксированном k . Пока не удалось получить явного выражения для γ_k при любом k .

Рассмотрим теперь вопрос о точности оценок (13). Ограничимся простейшим случаем двусвязных областей, когда область $B(\tau)$ есть единичный круг $|z| < 1$ с выколотой точкой $z=c$. Путем поворотов вокруг начала координат плоскостей переменных w и z всегда можно добиться, чтобы выколотая точка лежала на положительной части вещественной оси. Функция

$$\begin{aligned}
z &= \frac{c - \exp\left(\frac{1+w}{1-w} \ln c\right)}{1 - c \cdot \exp\left(\frac{1+w}{1-w} \ln c\right)} = \\
&= \frac{-2c \ln c}{1 - c^2} (w + b_2 w^2 + \dots), \quad (16)
\end{aligned}$$

отображает E на область $B(\tau)$. Для коэффициентов разложения этой функции элементарным путем получается рекуррентная формула

$$\begin{aligned}
b_{k+1} \cdot (k+1)! &= \frac{z^{(k+1)}(0)}{z'(0)} = \\
&= 2 \left(k + \frac{1+c^2}{1-c^2} \ln c \right) \frac{z^{(ck)}(0)}{z'(0)} - k(k-1) \frac{z^{(ck-1)}(0)}{z'(0)} + \\
&+ \sum_{m=1}^{k-1} C_k^m z^{(m)}(0) \cdot z^{(k-m)}(0), \quad k \geq 2, \quad (17)
\end{aligned}$$

$$z'(0) = \frac{-2c \ln c}{1 - c^2}, \quad (18)$$

$$b_2 = 1 + \frac{1+c^2}{1-c^2} \ln c, \quad (19)$$

$$b_3 = \frac{2}{3} \left(1 + \frac{1+c^2}{1-c^2} \ln c \right) \left(2 + \frac{1+c^2}{1-c^2} \ln c \right) - \frac{1}{3} + \frac{1}{3} \left(\frac{2c \ln c}{1-c^2} \right)^2, \quad (20)$$

$$b_4 = \frac{1}{3} \left(1 + \frac{1+c^2}{1-c^2} \ln c \right) \left(2 + \frac{1+c^2}{1-c^2} \ln c \right) \cdot \left(3 + \frac{1+c^2}{1-c^2} \ln c \right) - \frac{1}{6} \left(3 + \frac{1+c^2}{1-c^2} \ln c \right) + \frac{1}{6} \left(\frac{2c \ln c}{1-c^2} \right)^2 \left(3 + \frac{1+c^2}{1-c^2} \ln c \right) + \left(1 + \frac{1+c^2}{1-c^2} \ln c \right) \left[\left(\frac{c \ln c}{1-c^2} \right)^2 - \frac{1}{2} \right]. \quad (21)$$

Рекуррентное равенство (17) и формулы (19), (20), (21) показывают, что главный член в выражении коэффициента b_k содержит множителем $\ln c$ в $(k-1)$ -й степени. Величина же γ_k , как это показывает рекуррентное неравенство (9), определяется многочленом первой степени относительно $|b_2|$, ..., $|b_{k-1}|$, т. е. γ_k может содержать $\ln c$ не более, чем в $(k-2)$ -й степени. Следовательно, $|b_k|$ при $c \rightarrow 0$ является бесконечно большой величиной более высокого порядка по сравнению с γ_k . Поэтому существует такое значение c_0 , зависящее от k , что $|b_k| > \gamma_k$ на промежутке $0 < c < c_0$. Последнее показывает, что для каждого фиксированного k оценка $|c_k| \leq |b_k|$ достигается для функции, отображающей круг E на двусвязную область, получаемую из круга $|z| < R$ выкалыванием точки $z = -(1-c^2)(2 \ln c)^{-1}$.

Приведенные рассуждения позволяют высказать предположение: на некотором подклассе ограниченных автоморфных функций наибольшие по модулю коэффициенты имеют функции, отображающие круг E на p -связные области, получаемые из круга выкалыванием $(p-1)$ точек.

ЛИТЕРАТУРА

1. Куваев М. Р. и Куфарев П. П. Об уравнении типа Лёвнера для многосвязных областей. — «Учен. зап. Томского ун-та», 25 (1955), 19—34.
2. Куваев М. Р. Обобщение уравнения типа Лёвнера для автоморфных функций — «Труды Томского ун-та», 144 (1959), 27—30.
3. Куваев М. Р. Об оценке второго коэффициента одного класса автоморфных функций. Доклады VI научной конференции Новокузнецкого пединститута, 1963, 38—39.

ДИСКРЕТНЫЙ АНАЛОГ УРАВНЕНИЯ ЛЕВНЕРА

В. И. ПОПОВ

Один из разделов геометрической теории функций — теория Лёвнера — позволяет получать необходимые условия экстремума для внутренних экстремальных проблем на классах однолистных функций. Переход к дискретному ее аналогу является шагом в направлении достаточных условий экстремума¹.

Основой предлагаемой ниже теории служат

п. 1. Формула С. Л. Соболева. Пусть Q_0 — конечный набор целых комплексных чисел², $0 \in Q_0 = \{q, q-1, q-1-i, q-i \in Q_0\}$ и $C(Q_0)$ — линейное комплексное пространство комплекснозначных на Q_0 функций $f(q)$, $f(0)=0$, с квазинормой $\|f\|_0 = \langle f|\bar{f} \rangle_0^{1/2}$ и скалярным произведением

$$\langle f|\bar{g} \rangle_0 = \sum_{q \in Q_0} \nabla f \bar{\nabla} \bar{g}, \quad (1)$$

где

$$\nabla = \frac{1}{2} \nabla_0 - \frac{i}{2} \nabla_1, \quad \bar{\nabla} = \frac{1}{2} \nabla_0 + \frac{i}{2} \nabla_1. \quad (2)$$

— линейные операторы, а

$$\nabla_0 f(q) = f(q) - f(q-1-i), \quad \nabla_1 f(q) = f(q-1) - f(q-i) \quad (3)$$

— диагонали четырехугольника B_q с вершинами в точках $f(q)$, $f(q-1)$, $f(q-i)$, $f(q-1-i)$. Если эти диагонали перпендикулярны и по длине равны, то $\nabla f(q) = 0$ либо

$$\bar{\nabla} f(q) = 0, \quad (4)$$

а площадь четырехугольника соответственно равна $\frac{1}{2} |\nabla f(q)|^2$ либо $\frac{1}{2} |\bar{\nabla} f(q)|^2$. Суммарная площадь по всем $q \in Q_0$ описывается квази-

¹ В непрерывном случае необходимые условия, близкие к достаточным, дает принцип максимума Л. С. Понтрягина [1—3].

² Комплексное число $q = m + in$ называется целым, если m, n вещественны и целы.

нормой. Если к тому же Q_0 таково, что система уравнений $\bar{\nabla}f(q)=0$ и $\nabla f(q)=0$ имеем в Q_0 единственное решение $f \equiv 0$, то квазинорма становится нормой, а Q_0 называем диагонально связной сеткой.

Определение 1. Условие (4) и эквивалентное условие $\nabla \bar{f}(q)=0$ назовем условиями Коши — Римана, функцию, удовлетворяющую им в Q_0 — голоморфной в Q_0 , а отображение $w=f(q)$ — конформным в Q_0 .

Примерами голоморфных функций являются функции z, z^2 (но не z^3) и

$$g_z(m; in) = \zeta^m \eta^n - 1, \quad (5)$$

где в силу (4)

$$\eta = \eta(\zeta) = \frac{1 \cdot i \zeta}{\zeta + i}. \quad (6)$$

Другие примеры имеются в [4—6] и далее в [7—9]. Для класса $R(Q_0)$ вещественных на Q_0 функций скалярное произведение (1) вещественно и согласно (2)

$$\langle f|g \rangle_0 = \frac{1}{4} \sum_{Q_{(0)} \times I} \nabla_k f \nabla_k g, \quad I = \{0, 1\}. \quad (7)$$

Определение 2. Экстремаль функционала $\|f\|_0$ в классе $R(Q_0)$ с граничным условием $f|_{Q_{(0)}} = \text{fix}$ назовем гармонической функцией в $Q_{(0)}$.

Класс $R(Q_0)$ с граничным условием

$$f|_{Q_{(0)}} = 0 \quad (8)$$

обозначим $R_0(Q_0)$. Полагая $F(q) = f(q) + \epsilon g(q)$, из условия экстремальности $\|f\|_0^2 \leq \|F\|_0^2$ при $\epsilon \rightarrow \pm 0$ получаем уравнение Эйлера

$$\langle f|g \rangle_0 = 0, \quad \forall g \in R_0(Q_0). \quad (9)$$

Базис в $R_0(Q_0)$ образуют функции Дирака $\delta_z(q) \equiv 0$ при $q \neq z$, $\delta_z(z) = 1, z \in Q_0$, и поэтому можно дать эквивалентное определению 2

Определение 2'. Гармоническими в $Q_{(0)}$ функциями называются решения уравнения

$$\langle f|\delta_z \rangle = 0, \quad z \in Q_{(0)}, \quad (10)$$

называемого уравнением Лапласа.

Определение 3. Фундаментальным решением (функцией Грина) для уравнения Лапласа в Q_0 называется экстремаль функционала

$$I_z = \|g\|_0^2 - 2g(z), \quad z \in Q_{(0)}, \quad (11)$$

в классе $R_0(Q_0)$.

Полагая $G(q) = g(q) + \epsilon f(q)$, получаем неравенство $I_z(G) \geq I_z(g)$ и уравнение Эйлера

$$\langle f|g \rangle_0 + (fz) - 0, \quad \forall f \in R_0(Q_0). \quad (12)$$

Решение уравнения $\langle \delta_z|g \rangle_0 + \delta_z(0) = 0$ для всех целых z получено С. Л. Соболевым [10, 11]

$$g(m-in) = \frac{-1}{\pi^2} \int_{|\zeta|=1} \int_{|\eta|=1} \frac{\zeta^m \eta^n - 1}{(\zeta\eta - 1)^2 - (\zeta - \eta)^2} d\zeta d\eta. \quad (13)$$

Легко видеть, что это решение есть линейная комбинация функций (5). Аналогом функции С. Л. Соболева (13) в непрерывном случае (и ее асимптотикой при $|q| \rightarrow \infty$) служит $-\ln|q|$. Симметрия функции С. Л. Соболева $g(q) = g(\bar{q}) = g(iq)$ позволит нам в дальнейшем получить функции Грина для ряда простейших сеток.

Функции Грина для сложных сеток — рекуррентно — дает п. 2. Метод Адамара. В современной литературе, без ссылок на первоисточники [12, 13], метод Адамара именуют методом инвариантного погружения [14].

Мы продемонстрируем метод Адамара на так называемых обобщенных функциях Грина, играющих большую роль в конформном отображении многосвязных областей.

Пусть $R_t(Q_0)$ — класс функций из $R_0(Q_0)$, удовлетворяющих граничным условиям

$$\nabla_k g(q) = 0, \quad (k, q) \in \Gamma_t, \quad (14)$$

$$\Gamma_t = \{(k_1, q_1), \dots, (k_t, q_t)\}, \quad \Gamma_0 = \emptyset, \quad (15)$$

и $g(q, z, t)$ — обобщенная функция Грина — экстремаль функционала (11) в $R_t(Q_0)$. Функцию $g(q, z, 0)$ считаем известной. Суть метода Адамара состоит в нахождении функции $g(q, z, t)$ по известной функции $g(q, z, t-1)$.

Первый способ (множителей Лагранжа). Вводим множитель λ и ищем в классе $R_{t-1}(Q_0)$ экстремум функционала

$$I_{z'} + 2\lambda \nabla_{k_t} g(q_t), \quad z \in Q_0.$$

Уравнение Эйлера для его экстремали $g(q, z', t)$ примет вид

$$\langle f(q) | g(q, z', t) \rangle_0 + f(z') + \lambda_k \nabla_{k_t} f(q_t) = 0, \quad \forall f \in R_{t-1}(Q_0). \quad (16)$$

Для функции $g(q, z, t-1)$ остается в силе уравнение (11), где $f \in R_{t-1}(Q_0)$. Если в (16) положить $f(q) = g(q, z, t-1)$, а в (11) — $f(q) = g(q, z', t)$, $g(q) = g(q, z, t-1)$, то скалярные произведения в (11) и (16) совпадут и, приравнявая левые части уравнений (11), (16), мы получим

$$g(z, z', t) = g(z', z, t-1) + \lambda \nabla_{k_t} g(q_t, z, t-1). \quad (17)$$

Подставляя найденное $g(z, z', t)$ в граничное условие $\nabla_{k_t} g(q_t, z', t) = 0$, находим множитель λ и окончательно имеем³

$$g(z, z', t) = g(z, z', t-1) + \frac{1}{c_t} \nabla_{k_t} g(q_t, z, t-1) \nabla_{k_t} g(q_t, z, t-1), \quad (18)$$

где

$$c_t = -\nabla_{k_t} \nabla_{k_t}' g(q_t, q_t, t-1) \quad (19)$$

и ∇_k' означает разности (3) по второму аргументу функции $g(q, z, t-1)$.

³ Из (17) при $\lambda=0$ имеем $g(z, z, t-1) = g(z, z, t-1)$.

Второй способ (штрафных функций). Сопоставим каждому ограничению (14) множитель $N_t > 0$ и образуем «штрафную функцию» — функционал

$$I_{z'} = \sum_{t=1}^t N_t [\nabla_{k_t} g(q_t)]^2. \quad (20)$$

Экстремаль этого функционала в классе $R_0(Q_0)$ обозначим $G(q, z', t)$. Уравнение Эйлера для функционала (20) имеет вид

$$\langle f(q) | G(q, z', t) \rangle_0 + f(z') + \sum_{t=1}^t N_t \nabla_{k_t} f(q_t) \nabla_{k_t} G(q_t, z', t) = 0. \quad (20_t)$$

Полагая аналогично тому, как это делалось в первом способе — в уравнении (20_t) $f(q) = G(q, z, t-1)$, а в уравнении (20_{t-1}) $f(q) = G(q, z', t)$ и вычитая одно из другого, имеем (см. сноску 3)

$$G(z, z', t) = G(z, z', t-1) + N_t \nabla_{k_t} G(q_t, z, t-1) \nabla_{k_t} G(q_t, z', t). \quad (21)$$

Для определения последнего множителя справа (21) подействуем на уравнение (21) оператором ∇_{k_t} при $z = q_t$.

$$\nabla_{k_t} G(q_t, z', t) = \nabla_{k_t} G(z', q_t, t-1) + N_t \nabla_{k_t} \nabla_{k_t} G(q_t, q_t, t-1) \nabla_{k_t} G(q_t, z', t).$$

Отсюда

$$\nabla_{k_t} G(q_t, z', t) = \frac{1}{N_t C_t} \nabla_{k_t} G(z', q_t, t-1), \quad (22)$$

где

$$C_t = \frac{1}{N_t} - \nabla_{k_t} \nabla_{k_t} G(q_t, q_t, t-1). \quad (23)$$

Подставляя (22) в (21), окончательно имеем

$$G(z, z', t) = G(z, z', t-1) - \frac{1}{C_t} \nabla_{k_t} G(q_t, z, t-1) \nabla_{k_t} G(q_t, z', t-1). \quad (24)$$

Сравнив (24) и (18), видим, что они отличаются лишь множителями $1/C_t$ и $1/C_t$. Действуя операторами $\nabla_{k_t}, \nabla_{k_t}'$ на уравнении Эйлера (16) и (20_t) при $f(q) = g(q, z, t)$ и $f(q) = G(q, z, t)$ соответственно

$$\nabla_{k_t} \nabla_{k_t}' \{ \langle g(q, z, t) | g(q, z', t) \rangle_0 + g(z', z, t) \} = 0,$$

$$\nabla_{k_t} \nabla_{k_t}' \{ \langle G(q, z, t) | G(q, z', t) \rangle_0 + G(z', z, t) + \sum_{t=1}^t N_t G(q_t, z, t) G(q_t, z', t) \} = 0,$$

при $z = z' = q$ отсюда имеем $c_t > 0, C_t > 0$. Следовательно, в уравнениях (24) и (18) величины $1/c_t$ и $1/C_t$ положительны и конечны, а функции Грина $g(z, z', t)$ и $G(z, z', t)$ с ростом t возрастают. При

$N \rightarrow \infty$, $\tau = 1, \dots, t$, функция $G(z, z', t) \rightarrow g(z, z', t)$ и множитель $C_t \rightarrow c_t$. Обоснование этого предельного перехода мы оставим в стороне, поскольку уравнения (18), (24) выведены нами независимо. Отметим лишь, что (18) есть частный случай (24) при $N_t \equiv \infty$. Можно сказать поэтому, что второй способ построения функций Грина является более общим, нежели первый способ. Разности

$$g(z, z', t) - g(z, z', t-1) \text{ и } G(z, z', t) - G(z, z', t-1),$$

вычисленные по формулам (18) и (24), называются вариациями Адамара функций Грина, а сами уравнения (18), (24) — уравнениями Адамара.

п. 3. Квазиконформные сеточные отображения. Уравнение (20) можно коротко записать в виде

$$\langle f | G \rangle_t + f(z') = 0, \quad (24)$$

где

$$\langle f | g \rangle_t = \sum_{Q_{(0)} \times I} \rho_k \nabla_k f \nabla_k g, \quad (25)$$

$$\rho_k = \rho_k(q) = \begin{cases} 1, & \text{при } (k, q) \notin I_t, \\ N_t + \frac{1}{4}, & \text{при } (k, q) = (k_z, q_z). \end{cases} \quad (26)$$

Пользуясь так определенным скалярным произведением $\langle f | g \rangle_t$, назовем сопряженной с функцией $g(q) \in R_0(Q_0)$ функцию $h(q)$, удовлетворяющую, как функция от q , уравнениям

$$(-1)^k \nabla_{1-k} h = \rho_k \nabla_k g. \quad (27)$$

Для того, чтобы эта функция была однозначной на Q_0 , необходимо, чтобы вдоль каждого элементарного квадрата $K_z = \{z+1, z+i, z+1+2i, z+2+i\}$ ее приращение было равно нулю

$$\sum_{Q_{(0)} \times I} (-1)^k \nabla_{1-k} h \nabla_k \delta_z = 0. \quad (28)$$

Согласно (27), это означает гармоничность функции g

$$\langle g | \delta_z \rangle_t = \sum_{Q_{(0)} \times I} \rho_k \nabla_k g \nabla_k \delta_z = 0. \quad (29)$$

Строя, в частности, сопряженную (по q) функцию $h(q, z', t)$ к функции Грина $G(q, z', t)$, мы не получим однозначной функции. Но эта неоднозначность, согласно (24), будет иметь место лишь для квадрата $K_{z'}$. При обходе $K_{z'}$ значение $h(q, z', t)$ увеличивается на единицу.

Построим теперь функцию

$$\omega(q, z', t) = e^{2\pi i [G(q, z', t) + i h(q, z', t)]}. \quad (30)$$

Эта функция уже будет однозначной в $Q_{(0)}$,

$$|\omega(q, z', t)| = 1 \text{ при } q \in Q_0 \setminus Q_{(0)}.$$

и $1 \geq |\omega(q, z', t)| \geq |\omega(z', z', t)|$. Последнее неравенство следует из принципа максимума для линейного эллиптического уравнения (29).

Система уравнений (27) является квазиконформным дискретным аналогом условий Коши — Римана. В связи с этим будем называть отображение $w = w(q, z', t)$ сеточным квазиконформным на Q_0 . Предел этого отображения при $N_t \rightarrow \infty$ назовем сеточным конформным. Не представляет труда записать систему (27) для этого случая.

Объединяя систему уравнений (27) с уравнением Адамара (24), получаем рекуррентные соотношения для вычисления $w(q, z', t)$ по известной функции $w(q, z', t-1)$. Эти соотношения являются дискретным аналогом одного из уравнений Левнера [15, с. 95].

ЛИТЕРАТУРА

- 1 Понтрягин Л. С., Болтянский В. Г., Гамкрелидзе Р. В., Мищенко Е. Ф. Математическая теория оптимальных процессов. М., 1961.
- 2 Попов В. И. Докл. АН СССР, 188, 3 (1969).
- 3 Попов В. И. Докл. АН СССР 207, 5 (1972).
- 4 Isaaks R. J. Univ. Nac. Tucuman Rev (3), 1941.
- 5 Романов Н. П. — «Труды Узб. ун-та», «Труды физ.-мат. фак», Новая серия, вып. 49, 1951.
- 6 Lelong-Ferrand J. Representations conformes et transformations à integrall de Dirichlet bornee. Paris, 1955.
- 7 Duffin J. J. Peterson E. L. J Math. Anal. and Appl., 21, № 3, 1968.
- 8 Чумаков С. А. — «Труды Томск. ун-та», 71, 1969.
- 9 Атаджанов Б. Вопросы выч. и прикл. матем., вып. 16. Ред.-изд. совет АН УзССР, 1973.
- 10 Соболев С. Л. — Докл. АН СССР, 87, 3 (1952).
- 11 Соболев С. Л. — Докл. АН СССР, 87, 2 (1952).
- 12 Hadamard J. Lecons sur le calcul des variations. Paris, 1910.
- 13 Hadamard J., Mem. Savants Entrangens Akad. Sci. France, Ser. 2, 33, 4 (1908).
- 14 Беллман Р., Энджел Э. Динамическое программирование и уравнения в частных производных. М., 1974.
- 15 Голузин Г. М. Геометрическая теория функций комплексного переменного. М., 1966.

ОДНА ЭКСТРЕМАЛЬНАЯ ЗАДАЧА В КЛАССЕ ОДНОЛИСТНЫХ ФУНКЦИЙ С ВЕЩЕСТВЕННЫМИ КОЭФФИЦИЕНТАМИ

В. И. ПРОКОФЬЕВ, В. В. ЧЕРНИКОВ

1. Рассмотрим задачу о нахождении экстремальных значений функционала

$$J(f) = \operatorname{Re} \left| \ln \frac{f'(\zeta)(z_1 - z_2)}{f(z_1) - f(z_2)} \right| \quad (1)$$

при произвольно фиксированных ζ, z_1, z_2 в круге $E: |z| < 1$ на классе S_r регулярных однолистных в E функций $\omega = f(z) = z + c_2 z^2 + \dots$, с вещественными коэффициентами $c_2 \dots$.

Для исследования задачи применяем вариационный метод. В работе [1] даны следующие необходимые нам формулы вариаций функций класса S_r .

Если $f(z) \in S_r$, то классу S_r принадлежат и функции

$$f_*(z) = f(z) + \lambda f(z) P(z, a) + o(\lambda); \quad (2)$$

$$f_*(z) = f(z) + \lambda f(z) M(z, b); \quad (3)$$

$$f_*(z) = f(z) + \lambda f(z) N(z, t) + o(\lambda). \quad (4)$$

Здесь

$$P(z, a) = AK(f(z), f(a)) + \bar{A}K(f(z), \bar{f}(a)) - \\ - \frac{A}{H^2(a)} L(z, a) - \frac{\bar{A}}{H^2(a)} L(z, \bar{a});$$

$$M(z, b) = AK(f(z), b) + \bar{A}K(f(z), \bar{b});$$

$$N(z, t) = 1 + H(z) \frac{z^2 - 1}{1 - 2zt + z^2}, \quad -1 \leq t \leq 1;$$

$$K(u, v) = \frac{u}{u - v};$$

$$L(z, a) = 1 + H(z) \frac{a(1 - z^2)}{(a - z)(az - 1)};$$

$$H(z) = \frac{zf'(z)}{f(z)}.$$

A — произвольная комплексная постоянная,
 a — произвольно фиксированная в E точка, $\lambda > 0$ мало, причем в (3) функция $w = f(z)$ отображает E на область, для которой b — внешняя точка, в (4) число t , $-1 \leq t \leq 1$, произвольно фиксированно.

Применяя вариационные формулы (2) и (3), докажем, что всякая функция $w = f(z) \in S_r$, доставляющая экстремальное значение функционалу (1), отображает E на область G без внешних точек и удовлетворяет в E дифференциальному уравнению

$$\frac{f^2(z)T(f(z))}{(f(z)-f(\zeta))^2(f(z)-\overline{f(\zeta)})^2t(f(z))} = \left(\frac{f(z)}{zf'(z)}\right)^2 \frac{z^2Q(z)}{\left[(z-\zeta)\left(z-\frac{1}{\zeta}\right)(z-\bar{\zeta})\left(z-\frac{1}{\bar{\zeta}}\right)\right]^2} g(z), \quad (5)$$

где

$$T(w) = A_5 w^5 + A_4 w^4 + A_3 w^3 + A_2 w^2 + A_1 w + A_0; \quad (6)$$

$$t(w) = \prod_{k=1}^2 (w - f(z_k))(w - \overline{f(z_k)}),$$

$$Q(z) = B_{12}z^{12} + B_{11}z^{11} + B_{10}z^{10} + B_9z^9 + B_8z^8 + B_7z^7 + B_6z^6 + B_5z^5 + B_4z^4 + B_3z^3 + B_{10}z^2 + B_{11}z + B_{12}; \quad (7)$$

$$g(z) = \prod_{k=1}^2 (z - z_k) \left(z - \frac{1}{z_k}\right) (z - \bar{z}_k) \left(z - \frac{1}{\bar{z}_k}\right).$$

Коэффициенты полиномов (6), (7) выражаются через $f''(\zeta)$, $f'(\zeta)$, $f(\zeta)$, $f'(z_1)$, $f'(z_2)$, $f(z_1)$, $f(z_2)$ следующим образом.

$$\begin{aligned} A_5 &= \operatorname{Re}(a_1 - 2a_3), \quad A_4 = -|a_1|^2 + 4|a_3|^2 + \operatorname{Re}(-a_2 + a_3^2); \\ A_3 &= 2\operatorname{Re}(a_1\bar{a}_2 + a_3|a_1|^2) - 4|a_3|^2\operatorname{Re}(a_1 + a_3); \\ A_2 &= -|a_2|^2 + |a_3|^4 + \operatorname{Re}(4a_2|a_3|^2 - a_3^2|a_1|^2) + \\ &+ 4\operatorname{Re}(a_3)\operatorname{Re}(a_1|a_3|^2 - a_1\bar{a}_2), \quad A_1 = 2\operatorname{Re}(a_1\bar{a}_2)\operatorname{Re}(a_3^2) - \\ &- 4|a_3|^2\operatorname{Re}(a_2)\operatorname{Re}(a_3) + \operatorname{Re}(2a_3|a_2|^2 - a_1|a_3|^4); \\ A_0 &= \operatorname{Re}(a_2|a_3|^4 - a_3^2|a_2|^2), \quad B_{12} = \operatorname{Re}(-\bar{b}_5b_9 + b_{10}); \\ B_{11} &= \operatorname{Re}(\bar{b}_6b_9 - \bar{b}_5b_{10} + b_{11}), \quad B_{10} = \operatorname{Re}(-\bar{b}_7b_9 + \bar{b}_6b_{10} - \bar{b}_5b_{11} + b_{12}); \\ B_9 &= \operatorname{Re}(\bar{b}_8b_9 - \bar{b}_7b_{10} + (\bar{b}_6 + 1)b_{11} - \bar{b}_5b_{12}); \\ B_8 &= \operatorname{Re}(-\bar{b}_7b_9 + (\bar{b}_8 + 1)b_{10} - (\bar{b}_7 + \bar{b}_5)b_{11} + \bar{b}_6b_{12}); \\ B_7 &= \operatorname{Re}(\bar{b}_6b_9 - (\bar{b}_7 + \bar{b}_5)b_{10} + (\bar{b}_8 + \bar{b}_6)b_{11} - \bar{b}_7b_{12}); \\ B_6 &= \operatorname{Re}(-2\bar{b}_5b_9 + 2\bar{b}_6b_{10} - 2\bar{b}_7b_{11} + \bar{b}_8b_{12}). \end{aligned}$$

Они связаны тождеством

$$\operatorname{Re}(b_9) = 0. \quad (8)$$

В этих формулах

$$\begin{aligned} a_1 &= f(z_1) + f(z_2); \quad a_2 = f(z_1)f(z_2); \quad a_3 = f(\zeta); \\ b_1 &= \zeta + \zeta^{-1}; \quad b_2 = 4 + \zeta^2 - \zeta^{-2}; \quad b_3 = z_1 + z_1^{-1} + z_2 + z_2^{-1}; \end{aligned}$$

$$b_4 = 2 + (z_1 + z_1^{-1})(z_2 + z_2^{-1}); \quad b_5 = 2b_1 + b_3; \quad (9)$$

$$\begin{aligned} b_6 &= 2 + (b_1 + 2b_3)b_1 + b_4; \quad b_7 = 2(1 + b_4)b_1 + (3 + b_1^2)b_3; \\ b_8 &= 2 + 4b_1b_3 + (2 + b_1^2)b_4; \\ b_9 &= -2\zeta + p - q; \end{aligned} \quad (10)$$

$$\begin{aligned} b_{10} &= b_2 + 2\zeta b_3 - (b_1 + b_3)p + 2b_1q + r; \\ b_{11} &= -2\zeta(1 + b_4) - b_2b_3 + (1 + b_1b_3 + b_4)p - (3 + b_1^2)q - 2b_1r; \\ b_{12} &= 4\zeta b_3 + b_2b_4 - (b_1b_4 + 2b_3)p + 4b_1q + (2 + b^2)r, \\ P &= (1 - \zeta^2)f^{(1)}(\zeta)/f^{(1)}(\zeta); \end{aligned} \quad (11)$$

$$(f(z_1) - f(z_2))q = b(1 - z_1^2)f'(z_1) - (1 - z_2^2)f'(z_2); \quad (12)$$

$$(f(z_1) - f(z_2))r = (z_2^{-1}z_1^{-1})(1 - z_1^2)f'(z_1) - (z_1^{-1}z_2^{-1})(1 - z_2^2)f'(z_2).$$

Для функции, доставляющей функционалу (1) максимальное значение, применение вариационной формулы (4) приводит при каждом t из промежутка $-1 \leq t \leq 1$ к неравенству

$$\begin{aligned} 2B_{12}(32t^6 - 48t^4 + 18t^2 - 1) + 2B_{11}(16t^5 - 20t^3 + 5t) + \\ + 2B_{10}(8t^4 - 8t^2 + 1) + 2B_9(4t^3 - 3t) + \\ + 2B_8(2t^2 - 1) + 2B_7t + B_6 \leq 0, \end{aligned}$$

где B_k , $k=6, 7, \dots, 12$, — коэффициенты полинома (7).

Из уравнения (5) следует, что функция $f(z)$ регулярна на окружности $|z|=1$ всюду, кроме конечного числа точек, в которых $f(z)$ имеет алгебраические особенности. Следовательно, область G получается из всей плоскости ω проведением разреза по кривой Γ , состоящей из конечного числа k аналитических дуг C_j , $j=1, 2, \dots, k$, причем, по крайней мере, одна из этих дуг уходит в бесконечность. Конечные концы дуг C_j , принадлежащие только одной из них, обозначим через η_n , $1 \leq n \leq k$, принадлежащие, по крайней мере, двум из C_j — через ω_s , $1 \leq s \leq k$. Если $\mu_n = f^{-1}(\eta_n)$, $|\mu_n|=1$, то из уравнения (5) следует, что полином (7) должен иметь корень $z = \mu_n$ не ниже второго порядка. Поэтому кривая Γ может содержать не более шести точек η_n . Из уравнения (5) следует далее, если принять во внимание алгебраическую особенность функции $f^{-1}(\omega)$ в точках ω_s , что точки ω_s являются корнями полинома (6). Полином (6) может иметь не более пяти корней, причем и вещественные и комплексные корни могут быть простыми и кратными. Каждый корень может быть внутренней или граничной точкой области G . В последнем случае корень может являться или точкой ω_s , или точкой η_n , или внутренней регулярной точкой дуги C_j . Если учесть еще симметрию области G относительно вещественной оси, то можно получить все возможные виды кривой Γ . Мы это делаем в частных случаях (см. пункты 2, 3). В случае, когда ζ лежит на отрезке $[\bar{z}_1, \bar{z}_2]$, задача об оценке $J(f)$ сверху рассматривалась в работе [2].

2. Предположим, что $z_2=0$, т. е. функционал (1) имеет вид

$$J(f) = \operatorname{Re} \left[\ln \left(\frac{z_1}{f(z_1)} f'(\zeta) \right) \right]. \quad (13)$$

Для любой экстремальной функции $\omega = f(z)$ из (5) получим теперь уравнение

$$\frac{f(z)T(f(z))}{(f(z)-f(\zeta)^2(f(z)-\overline{f(\zeta)^2}t(f(z))))} =$$

$$= \left(\frac{f(z)}{(zf'(z))} \right)^2 \frac{zQ(z)}{\left[(z-\zeta) \left(z - \frac{1}{\zeta} \right) (z-\overline{\zeta}) \left(z - \frac{1}{\overline{\zeta}} \right) \right]^2 g(z)}, \quad (14)$$

равенство $\operatorname{Re}(b_7)=0$ и с помощью (4) — неравенство

$$2B_{10}(16t^5-20t^3+5t)+2B_9(8t^4-8t^2+1)+$$

$$+2B_8(4t^3-3t)+2B_7(2t^2-1)+$$

$$+2B_6t+B_5 \leq 0, \quad -1 \leq t \leq 1, \text{ если } f(z) \text{ дает } J(f) \text{ максимум.}$$

Здесь

$$T(w) = A_4w^4 + A_3w^3 + A_2w^2 + A_1w + A_0;$$

$$t(w) = (w - f(z_1))(w - \overline{f(z_1)}),$$

$$A_4 = \operatorname{Re}(a_1 - 2a_2), \quad A_3 = -|a_1|^2 + 4|a_2|^2 + \operatorname{Re}(a_2^2);$$

$$A_2 = 2|a_1|^2 \operatorname{Re}(a_2) - 4|a_2|^2 \operatorname{Re}(a_1 + a_2);$$

$$A_1 = |a_2|^4 - |a_1|^2 \operatorname{Re}(a_2^2) + 4|a_2|^2 \operatorname{Re}(a_1) \operatorname{Re}(a_2);$$

$$A_0 = -|a_2|^4 \operatorname{Re}(a_1), \quad a_1 = f(z_1), \quad a_2 = f(\zeta);$$

$$Q(z) = B_{10}z^{10} + B_9z^9 + B_8z^8 + B_7z^7 + B_6z^6 +$$

$$+ B_5z^5 + B_4z^4 + B_3z^3 + B_2z^2 + B_1z + B_0;$$

$$g(z) = (z - z_1) \left(z - \frac{1}{z_1} \right) (z - \overline{z_1}) \left(z - \frac{1}{\overline{z_1}} \right);$$

$$B_{10} = \operatorname{Re}(-b_8); \quad B_9 = \operatorname{Re}(\overline{b_4}b_8 - b_9);$$

$$B_8 = \operatorname{Re}(\overline{b_4}b_9 - \overline{b_5}b_8 - b_{10}); \quad B_7 = \operatorname{Re}(\overline{b_6}b_8 - (\overline{b_5} + 1)b_9 + \overline{b_4}b_{10});$$

$$B_6 = \operatorname{Re}(-(\overline{b_5} + 1)b_8 + (\overline{b_6} + \overline{b_1})b_9 - \overline{b_5}b_{10});$$

$$B_5 = \operatorname{Re}(2\overline{b_4}b_8 - 2\overline{b_5}b_9 + \overline{b_6}b_{10}); \quad b_1 = \zeta + \zeta^{-1};$$

$$b_2 = 4 + \zeta^2 - \zeta^{-2}; \quad b_3 = z_1 + z_1^{-1}; \quad b_4 = 2b_1 + b_3;$$

$$b_5 = 3 + b_1^2 + 2b_1b_3; \quad b_6 = 4b_1 + (2 + b_1^2)b_3;$$

$$b_7 = -2\zeta + p - q; \quad b_8 = 2\zeta - p + r; \quad b_9 = -b_2 - 2\zeta b_3 +$$

$$+ (b_1 + b_3)p - 2b_1r; \quad b_{10} = 4\zeta + b_2b_3 - (2 + b_1b_3)p +$$

$$+ (2 + b_1^2)r; \quad p = (1 - \zeta^2)f^{11}(\zeta)/f^1(\zeta);$$

$$f(z_1)q = -1 + (1 - z_1^2)f^1(z_1);$$

$$f(z_1)r = (1 - z_1^2)f^1(z_1).$$

Качественный анализ уравнения (14) показывает, что области G , на которые экстремальными функциями $w = f(z) \in S$, функционала (13) отображается круг E , могут быть ограничены кривыми Γ только следующих видов (ср. [3]):

1. Γ состоит из семи дуг. Дуги C_j , $1 \leq j \leq 4$, имеют общую вещественную точку w_1 ; дуги C_j , $4 \leq j \leq 7$, имеют общую вещественную точку w_2 . Соответствующие дуги исходят из точек w_1 , w_2 под равными углами друг к другу, причем дуги C_1 , C_4 , C_7 лежат на вещественной оси.

2. Г состоит из шести дуг, имеющих общую вещественную точку w_1 и исходящих из этой точки под равными углами друг к другу, причем две дуги лежат на вещественной оси.

3. Г состоит из семи дуг. Дуги C_2, C_4, C_5 имеют общую точку w_1 , исходят из нее под равными углами друг к другу и симметричны относительно вещественной оси с дугами C_3, C_6, C_7 , имеющими общую точку $\bar{w}_1$. Дуги C_1, C_2, C_3 имеют общую вещественную точку w_2 , дуги C_2, C_3 исходят из нее под углами π или $\pi/2$, или $2\pi/3$, дуга C_1 лежит на вещественной оси.

4. Г состоит из восьми дуг. Дуги C_4, C_5, C_6 имеют общую точку w_1 , исходят из нее под равными углами друг к другу и симметричны относительно вещественной оси с дугами C_3, C_7, C_8 , имеющими общую точку $\bar{w}_1$. Дуги $C_j, 1 \leq j \leq 4$, имеют общую вещественную точку w_2 и исходят из нее под равными углами друг к другу, причем дуги C_1, C_2 лежат на вещественной оси.

5. Г состоит из шести дуг. Дуги C_3, C_6 имеют общую точку w_1 , образуют в ней углы $4\pi/3$ и $2\pi/3$ и симметричны относительно вещественной оси с дугами C_4, C_5 , имеющими общую точку $\bar{w}_1$. Дуги $C_j, 1 \leq j \leq 4$, имеют общую вещественную точку w_2 и исходят из нее под равными углами друг к другу, причем дуги C_1, C_2 лежат на вещественной оси.

6. Г состоит из пяти дуг. Дуги C_3, C_4 имеют общую точку w_1 и образуют в ней углы $4\pi/3$ и $2\pi/3$, симметричны относительно вещественной оси с дугами C_2, C_5 , имеющими общую точку $\bar{w}_1$. Дуги C_1, C_2, C_3 имеют общую вещественную точку w_2 , причем дуга C_1 лежит на вещественной оси. Дуги C_2, C_3 образуют в точке w_2 угол π или угол $2\pi/3$, или угол $\pi/2$.

7. Г состоит из шести дуг. Дуги C_2, C_4 имеют общую точку w_1 , образуют в ней углы $4\pi/3$ и $2\pi/3$ и симметричны относительно вещественной оси с дугами C_3, C_5 , имеющими общую точку $\bar{w}_1$. Дуги C_1, C_2, C_3 имеют общую вещественную точку w_2 и исходят из нее под равными углами друг к другу. Дуги C_1, C_6 лежат на вещественной оси и имеют общую точку $w = \infty$.

8. Г состоит из восьми дуг. Дуги C_2, C_4, C_5 имеют общую точку w_1 , исходят из нее под равными углами друг к другу, симметричны относительно вещественной оси с дугами C_3, C_6, C_7 , имеющими общую точку $\bar{w}_1$. Дуги C_1, C_2, C_3 имеют общую вещественную точку w_2 и исходят из нее под равными углами друг к другу. Дуги C_1, C_8 лежат на вещественной оси и имеют общую точку $w = \infty$.

9. Г состоит из семи дуг. Дуги C_1, C_2, C_3 имеют общую точку w_1 , исходят из нее под равными углами друг к другу и симметричны относительно вещественной оси с дугами C_4, C_5, C_6 . Дуги C_1, C_4, C_7 имеют общий конец $w = \infty$, причем дуга C_7 лежит на вещественной оси.

10. Г состоит из пяти дуг. Дуги C_2, C_3 имеют общую точку w_1 , образуют в ней углы $2\pi/3$ и $4\pi/3$ и симметричны относительно вещественной оси с дугами C_4, C_5 . Дуги C_1, C_2, C_4 имеют общую точку $w = \infty$, причем дуга C_1 лежит на вещественной оси.

11. Г состоит из пяти дуг, имеющих общий конец $w = \infty$, причем дуга C_1 лежит на вещественной оси, а дуги C_2, C_3 симметричны относительно вещественной оси с дугами C_4, C_5 .

12. Г состоит из пяти дуг, имеющих общую вещественную точку w_1 , причем дуга C_1 лежит на вещественной оси, а дуги C_2, C_3 симметричны относительно вещественной оси с дугами C_4, C_5 . Дуги C_1, C_2 и C_2, C_3 исходят из точки w_1 соответственно под углами $2\pi/5$ и $2\pi/5$ или $\pi/3$ и $\pi/2$, или $\pi/2$ и $\pi/3$, или $\pi/3$ и $\pi/3$.

13. Г состоит из пяти дуг. Дуги C_1, C_2 имеют общий конец $w = \infty$

и лежат на вещественной оси. Дуги C_j , $2 \leq j \leq 5$, имеют общую вещественную точку w_1 . Дуги C_2 , C_4 исходят из w_1 под углом $\pi/2$ или $2\pi/5$, или $3\pi/5$, причем дуга C_3 лежит на вещественной оси, а дуги C_4 , C_5 симметричны относительно этой оси.

14. Γ состоит из шести дуг. Дуги C_1 , C_2 , C_3 имеют общую вещественную точку w_1 , дуги C_j , $3 \leq j \leq 6$, имеют общую вещественную точку w_2 . Дуги C_6 , C_5 и C_3 , C_2 образуют между собой соответственно углы $\pi/2$ и $2\pi/3$ или $\pi/2$ и $\pi/2$, или $2\pi/5$ и $2\pi/3$, или $3\pi/5$ и $2\pi/3$, или $\pi/2$ и $3\pi/4$. Дуги C_3 , C_6 лежат на вещественной оси.

15. Γ состоит из пяти дуг. Дуги C_1 , C_2 , C_3 имеют общий конец $w = \infty$, причем дуга C_3 лежит на вещественной оси, а дуги C_1 , C_2 симметричны относительно этой оси. Дуги C_3 , C_4 , C_5 имеют общую вещественную точку w_1 , причем дуги C_4 , C_5 исходят из нее под углом $\pi/2$ или π , или $2\pi/3$ и симметричны относительно вещественной оси.

16. Γ состоит из шести дуг. Дуги C_1 , C_2 лежат на вещественной оси, имеют общий конец $w = \infty$. Дуги C_1 , C_3 , C_4 имеют общую вещественную точку w_1 , дуги C_3 , C_4 симметричны относительно вещественной оси. Дуги C_2 , C_5 , C_6 имеют общую вещественную точку w_2 , дуги C_5 , C_6 симметричны относительно вещественной оси. Дуги C_3 , C_4 и C_5 , C_6 образуют между собой соответственно углы $2\pi/3$ и $2\pi/3$ или π и $2\pi/3$, или $2\pi/3$ и π , или $\pi/2$ и $2\pi/3$, или $2\pi/3$ и $\pi/2$.

17. Γ состоит из семи дуг. Дуги C_1 , C_2 лежат на вещественной оси и имеют общий конец $w = \infty$. Дуги C_1 , C_3 , C_4 имеют общую вещественную точку w_1 (или w_2) и исходят из нее под равными углами друг к другу. Дуги C_j , $j = 2, 5, 6, 7$, имеют общую вещественную точку w_2 (или w_1) и исходят из нее под равными углами, причем дуга C_7 лежит на вещественной оси. Дуги C_3 и C_4 , C_5 и C_6 симметричны относительно вещественной оси.

18. Γ состоит из четырех дуг, имеющих общую вещественную точку w_1 . Дуги C_1 , C_2 лежат на вещественной оси, C_2 имеет конец $w = \infty$, дуги C_3 , C_4 симметричны относительно вещественной оси, причем дуги C_1 , C_3 образуют в общей точке прямой угол или угол $2\pi/5$, или $3\pi/5$, или $\pi/3$, или $2\pi/3$.

19. Γ состоит из четырех дуг. Дуги C_1 , C_2 лежат на вещественной оси и имеют общий конец $w = \infty$. Дуги C_2 , C_3 , C_4 имеют общую вещественную точку w_1 , причем дуги C_3 , C_4 симметричны относительно вещественной оси и образуют в общей точке прямой угол или угол π , или $2\pi/3$, или $2\pi/5$, или $4\pi/5$, или $6\pi/5$.

20. Γ состоит из трех дуг, имеющих общую вещественную точку w_1 . Дуга C_1 лежит на вещественной оси, дуги C_2 , C_3 симметричны относительно этой оси и образуют в общей точке угол π или $\pi/2$, или $2\pi/3$, или $2\pi/5$, или $4\pi/5$, или $6\pi/5$, или $\pi/3$, или $4\pi/3$.

21. Γ состоит из трех дуг, имеющих общий конец $w = \infty$, причем дуга C_1 лежит на вещественной оси, а дуги C_2 , C_3 симметричны относительно этой оси.

22. Γ состоит из четырех дуг, имеющих общий конец $w = \infty$, причем две дуги лежат на вещественной оси, а две другие дуги симметричны относительно этой оси.

23. Γ состоит из шести дуг. Дуги C_1 , C_3 , C_5 имеют общую точку w_1 , исходят из нее под равными углами друг к другу и симметричны относительно вещественной оси с дугами C_2 , C_4 , C_6 , имеющими общую точку $\bar{w}_1$, причем дуги C_1 , C_2 имеют общий конец $w = \infty$.

24. Γ состоит из четырех дуг. Дуги C_1 , C_2 имеют общую точку w_1 ,

образуют в ней углы $4\pi/3$, $2\pi/3$ и симметричны относительно вещественной оси с дугами C_3 , C_4 , имеющими общую точку $\bar{w}_1$.

25. Γ состоит из четырех дуг, имеющих общий конец $w = \infty$ и попарно симметричных относительно вещественной оси.

26. Γ состоит из шести дуг. Дуги C_1 , C_6 лежат на вещественной оси и имеют общий конец $w = \infty$. Дуги C_j , $1 \leq j \leq 5$, имеют общую вещественную точку w_1 и исходят из нее под равными углами друг к другу.

27. Γ состоит из семи дуг. Дуги C_1 , C_7 лежат на вещественной оси и имеют общий конец $w = \infty$. Дуги C_j , $1 \leq j \leq 4$, имеют общую вещественную точку w_1 , исходят из нее под равными углами друг к другу, причем дуга C_2 лежит на вещественной оси. Дуги C_2 , C_5 , C_6 имеют общую вещественную точку w_2 , исходят из нее под равными углами друг к другу.

28. Γ состоит из шести дуг. Дуги C_j , $1 \leq j \leq 4$, имеют общий конец $w = \infty$, дуги C_1 , C_2 лежат на вещественной оси, дуги C_3 , C_4 симметричны относительно этой оси. Дуги C_1 , C_5 , C_6 имеют общую вещественную точку w_1 и исходят из нее под равными углами друг к другу.

29. Γ состоит из двух дуг, симметричных относительно вещественной оси.

30. Γ состоит из двух дуг, лежащих на вещественной оси.

31. Γ состоит из одной дуги, лежащей на вещественной оси.

3. Предположим, что $\xi = z_1$, т. е. функционал (1) имеет вид

$$J(f) = \operatorname{Re} \left[\ln \frac{f'(z_2)(z_1 - z_2)}{f(z_1) - f(z_2)} \right]. \quad (15)$$

Для любой функции $w = f(z)$, доставляющей экстремальное значение величине (15), получим из (5) уравнение

$$\begin{aligned} & \frac{f^2(z)T(f(z))}{(f(z) - f(z_1))^2(f(z) - \bar{f}(z_1))^2t(f(z))} = \\ & = \left(\frac{f(z)}{zf'(z)} \right)^2 \frac{z^2Q(z)}{\left[(z - z_1) \left(z - \frac{1}{z_1} \right) (z - \bar{z}_1) \left(z - \frac{1}{\bar{z}_1} \right) \right]^2 g(z)}, \end{aligned} \quad (16)$$

равенство $\operatorname{Re}(b_7) = 0$ и с помощью (4) — неравенство $2B_8(8t^4 - 8t^2 + 1) + 2B_7(4t^3 - 3t) + 2B_6(2t^2 - 1) + 2B_5t + B_4 \leq 0$, $-1 \leq t \leq 1$, если $f(z)$ дает $J(f)$ максимум.

Здесь

$$T(w) = A_3w^3 + A_2w^2 + A_1w + A_0;$$

$$t(w) = (w - f(z_2))(w - \bar{f}(z_2));$$

$$A_3 = \operatorname{Re}(-a_1 + a_2); \quad A^2 = 2|a_1|^2 - |a_2|^2 - \operatorname{Re}(a_1\bar{a}_2);$$

$$A_1 = (-|a_1|^2 + 2|a_2|^2)\operatorname{Re}(a_1) - 2|a_1|^2\operatorname{Re}(a_2) + \operatorname{Re}(a_1^2\bar{a}_2);$$

$$A_0 = |a_1|^2\operatorname{Re}(a_1a_2) - |a_2|^2\operatorname{Re}(a_1^2); \quad a_1 = f(z_1); \quad a_2 = f(z_2);$$

$$Q(z) = B_8z^8 + B_7z^7 + B_6z^6 + B_5z^5 + B_4z^4 + B_3z^3 + B_2z^2 +$$

$$B_1z + B_0; \quad g(z) = (z - z_2) \left(z - \frac{1}{z_2} \right) (z - \bar{z}_2) \left(z - \frac{1}{\bar{z}_2} \right);$$

$$B_8 = \operatorname{Re}(-\bar{b}_4b_7 + b_8); \quad B_7 = \operatorname{Re}(\bar{b}_5b_7 - \bar{b}_4b_8 + b_9);$$

$$B_6 = \operatorname{Re}(-\bar{b}_6b_7 + \bar{b}_5b_8 - \bar{b}_4b_9 + b_8);$$

$$\begin{aligned}
B_5 &= \operatorname{Re}(-\bar{b}_5 b_7 - \bar{b}_6 b_8 + \bar{b}_5 b_9 - \bar{b}_4 b_8); \\
B_4 &= \operatorname{Re}(-\bar{b}_4 b_7 + \bar{b}_5 b_8 - \bar{b}_6 b_9 + \bar{b}_5 b_8 - \bar{b}_4 b_7); \\
b_1 &= z_1 + z_1^{-1}; \quad b_2 = 4 + z_1^2 - z_1^{-2}; \quad b_3 = z_2 + z_2^{-1}; \\
b_4 &= 2b_1 + b_3; \quad b_5 = 3 + b_1^2 + 2b_1 b_3; \quad b_6 = 4b_1 + (2 + b_1^2) b_3; \\
b_7 &= -2z_1 + p - q; \\
b_8 &= b_2 + 2z_1 b_3 - (b_1 + b_3)p + b_1 q + r; \\
b_9 &= -4z_1 - b_2 b_3 + (2 + b_1 b_3)p - 2q - b_1 r; \\
p &= (1 - z_1^2) f^{(1)}(z_1) / f'(z_1),
\end{aligned}$$

q, r выражаются формулами (12).

В работе [4] рассмотрено уравнение, подобное уравнению (16), и указаны результаты качественного анализа этого уравнения. Эти результаты остаются справедливыми для уравнения (16). Мы не будем их приводить, а отметим только, что кривая Γ может быть сейчас восемнадцати различных видов.

4. Предположим, что z_1, z_2 вещественны. Тогда имеем следующий результат для функционала (1).

Теорема. Для $f(z) \in S$, при заданных ζ и вещественных z_1, z_2 из $|z| < 1$ справедлива точная оценка

$$J(f) \leq \max_{-1 \leq t \leq 1} \ln \left| \frac{(1 - \zeta^2)(1 - z_1 z_2)}{(1 - 2\zeta^* t + \zeta^2)^2 (1 - 2z_1 t + z_1^2)(1 - 2z_2 t + z_2^2)} \right|,$$

причем знак равенства здесь имеет место только для функций

$$f(z) = \frac{z}{1 - 2zt + z^2}, \quad -1 \leq t \leq 1, \quad (17)$$

с надлежащими t .

Эта теорема следует из теоремы 2 работы [5]. Для нахождения упомянутых значений t мы при помощи (17), (8)–(12) придем к следующему уравнению:

$$\begin{aligned}
(1 - t^2) [(4b_3 - 8\operatorname{Re}(b_1))t^2 + (4|b_1|^2 - 4b_4 + 8)t + \\
+ 2(b_4 - 2)\operatorname{Re}(b_1) - |b_1|^2 b_3] = 0.
\end{aligned}$$

ЛИТЕРАТУРА

- 1 Черников В. В. Однолистные функции с вещественными коэффициентами. — «Учен. зап. Томского ун-та», № 36, 1960, 3—12.
- 2 Мосану Р. Т. An extremal problem for univalent functions associated with the Darboux formula, Ann. UMCS, A22-A24, 1968—1970, 131—135.
- 3 Шастова О. А. Качественное исследование одной экстремальной задачи на классе однолистных функций с вещественными коэффициентами. Дипломная работа, Томск. гос. ун-т, 1969.
- 4 Черников В. В. Об одном функционале на классе однолистных функций с вещественными коэффициентами. — В сб.: «Вопросы геометрической теории функций», вып. 7. Томск, Изд-во ТГУ, 1974, 103—117.
- 5 Черников В. В., Сижук П. И. О некоторых геометрических свойствах однолистных функций с вещественными коэффициентами. — В сб.: «Вопросы геометрической теории функций», вып. 6. Томск, изд-во ТГУ, 1969, 130—142.

ИССЛЕДОВАНИЕ ЭКСТРЕМАЛЬНЫХ СВОЙСТВ ОДНОГО КЛАССА ОДНОЛИСТНЫХ КОНФОРМНЫХ ОТОБРАЖЕНИЙ ПОЛУПЛОСКОСТИ В СЕБЯ

Т. Н. СЕЛЛЯХОВА

Будем называть классом H совокупность всех однолистных конформных отображений $\omega=f(z)$ верхней полуплоскости $\Pi_z^+ = \{z: \operatorname{Im} z > 0\}$ в верхнюю полуплоскость Π_ω^+ , нормированных условием

$$\lim_{z \rightarrow \infty} [f(z) - z] = 0, \quad z \in \Pi_z^+. \quad (1)$$

Класс H , различные его подклассы и расширения имеют важное теоретическое (интерполяционная проблема аналитических функций, теория самосопряженных операторов и др.) и прикладное (гидродинамика, теория упругости и др.) значения. Эти классы исследовались ранее М. А. Лаврентьевым, П. П. Куфаревым, Н. В. Поповой, В. В. Соболевым, И. А. Александровым и другими авторами.

В настоящей работе продолжается начатое в [1], [2], [3] развитие вариационно-параметрического метода исследования экстремальных свойств класса H .

§ 1. Вариационные формулы для класса $H(c)$

1. Обозначим через H_1 подкласс всех функций $f(z) \in H$, для которых при $z \rightarrow \infty$, $z \in \Pi_z^+$, существует конечный предел $\lim_{z \rightarrow \infty} z[f(z) - z] = \{f\}_1$. В работе [3] показано¹, что величина $\{f\}_1$ на классе H_1 функций $f(z)$ может принимать все значения промежутка $(-\infty, 0]$, причем $\{f\}_1 = 0$ тогда и только тогда, когда $f(z) \equiv z$.

Пусть $H(c)$ — множество всех функций $f(z) \in H_1$ таких, что $\{f\} = c$, где c , $c \leq 0$, — любое фиксированное число. Класс H_1 «расслаивается» на семейство его попарно непересекающихся подклассов $H(c)$, $-\infty < c \leq 0$: $H_1 = \bigcup_{-\infty < c \leq 0} H(c)$.

Следующая теорема дает в классе $H(c)$, $c < 0$, вариационные формулы достаточно общих видов.

¹ Доказательство этого и других цитируемых ниже результатов работы [3] дано авторами этой работы для подкласса дифференцируемых в бесконечности функций из H . Однако, как показывает анализ этих доказательств, результаты остаются верными и в классе H_1 , более широком по сравнению с рассматриваемым в [3].

Теорема 1. Пусть $f \in H(c)$, $c < 0$. Существуют семейства $\{f_k(z, t)\}$, $k=1, 2, 3, 4$, четырех видов функций класса $H(c)$, зависящих от параметра t , допускающих при любом достаточно малом $|t|$ представления следующих видов:

$$f_1(z, t) = f(z) + tP(z, \zeta) + o(t), \quad t > 0, \quad (2)$$

где

$$P(z, \zeta) = \frac{A}{f(z) - f(\zeta)} + \frac{\bar{A}}{f(z) - \overline{f(\zeta)}} + \frac{A}{|f'(\zeta)|^2} \cdot \frac{f'(z)}{\zeta - z} + \\ + \frac{\bar{A}}{|f'(\zeta)|^2} \cdot \frac{\overline{f'(z)}}{\bar{\zeta} - \bar{z}} + \frac{1}{c} [zf'(z) - f(z)] \operatorname{Re} \left[A - \frac{A}{f'^2(\zeta)} \right]; \quad (3)$$

$$f_2(z, t) = f(z) + tM(z, w_0) + o(t), \quad t > 0, \quad (4)$$

где

$$M(z, w_0) = \frac{A}{f(z) - w_0} + \frac{\bar{A}}{f(z) - \overline{w_0}} - [zf'(z) - f(z)] \operatorname{Re} A; \quad (5)$$

$$f_3(z, t) = f(z) + t|f'(z) - 1| + o(t), \quad \operatorname{Im} t > 0; \quad (6)$$

$$f_4(z, t) = f(z) + t \left\{ \frac{f'(z)}{\lambda - z} - \frac{1}{2c} [zf'(z) - f(z)] \right\} + o(t), \quad t > 0. \quad (7)$$

Здесь $A, \zeta, \zeta \in \Pi_z^+$, — любые комплексные, w_0 — любая точка множества $C \setminus \overline{\Pi_w^+}$, λ — любое вещественное, $\frac{o(t)}{t} \rightarrow 0$ равномерно внутри Π_z^+ при $t \rightarrow 0$. Формулы (2), (4), (6), (7), носят названия вариационных формул в классе $H(c)$.

Доказательство. Для доказательства формул (2), (4) воспользуемся известными из [1] вариационными формулами в классе H следующих видов:

$$f_1^*(z, t) = f(z) \cdot t \left[\frac{A}{f(z) - f(\zeta)} + \frac{\bar{A}}{f(z) - \overline{f(\zeta)}} + \frac{A}{f'^2(\zeta)} \cdot \frac{f'(z)}{\zeta - z} + \right. \\ \left. + \frac{\bar{A}}{f'^2(\zeta)} \cdot \frac{\overline{f'(z)}}{\bar{\zeta} - \bar{z}} \right] + o(t), \quad t > 0; \quad (8)$$

$$f_2^*(z, t) = f(z) + t \left[\frac{A}{f(z) - w_0} + \frac{\bar{A}}{f(z) - \overline{w_0}} \right]. \quad (9)$$

Из (8) с учетом равенств

$$\lim_{z \rightarrow \infty} z^{-1} f(z) = 1, \quad \lim_{z \rightarrow \infty} f'(z) = 1, \quad z \in \Pi_z^+,$$

первое из которых вытекает из (1), а второе доказано в [3], получаем $f^*(z) \in H(c^*)$, где

$$c^* = c + 2t \operatorname{Re} \left(A - \frac{A}{f'^2(\zeta)} \right) + o(t). \quad (10)$$

Рассмотрим новую функцию $f_1^{**}(z) = \frac{1}{\rho} f_1^*(z \cdot \rho; t)$.

При любом ρ , $\rho > 0$, $f_1^{**}(z)$ принадлежит классу $H\left(\frac{c^*}{\rho^2}\right)$. Выберем те-

перь ϱ так, чтобы было $\{f_1^{**}\}_1 = c$, т. е. чтобы $f_1^{**} \in H(c)$. Согласно (10), для этого следует положить

$$\varrho = 1 + \frac{t}{c} \operatorname{Re} \left(A - \frac{A}{f'^2(\zeta)} \right) + o(t).$$

Разлагая функцию $f_1^{**}(z)$, вычисленную при найденном значении ϱ , в ряд по степеням t и ограничиваясь членами не выше первой степени t , получим (2), (3).

Аналогичным приемом, исходя из (9), получается (4).

Для доказательства (6) рассмотрим функцию $f_3(z, t) = f(z+t) - t$. Непосредственным обращением к определениям классов проверяется,² что для любого t , $\operatorname{Im} t \geq 0$, выполняется $f_3(z, t) \in H(c)$. Разлагая $f_3(z, t)$ в ряд по степеням t , получим (6).

Наконец, рассмотрим функцию

$$h(z) = \lambda + [(z - \lambda)^2 - 2t]^{1/2},$$

зависящую от двух произвольных вещественных параметров λ , t , $t > 0$. Функция $w = h(z)$ принадлежит к классу H_1 и отображает однолистно Π_z' на полуплоскость Π_w с разрезом по прямолинейному отрезку $[\lambda, \lambda + i\sqrt{2t}]$. Образует новую функцию класса H_1 по формуле

$$\varphi(z) = f(h(z)) = f(z) + t \frac{f'(z)}{\lambda - z} + o(t).$$

Выбирая теперь ϱ , $\varrho > 0$, так, чтобы функция $f_4(z, t) = \frac{1}{\varrho} \varphi(z \cdot \varrho)$ принадлежала $H(c)$, приходим к (7).

2. Обозначим через $\tilde{H}$ подкласс всех функций $w = f(z)$ класса H , отображающих Π_z на (односвязные) области без внешних в Π_w точек, получающиеся из Π_w проведением конечного числа жордановых разрезов. Очевидно, что $\tilde{H} \subset H_1$.

В работе [4] доказана следующая теорема, которую мы приведем здесь в форме, несколько отличающейся от [4].

Теорема 2. Для каждой функции $f(z) \in \tilde{H}$, $f \neq z$, существуют τ_0 , $\tau_0 > 0$, натуральное m и вещественные функции $u_j(\tau)$, ($j = 1, 2, \dots, m$), непрерывные везде на $[0, \tau_0]$, за исключением конечного числа точек разрыва первого рода, и неотрицательные функции $\delta_j = \delta_j(\tau)$, ($j = 1, \dots, m$), $\delta_1 + \delta_2 + \dots + \delta_m = 1$, такие, что если обозначить через $\omega = \tilde{\Phi}(z, t)$ решение уравнения (Левнера)

$$\frac{d\omega}{d\tau} = \sum_{j=1}^m \frac{\delta_j}{u_j - \omega} \quad (11)$$

с начальным условием $\omega|_{\tau=0} = z$, то при любом $\tau \in (0, \tau_0]$ будет $\tilde{\Phi}(z, \tau) \in \tilde{H}$, причем $\tilde{\Phi}(z, \tau_0) = f(z)$.

З а м е ч а н и е. Число $\tau_0 > 0$ определяется заданием $f \in \tilde{H}$ однозначно. Действительно, функция $\omega = \tilde{\Phi}(z, \tau)$, $\tau \in (0, \tau_0]$, как и всякая функция класса $\tilde{H}$, разлагается в окрестности точки $z = \infty$ в ряд Лорана

² Одно из условий ($\operatorname{Im} f_3(z, t) > 0$ при $z \in \Pi_z'$) принадлежности f_3 классу H обеспечивается следующим свойством: $\Delta f \in H$, $f(z) \neq z$, выполняется $\operatorname{Im} f(z) > \operatorname{Im} z > 0$ (см [3]).

$$\omega = \tilde{\Phi}(z, \tau) = z + \frac{c_1(\tau)}{z} + \frac{c_2(\tau)}{z^2} + \dots \quad (12)$$

с вещественными коэффициентами $c_1(\tau)$, $c_2(\tau)$. Подставляя (12) в (11), получим, в частности, $c_1(\tau) = -1$, откуда с учетом равенств $c_1(0) = 0$, $c_1(\tau_0) = \{f\}_1$ находим $-\tau_0 = \{f\}_1$. Итак, если $f \in H(c) = H \cap H(c)$, то соответствующее $\tau_0 = -c$. В то же время набор величин $m, u_1, u_2, \dots, u_m, \delta_1, \dots, \delta_m$ определяется по $f \in H$, вообще говоря, не однозначно. В [4] показано, однако, что если часть Γ границы области $f(\Pi_z^+)$, лежащая в Π_w^+ , состоит из M непересекающихся жордановых кривых, то можно считать, что $m = M$ и все функции $u_1, \dots, u_m$ непрерывны на $[0, \tau_0]$.

Пусть $f \in H$ — любая функция, $u_j = u_j(\tau)$, $\delta_j = \delta_j(\tau)$, — соответствующие ей по теореме 2 вещественные функции, определенные на $[0, \tau_0]$, $\tau_0 = -\{f\}_1 > 0$, и $\tilde{\Phi}(z, \tau)$ — решение задачи Коши $\omega|_{\tau=0} = z$ для уравнения (11).

Обозначим через $F(w, \tau)$ функцию, обратную к $\tilde{\Phi}(z, \tau)$ по первому аргументу. Для $F(w, \tau)$, очевидно, выполняются условия

$$F(w, 0) = w, \quad F(f(z, \tau_0)) = z.$$

Введем еще функцию $F(w, \tau) = \tilde{\Phi}(\tilde{F}(w, \tau_0) = z$, которую будем называть присоединенной к функции $f(z)$, и обратную к $F(w, z)$ по первому аргументу функцию $\Phi(z, \tau)$. Легко видно, что вновь введенные функции удовлетворяют условиям

$$F(f(z), 0) = z, \quad F(w, \tau_0) = w, \quad (13)$$

$$\Phi(z, 0) = f(z), \quad \Phi(z, \tau_0) = z, \quad (14)$$

и функция $\omega = F(w, \tau)$ удовлетворяет уравнению Левнера (11). Отметим еще, что $\Phi(z, \tau) \in H$ при любом $\tau \in (0, \tau_0)$.

3. Приступаем к построению специальной вариации Куфарева для класса $H(c) = H \cap H(c)$, $c < 0$.

Пусть $f \in H(c)$ — любая функция, $z = F(w, \tau)$ — присоединенная функция к $f(z)$, $w = \Phi(z, \tau)$ — обратная к $F(w, \tau)$.

Проварьируем функцию $\Phi(z, \tau)$, $\tau \in [0, \tau_0]$, $\tau_0 = -c$, по формуле (8). Этим получим функцию $\Phi_1(z, \tau; t) \in H$.

Образуя затем новую функцию

$$f_*(z) = \Phi_1(F(f(z), \tau), \tau; t),$$

убеждаемся, что $f_*(z) \in H$ и при малых t , $t > 0$,

$$f_*(z) = f(z) + tK(z, \zeta, \tau) + o(t),$$

где

$$K(z, \zeta, \tau) = \frac{A}{f(z) - \Phi(\zeta, \tau)} + \frac{\bar{A}}{f(z) - \overline{\Phi(\zeta, \tau)}} + \frac{A}{[\Phi(\zeta, \tau)]^2} \cdot \frac{[F'_w(f(z), \tau)]^{-1}}{\zeta - F(f(z), \tau)} + \frac{\bar{A}}{[\overline{\Phi(\zeta, \tau)}]^2} \cdot \frac{[\overline{F'_w(f(z), \tau)}]^{-1}}{\bar{\zeta} - \overline{F(f(z), \tau)}}, \quad (15)$$

$A, \zeta \in \Pi_z^+$ — любые комплексные. Отсюда получаем

$$\{f_*\}_1 = c \mid 2t \operatorname{Re} \left[A - \frac{A}{\Phi'^2(\zeta, \tau)} \right] \mid O(t).$$

Образуя, наконец, функцию $f_1(z, \tau; t) = \frac{1}{\rho} f_*(\rho z)$, выбирая при этом $\rho > 0$, так, чтобы было $f_1(z, \tau; t) \in H(c)$, приемом, записанным при доказательстве теоремы 1, получим следующую вариационную формулу в классе $H(c)$:

$$f_1(z, \tau; t) = f(z) + tT(z, \zeta, \tau) + O(t), \quad (16)$$

где

$$T(z, \zeta, \tau) = K(z, \zeta, \tau) + N(z, \zeta, \tau);$$

$$N(z, \zeta, \tau) = \frac{1}{c} |zf'(z) - f(z)| \operatorname{Re} \left[A - \frac{A}{\Phi'^2(\zeta, \tau)} \right]. \quad (17)$$

Аналогичным способом, исходя из формул (6), (7), получим еще две вариационные формулы в классе $H(c)$

$$f_3(z, \tau; t) = f(z) + t \{ [F'_w(f(z), \tau)]^{-1} - 1 \} + O(t), \operatorname{Im} t \geq 0; \quad (18)$$

$$f_4(z, \tau; t) = f(z) + t \left\{ \left| \frac{F'_w(f(z), \tau)}{\lambda - F(f(z), \tau)} \right|^{-1} - \frac{1}{2c} |zf'(z) - f(z)| \right\} + O(t), \quad (19)$$

$t > 0, \operatorname{Im} \lambda = 0$.

§ 2. Внутренняя теорема искажения для класса $H(c)$

4. Рассмотрим следующую задачу. Найти множество значений функционала

$$I(f) = \log |f^1(z)|^3 \quad (20)$$

при произвольно фиксированном $z, z \in \Pi_z^1$, на классе $H(c)$, $c < 0$, функций $f(z)$.

Из результатов [3] следует, что класс $H(c)$, пополненный одной функцией $f(z) = z$, компактен в себе относительно равномерной сходимости внутри Π_z . Отсюда и из того, что функция $f(z) = z$ не является, очевидно, граничной для множества $I(f)$ на $H(c)$, следует существование в $H(c)$ экстремальных функций, доставляющих функционалу (20) наибольшее и наименьшее значения.

Пусть $f(z)$ — одна из таких экстремальных функций. Для нее, как и для любой функции класса $H(c)$, может быть указана близкая функция

$$f_* = f(z) + tT(z) + o(t),$$

принадлежащая этому же классу $H(c)$. Вид функции T имеет конкретный вид, зависящий от способа варьирования.

Вычисляя $I(f_*)$, будем иметь

$$I(f_*) = I(f) + t \operatorname{Re} \frac{T'(z)}{f'(z)} + o(t). \quad (21)$$

³ Здесь и в дальнейшем под $\log \omega$ понимается та ветвь логарифмической функции, для которой $\log 1 = 0$.

Если f доставляет максимум функционалу (20), то

$$t \operatorname{Re} \frac{T'_z(z)}{f'(z)} + o(t) \leq 0. \quad (22)$$

В случае минимума знак неравенства в (22) нужно изменить на противоположный. Заметим, что если в (22) малое t может быть любого знака, то необходимо $\operatorname{Re} \frac{T'_z(z)}{f'(z)} = 0$. В частности, полагая в соответствии с (6) $T(z) = f'(z) - 1$, получим

$$\operatorname{Re} \frac{f''(z)}{f'(z)} = 0. \quad (23)$$

Полагая в (22) $T(z)$ равной $P(z, \zeta)$ (см. (3)), с учетом произвольности малого t , $t > 0$, приходим в случае максимума к неравенству $\operatorname{Re} \frac{P'_z(z, \zeta)}{f'(z)} \leq 0$, которое эквивалентно неравенству вида $\operatorname{Re}[AN(\zeta)] \leq 0$, с некоторым $N(\zeta)$, не зависящим от произвольного комплексного A . Из последнего неравенства в силу произвольности аргумента A вытекает $N(\zeta) = 0$, которому в подробной записи с учетом (23) придадим следующий вид:

$$A(f)f''(\zeta) = \tilde{B}(\zeta), \quad (24)$$

где

$$A(f) = \frac{1}{[f(\zeta) - f(z)]^2} + \frac{1}{[f(\zeta) - \overline{f(z)}]^2} + r, \quad (25)$$

$$\begin{aligned} \tilde{B}(\zeta) &= \frac{1}{(\zeta - z)^2} + \frac{1}{(\zeta - \bar{z})^2} + \frac{q}{\zeta - z} + \frac{\bar{q}}{\zeta - \bar{z}} + r, \\ r &= \frac{\operatorname{Im} z}{c} \operatorname{Im} \frac{f''(z)}{f'(z)}, \quad q = i \operatorname{Im} \frac{f''(z)}{f'(z)}. \end{aligned} \quad (26)$$

Случай минимума приводит к этому же равенству. Считая теперь ζ переменной точкой в Π_z , мы можем рассматривать (24) как уравнение на искомую экстремальную функцию $f(\zeta)$.

Вид уравнения (24) в соответствии с выводами аналитической теории дифференциальных уравнений [5] показывает, что $f(\zeta)$ может иметь лишь алгебраические особенности. Следовательно, функция $w = f(\zeta)$ отображает Π_z на область $B_0 \subset \Pi_w$, ограниченную аналитическими дугами.

Область B_0 не имеет в Π_w внешних точек. В самом деле, если бы область B_0 имела хотя бы одну внешнюю точку w_0 , $w_0 \in \Pi_w$, то B_0 имела бы и бесконечно много внешних точек w_0 , $w_0 \in \Pi_w$. С другой стороны, для каждой такой точки w_0 ввиду теоремы 1 существует «близкая» к f функция $f_2 \in H(c)$ вида (4). Использование вариации (4) способом, аналогичным описанному выше, приводит к уравнению

$$\frac{1}{[w_0 - f(z)]^2} + \frac{1}{[w_0 - \overline{f(z)}]^2} + r = 0,$$

которое имеет не более четырех корней w_0 .

Из всего изложенного следует, что экстремальная функция $w=f(\zeta)$ отображает Π_w^I на область $B_0 \in \Pi_w^I$, получающуюся из Π_w^I проведением разрезов по аналитическим дугам. Значит, $f(\zeta) \in H(c)$. Обозначим через Γ часть границы B_0 , лежащую в Π_w^I . Очевидно, Γ лежит в конечной части Π_w^I . Так как каждой концевой точке разреза Γ , лежащей в Π_w^I , должен соответствовать двукратный нуль правой части уравнения (24), а всего у правой части (24) нулей (с учетом их кратностей) не более четырех, заключаем, что Γ имеет в Π_w^I не более двух концевых точек. Следовательно, Γ может быть разрезом лишь одного из следующих трех типов: 1) Γ есть один аналитический разрез с концом на оси $\text{Im} w = 0$; 2) Γ есть совокупность двух непересекающихся в Π_w^I аналитических разрезов с концами на $\text{Im} w = 0$; 3) Γ есть совокупность трех разрезов, имеющих лишь одну общую точку в Π_w^I , один из которых имеет конец на $\text{Im} w = 0$.

5. Нами показано, что экстремальная функция $f(\zeta)$ принадлежит классу $H(c)$. Это позволяет, как в п. 2, ввести присоединенную к $f(\zeta)$ функцию $F(w, \tau)$, $0 \leq \tau \leq \tau_0$, $\tau_0 = -c$, удовлетворяющую уравнению

$$\frac{\partial F}{\partial \tau} = \sum_{j=1}^m \frac{\delta_j}{u_j - F} \quad (11')$$

и условию (13). Обозначим, как и раньше, через $\Phi(z, \tau)$ функцию, обратную к $F(w, \tau)$ при каждом фиксированном $\tau \in [0, \tau_0]$.

Выведем для $F(w, \tau)$ еще одно уравнение. Для этого воспользуемся специальной вариацией (16). Рассуждениями, аналогичными приведенным ранее при выводе уравнения (24), придем к следующему уравнению:

$$B(F, \tau) F_w'^2 = A(w). \quad (27)$$

Здесь

$$B(F, \tau) = \frac{1}{(F-a)^2} + \frac{1}{(F-\bar{a})^2} + \frac{Q}{F-a} + \frac{\bar{Q}}{F-\bar{a}} + r; \quad (28)$$

$$a = a(\tau) = F(\xi, \tau); \quad Q = \frac{d}{d\tau} [F_w'(\xi, \tau)]^{-1}; \quad \xi = f(z), \quad (29)$$

а $A(w)$ и r — те же, что и в (25), (26).

Отметим, что уравнение (24) получается из (27) при $\tau = 0$. Кроме того, полагая в (27) $\tau = \tau_0$ и учитывая (13), получим

$$B(F(w, \tau_0), \tau_0) = A(w). \quad (30)$$

Выше показано, что функция $\zeta = F(w, \tau)$ при каждом τ , $\tau \in [0, \tau_0]$, отображает полуплоскость Π_w^I , имеющую по крайней мере один разрез, на Π_w^I . Поэтому $B(F)$ должна иметь по крайней мере один двукратный действительный нуль, пусть $\mu = \mu(\tau)$. Отсюда и из (28) видно, что

$$B(F) = \frac{(F-\mu)^2 P_2(F)}{(F-a)^2 (F-\bar{a})^2},$$

где $P_2(F)$ — полином от F степени не выше второй.

Убедимся, что $\text{Im} P_2(F) = 0$ при $\text{Im} F = 0$. В самом деле, с помощью вариации (18), поступая так же, как при выводе (23), приходим к равенству $\text{Re} Q = 0$, что ввиду (28) приводит к требуемому.

Покажем еще, что при фиксированном τ , $0 \leq \tau \leq \tau_0$, для всех вещественных F функция $B(F)$ сохраняет знак, причем она положительна в случае минимума и отрицательна в случае максимума функционала (20). Воспользуемся в случае максимума неравенством (22), считая в нем $t > 0$ и $T(z)$ в соответствии с (19) равным

$$T(z, \zeta) = \frac{[F'_{\omega}(\xi, \tau)]^{-1}}{\zeta - F(f(z), \tau)} - \frac{1}{2c} [zf'(z) - f(z)], \quad \text{Im } \zeta = 0.$$

Имеем неравенство $\text{Re} \frac{T_s(\zeta, \zeta)}{f'(z)} \leq 0$, которое, как нетрудно убедиться, равносильно неравенству $B(\zeta) \leq 0$ при любом ζ , $\text{Im } \zeta = 0$. Случай минимума аналогично приводит к неравенству $B(\zeta) \geq 0$.

Из знакопостоянства $B(F)$ при $\text{Im } F = 0$ заключаем, что число нулей $B(F)$ не может быть нечетным, всякий вещественный нуль для $B(F)$ должен быть двукратным, а комплексное v может быть нулем $B(F)$ лишь одновременно с нулем $\bar{v}$.

Сделаем еще одно необходимое для дальнейшего наблюдение. Из всего сказанного о нулях $B(F)$ следует, что при $\text{Im } F = 0$ знак $B(F)$ при $r \neq 0$ совпадает со знаком r . Это вместе с выявленным выше соответствием знака $B(F)$ случаям минимума и максимума приводит к тому, что $r < 0$ соответствует случаю максимума, а $r > 0$ — минимума.

Учитывая сказанное выше о виде $B(F)$, заключаем, что $B(F)$ допускает лишь одно из следующих двух представлений:

$$\begin{aligned} \text{а) } B(F) &= \frac{A_0(F - \mu)^2}{(F - a)^2(F - \bar{a})^2}, \quad A_0 = \text{const}; \\ \text{б) } B(F) &= \frac{r(F - \mu)^2(F - v)(F - \bar{v})}{(F - a)^2(F - \bar{a})^2}. \end{aligned} \quad (31)$$

Покажем сразу, что случай а) невозможен. Действительно, в противном случае в силу (30), (13) имеем

$$A(\omega) = A_0 \frac{(\omega - \mu_1)^2}{(\omega - \xi)^2(\omega - \bar{\xi})^2}, \quad (32)$$

где обозначено $\mu_1 = \mu(\tau_0)$. С другой стороны, так как представление (32) возможно лишь при $r = 0$, из (25) получим

$$A(\omega) = \frac{1}{(\omega - \xi)^2} + \frac{1}{(\omega - \bar{\xi})^2}. \quad (33)$$

Сравнивая (32) и (33), приходим к противоречивому равенству $\xi = \bar{\xi}$.

Переходим к исследованию случая б). Будем пользоваться обозначениями

$$x = x(\tau) = \text{Re } a(\tau); \quad y = y(\tau) = \text{Im } a(\tau).$$

По смыслу величины a имеем $y > 0$, $y(0) = y_0 = \text{Im } z$, $y(\tau_0) = y_1 = \text{Im } \xi = \text{Im } f(z)$. Из (11') при $\omega = \xi$ имеем

$$\frac{dy}{d\tau} = y \sum_{j=1}^m \frac{\delta_j}{|u_j - F|^2} > 0.$$

и, значит, $y(\tau)$ монотонно возрастает на $[0, \tau_0]$.

Сравнивая далее (31) с (28), приходим к равенствам

$$\mu + \operatorname{Re} v - 2x = 0, \quad (34)$$

$$r \left[\frac{(\operatorname{Im} v)^2}{2} + \mu \operatorname{Re} v - x^2 - y^2 \right] = 1 - y \operatorname{Im} Q. \quad (35)$$

Совершим в (27) предельный переход $\omega \rightarrow \xi$. Так как при этом $\bar{F} \rightarrow a$, получим

$$r \frac{(a - \mu)^2 (a - v)(a - \bar{v})}{(a - \bar{a})^2} = 1. \quad (36)$$

Отделяя в (36) мнимую и вещественную части и учитывая (34), имеем

$$y(\mu - x) (\operatorname{Im} v)^2 = 0; \quad (37)$$

$$4y^2(\mu - x)^2 + [(\mu - x)^2 - y^2][\mu - x)^2 - y^2 + (\operatorname{Im} v)^2] = -4 \frac{y^2}{r}. \quad (38)$$

Из (37) видно, что при любом фиксированном $\tau \in [0, \tau_0]$ хотя бы одна из величин $\mu - x$, $\operatorname{Im} v$ обращается в нуль. Равенство нулю обеих этих величин одновременно возможно не более чем в одной точке промежутка $[0, \tau_0]$. Действительно, если бы при $0 \leq \tau' < \tau'' \leq \tau_0$ было $\mu(\tau') - x(\tau') = \mu(\tau'') - x(\tau'') = \operatorname{Im} v(\tau') = \operatorname{Im} v(\tau'') = 0$, то из (38) имели бы $y^2(\tau') = y^2(\tau'') = -4r^{-1}$, что невозможно ввиду строгой монотонности $y(\tau)$. Из сказанного следует, что могут представиться лишь следующие три взаимоисключающие возможности:

I. $\operatorname{Im} v \equiv 0$ на $[0, \tau_0]$; равенство $x = \mu$ возможно не более, чем в одной точке $\tau' \in (0, \tau_0)$.

II. $x \equiv \mu$ на $[0, \tau_0]$; равенство $\operatorname{Im} v = 0$ возможно не более, чем в одной точке $\tau' \in (0, \tau_0)$.

III. Промежуток $[0, \tau_0]$ представляет собой объединение двух непустых промежутков Δ_1, Δ_2 , пересекающихся не более, чем в одной точке, таких, что одна и только одна из двух величин $\mu - x$, $\operatorname{Im} v$, пусть для определенности $\operatorname{Im} v$, тождественно равна нулю на Δ_1 , а на Δ_2 равна нулю только $\mu - x$, причем равенство $\operatorname{Im} v = 0$ на Δ_2 , а равенство $\mu - x = 0$ на Δ_1 возможны не более, чем в одной точке.

Исследованию случаев I—III посвящены следующие три пункта.

6. Рассмотрим случай I. В этом случае имеем

$$B(F) = r \frac{(F - \mu)^2 (F - v)^2}{(F - a)^2 (F - \bar{a})^2}; \quad (39)$$

$$A(w) = r \frac{(w - \mu_1)^2 (w - v_1)^2}{(w - \xi)^2 (w - \bar{\xi})^2}. \quad (40)$$

Ясно, что Γ состоит из двух простых разрезов, причем $\mu = \mu(\tau)$, $v = v(\tau)$ — образы подвижных концов разрезов при отображении $\xi = F(w, \tau)$, $\mu_1 = \mu(\tau_0)$, $v_1 = v(\tau_0)$ — неподвижные концы этих разрезов, лежащие на оси $\operatorname{Im} w = 0$. Функция F , согласно сказанному в п. 5, удовлетворяет уравнению

$$\frac{\partial F}{\partial \tau} = \frac{\delta_1}{(\mu - F)^2} + \frac{\delta_2}{(v - F)^2}, \quad (41)$$

$\delta_1 \geq 0$, $\delta_2 \geq 0$, $\delta_1 + \delta_2 = 1$, которое является частным случаем уравнения (11') при $m=2$ с непрерывными функциями $u_1 = \mu$, $u_2 = \nu$.

Уравнение (41) позволяет получить для рассматриваемого нами функционала (20) интегральное представление, к выводу которого мы и переходим.

С этой целью продифференцируем (41) по ω и положим в полученном равенстве $\omega = f(z)$. Получим равенство

$$\frac{d \log F'_\omega(f(z), \tau)}{d\tau} = \frac{\delta_1}{(\mu - a)^2} + \frac{\delta_2}{(\nu - a)^2}. \quad (42)$$

Интегрируя (42) по τ от 0 до τ_0 и учитывая (13), находим

$$\log f'(z) = \int_0^{\tau_0} \frac{\delta_1 d\tau}{(\mu - a)^2} + \int_0^{\tau_0} \frac{\delta_2 d\tau}{(\nu - a)^2}. \quad (43)$$

Обозначим

$$\rho = \rho(\tau) = |a - \mu|, \quad \beta = \beta(\tau) = \arg(a - \mu). \quad (44)$$

Очевидно, $\rho(\tau)$, $\mu(\tau)$ непрерывны на $[0, \tau_0]$. Используя (44) и принимая во внимание, что ν вещественно, из (34) находим

$$\rho = |a - \mu| = |a - \nu|, \quad \arg(a - \nu) = \pi - \beta. \quad (45)$$

Отделяя теперь в (43) действительные части, имея в виду условие $\delta_1 + \delta_2 = 1$ и равенства (44), (45), имеем

$$I = I(f) = \int_0^{\tau_0} \cos 2\beta \frac{d\tau}{\rho^2}. \quad (46)$$

Для вычисления интеграла в (46) удобно перейти к независимому переменному β . Докажем, что $\beta = \beta(\tau)$ — строго монотонная функция от τ на $[0, \tau_0]$. Действительно, так как при любом $\tau \in [0, \tau_0]$ выполняется неравенство $y > 0$ и по смыслу введенных в (44) величин в силу вещественности μ и ν , имеем

$$0 < \beta < \pi, \quad (47)$$

то из (45), имея ввиду (34), получим

$$y = \rho \cdot \sin \beta. \quad (48)$$

$$\mu - x = -\rho \cos \beta. \quad (49)$$

Теперь из (36) с учетом (44) получим

$$\frac{\rho^4}{y^2} = \frac{4}{|r|} = d^2 = \text{const}. \quad (50)$$

Из (50), (48) выразим y как функцию от β по формуле

$$y = d \sin^2 \beta, \quad d > 0. \quad (51)$$

Отсюда ввиду монотонности $y = y(\tau)$ заключаем, что для всех $\tau \in [0, \tau_0]$ либо $0 < \beta(\tau) \leq \frac{\pi}{2}$ и $\frac{d\beta}{d\tau} > 0$, либо $\frac{\pi}{2} \leq \beta(\tau) < \pi$ и $\frac{d\beta}{d\tau} < 0$.

Далее, из (41) при $\omega = f(z)$ получим

$$\frac{da}{a\tau} = \frac{\delta_1}{\mu-a} + \frac{\delta_2}{\nu-a}. \quad (52)$$

Отделяя в (52) мнимые части, принимая во внимание (45), имеем

$$\frac{dy}{d\tau} = \frac{y}{\rho^2}. \quad (53)$$

Обозначая $\beta(0) = \beta_0$, $\beta(\tau_0) = \beta_1$ и учитывая (53), (51), перепишем (46) в виде

$$I = 2 \int_{\beta_0}^{\beta_1} \cos 2\beta \operatorname{ctg} \beta d\beta.$$

Интегрирование даст окончательно

$$I = \log \frac{S_1}{S_0} - 2(S_1 - S_0). \quad (54)$$

Здесь использованы обозначения

$$S_0 = \sin^2 \beta_0, \quad S_1 = \sin^2 \beta_1. \quad (55)$$

Переходим к определению неизвестных S_0 , S_1 . Из (35) с учетом (26) при $\tau=0$, так как в рассматриваемом случае $\operatorname{Im} \nu = 0$, имеем

$$r(\mu_0, \nu_0 - x_0^2 + y_0^2 - c) = 1. \quad (56)$$

Далее, из (44), (45), (47) следуют формулы

$$x - \mu = y \operatorname{ctg} \beta; \quad x - \nu = -y \operatorname{ctg} \beta. \quad (57)$$

Из (50), принимая во внимание (48), при $\tau=0$ получим

$$|r| = \frac{4S_0^2}{y_0^2}. \quad (58)$$

Выясним знак величины r . Из (38) при $\operatorname{Im} \nu = 0$, $\tau=0$, находим к соотношению

$$[(\mu_0 - x_0)^2 + y_0^2]^2 = -\frac{4y_0^2}{r},$$

из которого видно, что r отрицательно. Поэтому из (58) имеем

$$r = -4S_0^2 y_0^{-2}. \quad (59)$$

Подставляя теперь в (56) найденные r и μ_0 , ν_0 из (57), в обозначениях (55) получим

$$S_0^2 - \frac{y_0^2}{c} S_0 + \frac{y_0^2}{4c} = 0,$$

откуда

$$S_0 = \frac{y_0^2 \left(1 - \sqrt{1 - \frac{c}{y_0^2}} \right)}{2c}. \quad (60)$$

Для определения неизвестного S_1 из (35) при $\operatorname{Im} v = 0$ и $\tau = \tau_0$ приходим к уравнению

$$r(\mu_1 v_1 - x_1^2 - y_1^2) = 1. \quad (61)$$

Входящее сюда неизвестное y_1 найдем из (51), полагая в (51) $\tau = 0$, $\tau = \tau_0$ и приравнявая друг к другу два различных выражения для постоянной d :

$$y_1 = y_0 S_1 S_0^{-1}.$$

Подставляя в (61) это значение y_1 , а также μ_1 , v_1 , найденные из (57) при $\tau = \tau_0$, r — по формуле (59), с учетом (60) окончательно найдем $S_1 = \frac{1}{4}$. При этом

$$y_1 = \frac{y_0}{4S_0}. \quad (62)$$

Подставляя, наконец, найденные S_1 и S_0 в (54), получим для величины $I(f)$ выражение через известные числа $y_0 = \operatorname{Im} z$ и c в виде

$$I(f) = I^*(c) = \log |f'(z)| = 2S_0 - \log S_0 - a, \quad (63)$$

где
$$a = 2 \ln 2 + \frac{1}{2} = 1,88...$$

Напомним, что в рассмотренном нами случае I выполняется $r < 0$. Следовательно, ввиду сказанного о знаке r в п. 5, значение (63) не может быть минимальным значением функционала (20).

7. Рассмотрим случай II. В этом случае функции B и A записываются в виде

$$B(F) = r \frac{(F - \mu)^2 (F - v)(F - \bar{v})}{(F - a)^2 (F - \bar{a})^2};$$

$$A(w) = r \frac{(w - \mu_1)^2 (w - v_1)(w - \bar{v}_1)}{(w - \xi)^2 (w - \bar{\xi})^2},$$

и, следовательно, Γ состоит из одного простого разреза. Функция F удовлетворяет уравнению (11') с $m=1$ и $\dot{u} = \mu$

$$\frac{\partial F}{\partial \tau} = \frac{1}{\mu - F}, \quad (64)$$

$\mu = \mu(\tau)$ — непрерывная функция.

Исходя из (64), приемом, описанным в п. 6, в старых обозначениях для искомой величины $I(f)$ получим равенство (46).

Далее, как и раньше, для $y(\tau)$ получаем уравнение (53). Перепишем (46) с учетом последнего в виде

$$I = \int_{y(0)}^{y(\tau_0)} \cos 2\beta \frac{dy}{d\tau}. \quad (65)$$

Так как $x = \mu$, то $\beta = \arg(a - \mu) = \arg(iy) = \frac{\pi}{2}$.

Поэтому (65) дает равенство

$$I = \log \frac{y_0}{y_1}. \quad (66)$$

Здесь неизвестен лишь y_1 . Определим его. Равенства (35) и (38) при $\mu = \text{Rev} = x$ переписутся при $\tau = 0$ в виде

$$r \left[\frac{(\text{Im } v_0)^2}{2} - y_0^2 + c \right] = 1; \quad (67)$$

$$(\text{Im } v_0)^2 = y_0^2 + \frac{4}{r}, \quad (68)$$

а при $\tau = \tau_0$ в виде

$$r \left[\frac{(\text{Im } v_1)^2}{2} - y_1^2 \right] = 1; \quad (69)$$

$$(\text{Im } v_1)^2 = y_1^2 + \frac{4}{r}. \quad (70)$$

Из (67), (68) определяем

$$r = \frac{2}{y_0^2 - 2c}. \quad (71)$$

Наконец, из (69), (70), (71) находим

$$y_1 = \sqrt{y_0^2 - 2c}. \quad (72)$$

Окончательно из (66) с учетом (72) получаем

$$I(f) = -I_*(c) = -\frac{1}{2} \log \left[1 - \frac{2c}{y_0^2} \right]. \quad (73)$$

Ввиду сказанного о знаке r в п. 5 из (71) следует, что значение (73) не может быть максимумом величины $I(f)$.

8. Наконец, рассмотрим случай III. Этот случай имеет место, когда Γ состоит из двухконцевого разреза, образованного тремя аналитическими дугами, сходящимися в некоторой точке $\omega^* \in \Pi_\omega^+$ под углом $\frac{2}{3}\pi$ друг к другу. Уравнение для функции $F(\omega, \tau)$ в рассматриваемом случае пишется в виде (11') с $m=2$ и с непрерывными функциями $\mu(\tau)$ и $\nu(\tau)$, одна из которых, пусть, например, $\mu(\tau)$, определена на всем промежутке $[0, \tau_0]$, а вторая — лишь на некоторой его части $[0, \tau']$, $0 < \tau' < \tau_0$. При этом $\delta_1 \equiv 1$, $\delta_2 \equiv 0$ на $[\tau', \tau_0]$ ⁴. Поэтому на $[0, \tau']$ урав-

⁴ Таким образом, роли промежутков Δ_1 , Δ_2 , участвующих в формулировке случая III в п. 5, играют промежутки $[0, \tau']$ и $[\tau', \tau_0]$ соответственно.

нение для $F(\omega, \tau)$ записывается, как и в случае I, в виде (41), а по $[\tau', \tau_0]$, как и в случае II, в виде (64). В связи с этим выражение для $I(f)$ приобретает вид

$$I(f) = 2 \int_{\beta(0)}^{\beta(\tau')} \cos 2\beta \operatorname{ctg} \beta d\beta + \int_{y(\tau')}^{y(\tau_0)} \cos 2\beta \frac{dy}{y}. \quad (74)$$

Учитывая, что на всем промежутке интегрирования второго интеграла в (74), как и в случае II, $\beta = \frac{\pi}{2}$, получим

$$I(f) = I_0 = 2S_0 - \log S_0 - 2 + \log \frac{y'}{y_1}, \quad (75)$$

где $y' = y(\tau') < y_1$, а S_0 определяется, как и в п. 6, по формуле (60).

Итак, нами найдено три значения I^* , I_* , I_0 , вычисляемые по формулам (63), (73), (75). Непосредственное сравнение показывает, что $-I_* < I_0 < I^*$.

Подведем окончательно итог всем рассмотренным этому параграфу следующей теоремой.

Теорема 3. В классе $H(c)$, $c < 0$, функций $f(z)$ для любой точки $z \in \Pi_z^+$ имеют место точные оценки

$$\frac{1}{\sqrt{1 - \frac{2c}{y_0^2}}} \leq |f'(z)| \leq \frac{1}{2} e^{-\frac{1}{2}} \frac{e'}{t}, \quad (76)$$

где

$$t = \frac{1}{c} y_0^2 \left[1 - \sqrt{1 - \frac{c}{y_0^2}} \right], \quad y_0 = \operatorname{Im} z.$$

Отметим, что одна из найденных нами точных оценок (76) — оценка снизу — повторяет, а другая — оценка сверху — улучшает соответствующие оценки работы [3], полученные другим способом. Что касается ответа на вопрос о функциях, реализующих точные нижние и верхние значения, то не приводя довольно громоздких доказательств, получаемых на пути интегрирования уравнений для экстремальных функций, и определения необходимых констант, сообщим лишь окончательный результат. Экстремальной в задаче о минимуме $I(f)$ является функция вида

$$f_0(\zeta) = \operatorname{Re} z + [(\zeta - \operatorname{Re} z)^2 + 2c]^{1/2},$$

а в задаче о максимуме — функция $f^*(\zeta)$, удовлетворяющая уравнению

$$1 + \operatorname{tg} \frac{\zeta - f^*}{4y_1} = \frac{2y_1 \operatorname{Im} z + (\zeta - \operatorname{Re} z - \operatorname{Im} z)f^*}{y_1 \operatorname{Im} z (\zeta - \operatorname{Re} z)(f^* - y_1)}.$$

Граница области f^* (Π_z^+) в плоскости $\omega = u + iv$ задается уравнением

$$1 - e^{-\frac{v}{y_1}} = \frac{4y_1 v}{(v + y_1)^2 + (u - y_1)^2}.$$

Фигурирующая в последних уравнениях величина y_1 вычисляется по (60) и (62).

Оценки (76) можно рассматривать как оценки c в зависимости от величины $|f'(z)|$, известной в какой-либо точке $z \in \Pi_z^+$.

Так, непосредственным обращением (76) относительно c получается

Следствие. Пусть f принадлежит классу H_1 , $y_1, y_0 > 0$ — любое фиксированное и в некоторой точке z , $\text{Im} z = y_0$, выполняется равенство $|f'(z)| = R > 0$. Тогда

$$-\{f\}_1 \geq \max\{P, Q\},$$

где

$$P = \frac{y_0^2}{2} \left(\frac{1}{R^2} - 1 \right), \quad Q = y_0^2 q_0,$$

а q_0 — (положительный) корень уравнения

$$\frac{\sqrt{1+q}-1}{q} + \log \frac{\sqrt{1+q}-1}{2q} - \log R - \alpha = 0,$$

$$\alpha = 2\log 2 + 0,5 = 1,88 \dots$$

ЛИТЕРАТУРА

1. Куфарев П. П., Соболев В. В., Спорышева Л. В. Об одном методе исследования экстремальных задач для функций, однолистных в полуплоскости. — Вопросы геометрической теории функций, вып. 5 «Труды Томского университета», 200, (1968), с. 142—164.
2. Соболев В. В. Исследование экстремальных задач для классов функций, однолистных в полуплоскости. ТГУ, 1969, канд. дис.
3. Александров И. А., Соболев В. В. УМЖ, 22, 3 (1970), с. 291—307.
4. Соболев В. В. Параметрические представления для некоторых классов функций, однолистных в полуплоскости. — Учен зап. Кемеровского пед ин-та, вып. 23, 1970, с. 30—41.
5. Голубев В. В. Лекции по аналитической теории дифференциальных уравнений. Изд. 2, М.-Л., 1950.

НЕКОТОРЫЕ ЭКСТРЕМАЛЬНЫЕ ЗАДАЧИ НА КЛАССЕ ТИПИЧНО ВЕЩЕСТВЕННЫХ ФУНКЦИЙ

П. И. СИЖУК

§ 1. Пусть $T_r(\varrho)$ — класс функций $f(z) = c_1 z + c_2 z^2 + \dots$, регулярных и типично вещественных¹ в круге $E = \{z: |z| < 1\}$, удовлетворяющих условию $f(\varrho) = \varrho$, где ϱ , $-1 < \varrho < 1$, — произвольно фиксированное число; $S_r(\varrho)$ — подкласс однолистных функций из $T_r(\varrho)$.

Класс $T_r(0)$ совпадает с хорошо известным классом T_r типично вещественных функций $\varphi(z)$, $\varphi(0) = 0$, $\varphi'(0) = 1$. Между функциями $f(z) \in T_r(\varrho)$, $\varrho \neq 0$, и функциями $\varphi(z) \in T_r$ имеется взаимно однозначное соответствие, устанавливаемое формулой²:

$$f(z) = \varrho + (z - \varrho)(1 - z\varrho) \frac{\varphi(z)}{z}. \quad (1)$$

Непосредственно из теоремы 3 работы [2], ввиду (1), следует

Теорема 1. Предположим, что на классе $T_r(\varrho)$ задана слабо дифференцируемая система функционалов $I(f) = \{I_n(f)\}$ ($n = 1, \dots, q$), где

$$I_n(f) = J_n(u_{11}, v_{11}, \dots, u_{s,1}, v_{s,1}; \dots; u_{1p}, v_{1p}, \dots, u_{s,p}, v_{s,p}).$$

Здесь J_n ($n = 1, \dots, q$) есть некоторые голоморфные функции своих переменных, $u_{mj} = f^{(m)}(z_j)$, $v_{mj} = \overline{f^{(m)}(z_j)}$, z_j , ($j = 1, \dots, p$), $m = 1, \dots, s_j$) — фиксированные точки в круге $|z| < 1$.

Тогда все граничные функции для $I(f)$ содержатся в семействе

$$f(z) = \sum_{i=1}^N v_i \frac{1 - 2\varrho t_i + \varrho^2}{1 - 2zt_i + z^2},$$

зависящем от вещественных параметров v_i и t_i ($i = 1, \dots, N$), подчиненных условиям: $v_i \geq 0$, $v_1 + \dots + v_N = 1$, $-1 \leq t_1 < \dots < t_N \leq 1$, причем $N \leq (s_1 + \dots + s_p) + 2p$.

На основании этой теоремы легко получается

Теорема 2. Граница области D значений функционала $I = f(z)$ на классе $T_r(\varrho)$ при заданном $z \in E$, $\operatorname{Im} z \neq 0$, состоит из кривой

¹ Функция $f(z)$ аналитическая в некоторой области G , содержащей отрезки вещественной оси, называется типично вещественной в G , если она вещественная на этих отрезках и $\operatorname{Im} f(z) \cdot \operatorname{Im} z > 0$ в остальных точках G .

² Формула (1) легко следует из формулы (31) (см стр. 77).

$$I = z \frac{1-2\rho t + \rho^2}{1-2zt + z^2}, -1 \leq t \leq 1, \quad (2)$$

и отрезка прямой

$$I = (1-t) \frac{(1-\rho)^2 \cdot z}{(1-z)^2} + t \frac{(1+\rho)^2 z}{(1+z)^2}, 0 < t < 1, \quad (3)$$

соединяющего концевые точки этой кривой.

Каждой точке кривой (2) соответствует единственная функция вида

$$f(z) = \frac{1-2\rho t + \rho^2}{1-2zt + z^2} z, -1 \leq t \leq 1, \quad (4)$$

каждой точке отрезка (3) — единственная функция вида

$$f(z) = (1-t) \frac{(1-\rho)^2 \cdot z}{(1-z)^2} + t \frac{(1+\rho)^2 \cdot z}{(1+z)^2}, 0 < t < 1. \quad (5)$$

Если $\operatorname{Im} z = 0$, то D есть отрезок вещественной оси, соединяющий точки $z(1+\rho)^2 \cdot (1+z)^{-2}$ и $z(1-\rho)^2 \cdot (1-z)^{-2}$.

Этот результат на классе T_r впервые получен В. Рогозинским [11].

Дадим приложение теоремы 2 к оценке модуля функции класса $T_r(q)$. Введем обозначения

$$\xi = \frac{1}{2}(z+z^{-1}) = \xi + i\eta, \quad a = \frac{1}{2}(1-2\rho\xi + q^2). \quad (6)$$

Следствие 1. Для $f(z) \in T_r(q)$ при заданном $z \in E$ справедливы следующие точные оценки:

Если $a \leq 0$, то

$$\left| \frac{A}{B} \right| \leq \left| \frac{f(z)}{z} \right| \leq \begin{cases} |B| & \text{при } \rho > 0, \\ |A| & \text{при } \rho < 0. \end{cases} \quad (7)$$

$$\left| \frac{A}{B} \right| \leq \left| \frac{f(z)}{z} \right| \leq \begin{cases} |B| & \text{при } \rho > 0, \\ |A| & \text{при } \rho < 0. \end{cases} \quad (8)$$

Если $a > 0$, то

$$\left| \frac{|B|}{\left| \frac{\operatorname{Im}(A\bar{B})}{A-B} \right|} \right| \leq \left| \frac{f(z)}{z} \right| \leq \begin{cases} |A| & \text{при } t_0 \geq 1 \\ \left| \frac{1-2\rho t_0 + \rho^2}{1-2zt_0 + z^2} \right| & \text{при } -1 < t_0 < 1 \\ |B| & \text{при } t_0 \leq -1, \end{cases} \quad (9)$$

$$\left| \frac{|B|}{\left| \frac{\operatorname{Im}(A\bar{B})}{A-B} \right|} \right| \leq \left| \frac{f(z)}{z} \right| \leq \begin{cases} |A| & \text{при } t_0 \geq 1 \\ \left| \frac{1-2\rho t_0 + \rho^2}{1-2zt_0 + z^2} \right| & \text{при } -1 < t_0 < 1 \\ |B| & \text{при } t_0 \leq -1, \end{cases} \quad (10)$$

$$\left| \frac{|B|}{\left| \frac{\operatorname{Im}(A\bar{B})}{A-B} \right|} \right| \leq \left| \frac{f(z)}{z} \right| \leq \begin{cases} |A| & \text{при } t_0 \geq 1 \\ \left| \frac{1-2\rho t_0 + \rho^2}{1-2zt_0 + z^2} \right| & \text{при } -1 < t_0 < 1 \\ |B| & \text{при } t_0 \leq -1, \end{cases} \quad (11)$$

где

$$A = \left(\frac{1-\rho}{1-z} \right)^2, \quad B = \left(\frac{1+\rho}{1+z} \right)^2, \quad t_0 = \xi - \frac{\rho\eta^2}{a}.$$

Знак равенства в (7) и (11) слева и в (8) — (9) справа имеет место для функции (4) с $t=1$, в (7) и (11) справа и в (8) — (9) слева — для функции (4) с $t=-1$, в (10) справа — для функции (4) с $t=t_0$, слева — для функции (5) с $t=t_0$

$$t_0 = \frac{(1-\rho)^2 \cdot (1+t_0)}{(1-\rho)^2 \cdot (1+t_0) + (1+\rho)^2 \cdot (1-t_0)}$$

и только для этих функций.

Доказательство. Из теоремы 2 очевидно, что при $\text{Im} z = 0$ справедливы оценки (7) — (9), (11). Пусть $\text{Im} z \neq 0$. Уравнение (2) в плоскости $l = x + iy$ определяет не содержащую начало координат дугу l окружности

$$\left(x - \frac{\rho}{2}\right)^2 + \left(y + \frac{a}{2\eta}\right)^2 = \frac{a^2 + \rho^2 \eta^2}{4\eta^2} \quad (12)$$

с концевыми точками I_1 и $I_2: I_1 = zA, I_2 = zB$. Из точек окружности (12) наибольший модуль имеет точка $I_0 = z \frac{1 - 2\rho t_0 + \rho^2}{1 - 2zt_0 + z^2}$, диаметрально противоположная началу координат. Точка I_0 является внутренней точкой дуги l тогда и только тогда, когда $a > 0$ и $-1 < t_0 < 1$. В этом случае точка $(1 - t_0)I_1 + t_0 I_2$, имеющая наименьший модуль на прямой $I_1 I_2$, принадлежит отрезку (3) и, значит, имеет место оценки (10). Справедливость оценок (7) — (9), (11) следует из равенства

$$(|I_2|^2 - |I_1|^2) \cdot |\xi^2 - 1|^2 = 2a(2\rho - (1 + \rho^2)t_0).$$

Поскольку каждой точке границы области D соответствует только одна функция класса $T_r(\rho)$, то знаки равенства в (7) — (11) имеют место только для функций, указанных в следствии.

Так как функции (4) принадлежат классу $S_r(\rho)$, то имеем

Следствие 2. Пусть $f(z) \in S_r(\rho)$. Тогда для $|f(z)|$ справедливы точные верхние оценки (7) — (11) и точные нижние оценки (7) — (9), (11) с указанными там случаями знаков равенства.

§ 2. Определим ξ и a соотношениями (6). Для $a > 0, |\xi| < 1$ положим

$$\eta_1(\xi) = \begin{cases} (1 + \xi) \cdot \sqrt{\frac{a}{3a + 4\rho(\xi + 1)}} & \text{при } -1 < \xi \leq \xi_0 \\ (1 - \xi) \cdot \sqrt{\frac{a}{3a + 4\rho(\xi - 1)}} & \text{при } \xi_0 \leq \xi < 1 \end{cases};$$

$$\eta_2(\xi) = \begin{cases} \sqrt{p_2 + \sqrt{q_2}} & \text{при } -1 < \xi \leq \xi_0 \\ \sqrt{p_1 + \sqrt{q_1}} & \text{при } \xi_0 \leq \xi < 1 \end{cases},$$

где

$$\xi_0 = \begin{cases} 0 & \text{если } \rho = 0 \\ 1/2 \cdot (3\lambda - \sqrt{9\lambda^2 - 8}) & \text{если } \rho \neq 0; \end{cases}$$

$$p_k = \begin{cases} (4\delta_k/3 - \xi_k) \cdot \xi_k & \text{если } \rho = 0 \\ 1/2 \cdot (\lambda + \delta_k)(3\xi_k + \delta_k - 3\lambda) - \xi_k^2 & \text{если } \rho \neq 0 \end{cases};$$

$$q_k = \begin{cases} 0 & \text{если } \rho = 0; \\ 1/4 \cdot (\lambda + \delta_k)(\lambda - \xi)[(9\lambda - 7\delta_k)(\lambda - \xi) + 8(1 - \delta_k\lambda)] & \text{если } \rho \neq 0 \end{cases}$$

$$\lambda = 1/2 \cdot (\rho + \rho^{-1}), \quad \xi_k = \xi + \delta_k, \quad \delta_k = (-1)^k, \quad k = 1, 2.$$

Докажем следующее основное предложение.

Теорема 3. Пусть D' — область значений функционала

$$I' = \frac{2z^2}{1 - z^2} f'(z)$$

($z \in E$ и фиксировано) на классе $T_r(\rho)$. Предположим, что $\text{Im} z \neq 0$. Тогда:

I. При $a > 0$, если 1) $|\xi| \geq 1$; 2) $|\xi| < 1$, $|\eta| \geq \eta_2(\xi)$, D' — часть плоскости $I' = u + iv$, не содержащая ∞ и ограниченная дугой большой петли улитки Паскаля

$$a^2(u^2 + v^2) = [2\eta^2(u^2 + v^2) + au + \rho\eta v]^2 \quad (13)$$

с концевыми точками

$$I'_1 = \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{1+\rho}{1+\zeta} \right)^2 \quad I'_2 = \frac{1}{2} \left(\frac{1-\rho}{1-\zeta} \right)^2 \quad (14)$$

и прямолинейным отрезком, соединяющим эти точки.

II. При $a > 0$, если $|\xi| < 1$, $\eta_1(\xi) < |\eta| < \eta_2(\xi)$, D' — выпуклая оболочка дуги большой петли улитки Паскаля (13) с концевыми точками I'_1 и I'_2 .

III. При $a > 0$, если $|\xi| < 1$ и $|\eta| \leq \eta_1(\xi)$, D' — выпуклая оболочка улитки Паскаля (13).

IV. При $a < 0$ D' — часть плоскости $I' = u + iv$, не содержащая ∞ и ограниченная дугой малой петли улитки Паскаля (13) с концевыми точками (14).

V. При $a = 0$ D' — сегмент круга, ограниченный не содержащей начало координат дугой окружности:

$$u^2 + \left(v + \frac{\rho}{4\eta} \right)^2 = \frac{\rho^2}{16\eta^2} \quad (15)$$

с концевыми точками (14) и хордой, стягивающей эти точки.

Если $\text{Im} z = 0$, то D' — отрезок вещественной оси $u_1 \leq u \leq u_2$, где $u_1 = \min_{-1 \leq t \leq 1} u(t)$; $u_2 = \max_{-1 \leq t \leq 1} u(t)$; $u(t) = \frac{1}{2}(1 - 2\rho t + \rho^2)(\xi - t)^2$.

Все граничные функции принадлежат семейству

$$f(z) = \sum_{i=1}^3 v_i \frac{1 - 2\rho t_i + \rho^2}{1 - 2zt_i + z^2} z,$$

где $v_1 + v_2 + v_3 = 1$, $v_i \geq 0$, $-1 \leq t_i \leq 1$, $i = 1, 2, 3$.

Доказательство. Согласно теореме 1 область D' есть выпуклая оболочка той дуги γ кривой, заданной параметрически ($-\infty < t < \infty$):

$$u = \frac{(1 - 2\rho t + \rho^2)[(\xi - t)^2 - \eta^2]}{2[(\xi - t)^2 + \eta^2]^2}, \quad v = \frac{\eta(t - \xi)(1 - 2\rho t + \rho^2)}{[(\xi - t)^2 + \eta^2]^2}, \quad (16)$$

которая соответствует изменению параметра t от -1 до 1 .

Отсюда сразу следует утверждение теоремы в случае, когда $\text{Im} z = 0$.

Пусть $\text{Im} z \neq 0$. Исключая t из уравнений (16), получаем (неявное) уравнение кривой (16) в виде (13), если $a \neq 0$, и в виде (15), если $a = 0$. Значит, при $a = 0$ область D' ограничена дугой окружности (15) с концевыми точками (14) и ее хордой, т. е. справедливо утверждение V.

Считая $a \neq 0$ переходом к полярным координатам R и θ , взяв начало координат за полюс, а ось u , повернутую на угол φ , такой, что

$$\sin \varphi = -\rho\eta(a^2 + \rho^2\eta^2)^{-\frac{1}{2}}; \quad \cos \varphi = -a(a^2 + \rho^2\eta^2)^{-\frac{1}{2}},$$

— за полярную ось, убеждаемся, что кривая (13) (или, что то же, (16)) представляет собой улитку Паскаля [12] с уравнением

$$R = \frac{1}{2\gamma^2} [(a^2 + \rho^2 \gamma^2)^{\frac{1}{2}} \cdot \cos \theta + |a|]. \quad (17)$$

Принимая далее во внимание, что точки малой (большой) петли улитки (17) лежат внутри (вне) окружности $R = \frac{1}{2\gamma^2} (a^2 + \rho^2 \gamma^2)^{\frac{1}{2}} \cos \theta$, заключаем, что при $a < 0$ точки дуги γ расположены на малой петле улитки и при $a > 0$ — на большой. Причем, как видно из уравнений (16), дуга γ никогда не содержит внутри себя узловую точку (начало координат). Следовательно, в случае, когда $a < 0$, справедливо утверждение IV.

Пусть $a > 0$. Касательные γ_k к кривой (16) в точках I'_k ($k=1, 2$) помимо точек касания могут иметь с кривой (16) не более чем две общие точки (в дальнейшем будем иметь в виду только такие точки). Параметры t этих точек удовлетворяют одному из уравнений

$$A_k (\xi - t)^2 + B_k (\xi - t) + C_k = 0, \quad (18)$$

где

$$\begin{aligned} A_k &= \frac{\lambda_k^2}{4}, \quad C_k = \gamma^2 \left(\frac{3\lambda_k^2}{4} - 2\rho\lambda_k \tilde{\xi}_k + \rho^2 \tilde{\xi}_k^2 + \rho^2 \gamma^2 \right); \\ B_k &= \frac{1}{2} \rho \lambda_k \cdot (\gamma^2 - 3\tilde{\xi}_k^2) + \rho^2 \tilde{\xi}_k (\tilde{\xi}_k^2 + \gamma^2) + \frac{1}{2} \tilde{\xi}_k \cdot \lambda_k^2; \\ \lambda_k &= (\rho - \delta_k)^2, \quad \tilde{\xi}_k = \xi - \delta_k, \quad k=1, 2, \end{aligned}$$

получающихся из совместного рассмотрения уравнения касательной в точке I'_k и кривой (16).

Для того, чтобы граница области D' состояла из дуги γ и прямолинейного отрезка, стягивающего его концы, необходимо и достаточно, чтобы γ не имела общих внутренних точек с γ_k , т. е. чтобы корни

$$t_k^{\pm} = \xi + \frac{B_k \pm \sqrt{B_k^2 - 4A_k C_k}}{2A_k}$$

уравнений (18) были комплексными или действительными с модулями, не меньшими единицы, что всегда имеет место при $|\xi| \geq 1$, а при $|\xi| < 1$ тогда и только тогда, когда выполняется одно из трех условий:

$$1) \quad Q_k = a\tilde{\xi}_k^2 - \gamma^2(3a + 4\rho\tilde{\xi}_k) < 0, \quad k=1, 2; \quad (19)$$

$$2) \quad Q_1 < 0, \quad Q_2 > 0, \quad R_2 \geq 0; \quad (20)$$

$$3) \quad Q_1 > 0, \quad Q_2 < 0, \quad R_1 \geq 0. \quad (21)$$

Здесь $R_k = 2\rho^2 (\tilde{\xi}_k^2 + \gamma^2)^2 + (\rho + \delta_k) [(3a - 4\rho\delta_k) (\tilde{\xi}_k^2 + \gamma^2) + 4(\rho - a\delta_k)\xi_k]$, $k=1, 2$.

Отсюда, рассмотрев неравенства (19) — (21), приходим к утверждению I.

Для того чтобы D' совпадала с выпуклой оболочкой улитки Паскаля (13), необходимо и достаточно, чтобы каждая из касательных γ_k

имела, по крайней мере, одну общую точку с γ , т. е. чтобы корни $t_k^\pm$ были действительными и, по крайней мере, было $t_1^- < 1$, а $t_2^+ > -1$. Это имеет место тогда и только тогда, когда $|\xi| < 1$ и $Q_k \geq 0$, $k=1, 2$, т. е. когда $|\eta| \leq \eta_1(\xi)$. Следовательно, утверждение III справедливо.

При $|\xi| < 1$, когда $\eta_1(\xi) < |\eta| < \eta_2(\xi)$, т. е. когда имеют место неравенства $Q_1 < 0$, $Q_2 > 0$, $R_2 < 0$ или неравенства $Q_2 < 0$, $Q_1 > 0$, $R_1 < 0$, дуга γ имеет с γ_k ($k=1, 2$) одну и только одну общую точку. В этом случае выполняется утверждение II.

Теорема доказана.

При $\rho=0$ теорема 3 дает соответствующий результат С. А. Копанева [6].

Приведем некоторые следствия теоремы 3.

Следствие 1. Для $f(z) \in T_r(\rho)$ при заданном $z \in E$ справедливы точные оценки

$$|f'(z)| \leq \begin{cases} |A'|, & \text{если } t_1 > 1 \\ |1-z^2| \frac{1-2\rho t_1+\rho^2}{|1-2zt_1+z^2|^2}, & \text{если } -1 < t_1 < 1 \\ |B'|, & \text{если } t_1 \leq -1; \end{cases} \quad (22)$$

$$(23)$$

$$(24)$$

$$|f'(z)| \geq \begin{cases} |A'|, & \text{если } |\zeta| > 1 \text{ и } t_2 \leq 0 \\ |B'|, & \text{если } |\zeta| > 1 \text{ и } t_2 > 1 \\ \left| \frac{\operatorname{Im}(A'\bar{B}')}{A'-B'} \right|, & \text{если } |\zeta| > 1 \text{ и } 0 < t_2 < 1 \\ 0, & \text{если } |\zeta| \leq 1. \end{cases} \quad (25)$$

$$(26)$$

$$(27)$$

$$(28)$$

Здесь $A' = (1-q)^2(1+z)(1-z)^{-3}$; $B' = (1+q)^2(1-z)(1+z)^{-3}$;

$$t_1 = \xi - \frac{\rho\eta^2}{a \cdot \sqrt{a^2 + \rho^2\eta^2}}; \quad t_2 = \operatorname{Re} \frac{A'}{A'-B'}.$$

Знак равенства в (22) и (25) имеет место только для функции (4) с $t=1$, в (24) и (26) — только для функции (4) с $t=-1$, в (23) — только для функции (4) с $t=t_1$, в (27) — только для функции (5) с $t=t_2$.

Доказательство этого следствия при $a=0$ ничем не отличается от доказательства следствия 1 теоремы 2. Оно приводит к оценкам (22) — (27).

Пусть $a \neq 0$ и $\operatorname{Im} z \neq 0$. Сопоставляя (16) и (17), заключаем, что из точек той петли улитки (13), которая содержит граничные точки D' , наибольший модуль, равный $\frac{1}{2\eta^2}(a + \sqrt{a^2 + \rho^2\eta^2})$, имеет точка, соответствующая по (16) значению параметра $t=t_1$. Значит, при $|t_1| < 1$ имеет место оценка (23). Справедливость оценок (22) и (24) вытекает из равенства

$$\frac{1}{2} (|I_2| - |I_1|) |\zeta^2 - 1|^2 = (t_1 - q)(1 - qt_1).$$

Оценка (28) имеет место тогда и только тогда, когда узловая точка улитки (13) принадлежит области D' , т. е. когда $|\zeta| \leq 1$.

В случае, когда $|\zeta| > 1$, для осуществления оценки (27) необходимо и достаточно, чтобы точка $I'(t_2)$, имеющая наименьший модуль на прямой $I'(t) = (1-t)I_2' + tI_1'$, $-\infty < t < \infty$, лежала внутри отрезка, соединяющего точки I_1' и I_2' , т. е. чтобы было $0 < t_2 < 1$. Так как усло-

вне $t_2 < 0$ равносильно неравенству $|A'|^2 < \operatorname{Re}(A' \cdot \bar{B}')$, а условие $t_2 > 1$ — неравенству $|B'|^2 < \operatorname{Re}(A' \cdot \bar{B}')$, то при $t_2 \leq 0$ имеет место оценка (25), а при $t_2 \geq 1$ — оценка (26).

При $\operatorname{Im} z = 0$, исследуя функцию $u(t) = \frac{1}{2}(1 - 2pt + p^2)(\xi - t)^2$, приходим к утверждению (22) — (26).

Точность оценок (22) — (28) с указанными случаями знаков равенства следует из приведенного доказательства.

Из следствий 1 теорем 2 и 3 при $\rho = 0$ получаются известные [3—5] результаты об оценках величин $|f(z)|$, $|f'(z)|$ на классе T_r .

Следствие 2. Пусть $f(z) \in S_r(\rho)$. Тогда для $|f'(z)|$ справедливы точные оценки (22) — (26) с указанными там случаями знаков равенства.

Заметим, что для $f(z) \in S_r(\rho)$ верхние оценки (22) — (24), так же как и верхние оценки (7) — (11), ранее [7] были получены В. В. Черниковым и автором вариационным методом. Нижние оценки (25) — (26) и (7) — (9), (11) получить вариационным методом не удалось.

Следствие 3. Для $f(z) \in T_r(\rho)$ в круговом двуугольнике $K \subseteq E$, содержащем $z = 0$ и ограниченном дугами окружностей $|z \pm i| = \sqrt{2}$ справедливы точные оценки

$$\left. \begin{array}{l} \arg \frac{1-z}{(1+z)^3} \\ \arg \frac{1+z}{(1-z)^3} \end{array} \right\} \leq \arg f'(z) \leq \left\{ \begin{array}{l} \arg \frac{1+z}{(1-z)^3}, \text{ если } \operatorname{Im} z \geq 0 \\ \arg \frac{1-z}{(1+z)^3}, \text{ если } \operatorname{Im} z \leq 0, \end{array} \right.$$

причем знаки равенства имеют место только для функций (4) с $t = \pm 1$.

Доказательство этого предложения может быть проведено так же, как в [6] (см. следствие 3) или как в [4] (см. теорему 4.). Впрочем, для $f(z) \in T_r(\rho)$ оценки $\arg f(z)$ и $\arg f'(z)$ совпадают с оценками этих величин в T_r , полученных впервые Г. М. Голузиным [3], и легко следуют из них ввиду связи классов T_r и $T_r(\rho)$. Здесь оценка $\arg f'(z)$ приводится лишь чтобы получить

Следствие 4. Функции $f(z) \in T_r(\rho)$ однолиственны в K и почти выпуклы в $E_0 = \{z: |z| < \sqrt{2} - 1\}$ с

$$\operatorname{Re}(1 - z^2)f'(z) > 0. \quad (29)$$

Для функции

$$f_0(z) = \frac{(1 - \rho^2)^2(1 + z^2)}{(1 + \rho^2)(1 - z^2)^2} z,$$

принадлежащей классу $T_r(\rho)$, $f'_0((\sqrt{2} - 1)i) = 0$.

Доказательство. Пусть $z \in K$ и $\operatorname{Im} z > 0$. Тогда по предыдущему следствию имеем

$$|\arg(1 - z^2)f'(z)| < 2 \arg \frac{1+z}{1-z}.$$

Значит, неравенство (29) имеет место, если $4 \arg \frac{1+z}{1-z} < \pi$. Это условие равносильно такому: $2\operatorname{Im} z < 1 - |z|^2$. Последнее приводится к виду $|z + i| < \sqrt{2}$.

Случай $\text{Im} z < 0$ рассматривается аналогично и приводит к утверждению неравенства (29) при условии $|z-i| < \sqrt{2}$.

Таким образом, любая функция $f(z) \in T_r(\rho)$ удовлетворяет в K неравенству (29) и, следовательно, является однолистной в K и почти выпуклой в E_0 относительно выпуклой функции $\frac{1}{2} \ln \frac{1+z}{1-z}$.

Замечание. Однолистность функций $\varphi(z) \in T_r$ в K установлена Г. М. Голузиным [3]. В. Кирван [8], по-видимому, впервые показал, что функции $\varphi(z) \in T_r$ звездообразны в E_0 и для некоторой функции $\varphi_0(z) \in T_r$, $\varphi_0(z_0) = 0$, $z_0 \in \partial E_0$. Несколько позже М. Робертсон [9] сравнительно просто пришел к утверждению о почти выпуклости функций $\varphi(z) \in T_r$ в E_0 , но его простой метод не позволил ему сделать заключение о звездообразности $\varphi(z)$ в E_0 .

Следствие 5. Пусть $f_k(z) \in S_r(\rho)$, $k=1, \dots, N$. Тогда функция

$$f(z) = \sum_{k=1}^N t_k f_k(z), \quad t_k > 0, \quad \sum_{k=1}^N t_k = 1, \quad (30)$$

в круге $|z| < \sqrt{2} - 1 = 0,414\dots$ есть однолистная и почти выпуклая относительно выпуклой функции $\frac{1}{2} \ln \frac{1+z}{1-z}$, причем при $N=2$, когда

$$t_1 = \frac{1}{2} (1+\rho)^2 (1+\rho^2)^{-1}, \quad t_2 = \frac{1}{2} (1-\rho)^2 (1+\rho^2)^{-1}, \quad f_1(z) = (1-\rho)^2 (1-z)^{-2} \cdot z \text{ и } f_2(z) = (1+\rho)^2 (1+z)^{-2} \cdot z, \text{ тогда } f' \{(\sqrt{2}-1)i\} = 0.$$

Это утверждение вытекает сразу из следствия 3, поскольку функция (30) принадлежит классу $T_r(\rho)$.

§ 3. В работе [1] показано, что любая функция $f(z) \in T_r(\rho)$ представима в E по формуле

$$f(z) = \int_{-1}^1 z \frac{1-2\rho t + \rho^2}{1-2zt + z^2} d\alpha(t), \quad (31)$$

где $\alpha(t)$ — вещественная, неубывающая функция в $-1 \leq t \leq 1$ с $\alpha(1) - \alpha(-1) = 1$; обратно, всякая функция, представимая в E этой формулой, принадлежит классу $T_r(\rho)$.

Из формулы (31), разлагая обе части в степенные ряды, для любой функции

$$f(z) = c_1 z + c_2 z^2 + \dots + c_n z^n + \dots \in T(\rho) \quad (32)$$

получаем интегральные представления коэффициентов

$$c_n = \int_{-1}^1 (1-2\rho t + \rho^2) U_{n-1}(t) d\alpha(t), \quad n=1, 2, \dots,$$

где $U_{n-1}(t)$ — полиномы Чебышева второго рода, связанные рекуррентным соотношением $U_{n+1}(t) = 2tU_n(t) - U_{n-1}(t)$, $U_0(t) = 1$, $U_1(t) = 2t$, $n=1, 2, \dots$. Отсюда сразу следует

Теорема 4. Если $f(z) \in T_r(\rho)$ и имеет в окрестности точки $z=0$ разложение (32), то

$$\min_{-1 \leq t \leq 1} C_n(t) \leq c_n \leq \max_{-1 \leq t \leq 1} C_n(t), \quad n=1, 2, \dots, \quad (33)$$

где $C_n(t) = (1-2\rho t + \rho^2) \cdot U_{n-1}(t)$, $U_{n-1}(t)$ — полиномы Чебышева второго рода.

Знаки равенства в (33) имеют место только для функций (4) с надлежащими t .

Отметим, что для функций $f(z) \in S_r(\rho)$ эта теорема установлена ранее в работе [10], исходя из других соображений. Приведенные в [10] конкретные оценки некоторых коэффициентов для функций класса $S_r(\rho)$ (см. следствия 1—4 теоремы 2) остаются точными во всем классе $T_r(\rho)$.

ЛИТЕРАТУРА

Черников В. В. Об одном функционале на классе однолистных функций с вещественными коэффициентами.— В сб. «Вопросы геометр. теории функций», вып. 7; «Труды Томского ун-та», 238 (1974), 103—117.

2. Александров И. А., Гутлянский В. Я. Экстремальные задачи на классах аналитических функций, имеющих структурную формулу. ДАН СССР 165, 5 (1965), 983—986.

3. Голузин Г. М. О типично вещественных функциях Матем. сборник, 27(69), 2 (1950), 201—218.

4. Ремизова М. П. Экстремальные задачи на классе типично вещественных функций.— «Изв. вузов», Математика, № 1 (32), 1963, 135—144.

5. Сюй Сяо-бай Минимальный модуль и минимальное искажение для класса типично вещественных функций. Шусюэ сюэбао. Acta math. sinica 6, 2 (1956), 313—319.

6. Копанев С. А. Об одном функционале на классе типично вещественных функций.— В сб.: «Вопросы геометрической теории функций», вып. 5. «Труды Томского ун-та», 200 (1968), 100—111.

7. Черников В. В., Сижук П. И. Теоремы искажения для однолистных функций с вещественными коэффициентами.— В сб. «Вопросы геомет. теории функций», вып. 4. «Труды Томского ун-та», 189 (1966), 211—220.

8. Kirwan W. E. Extremal problems for the typically real functions, Amer. I. Math., 89 (1966), 942—954.

9. Robertson M. S. The sum of univalent functions. Duke Math. I., 37, 3, (1970) 411—419.

10. Черников В. В., Сижук П. И. О некоторых оценках коэффициентов однолистных функций.— В сб.: «Вопросы геомет. теории функций», вып. 5. «Труды Томского ун-та», 200 (1968), 205—215.

11. Rogosinski W. Über positive harmonische Entwicklungen und typisch reelle Potenzreihen. Math. z., 35, 1 (1932), 93—121.

12. Савельев А. А. Плоские кривые. Физматгиз. М., 1960.

ВАРИАЦИОННАЯ ТЕОРЕМА ДЛЯ ФУНКЦИЙ, ОДНОЛИСТНЫХ В ПОЛОСЕ

Б. Г. ЦВЕТКОВ

Пусть

$$\Pi_z = \{z : |\operatorname{Im} z| < \frac{1}{2}\pi\}, \quad L_0 = \{z : \operatorname{Im} z = 0\}.$$

Определение. Класс T — совокупность всех функций $w = f(z)$, регулярных и однолистных в полосе Π_z , принимающих значения из полосы Π_w для каждой из которых существуют конечные пределы

$$\lim_{\operatorname{Re} z \rightarrow \pm\infty} \operatorname{Re} [f(z) - z] = f_{\pm}, \quad z \in L_0.$$

Примером функций класса T являются функции

$$w = z - \rho \operatorname{th} \frac{1}{2} z, \quad \rho \in (0, 1).$$

В своей работе [1] В. В. Соболев применил вариационный метод исследования экстремальных задач на классах однолистных функций, конформно отображающих полуплоскость в себя и оставляющих неподвижной одну фиксированную граничную точку. В данной статье доказывается возможность применения вариационного метода исследования экстремальных задач на классах однолистных функций, конформно отображающих полосу в себя и оставляющих неподвижными две фиксированные граничные точки.

Учитывая, что величина $\overline{f'(z)}$ представляет собой скорость частиц потока ([2] с. 245—258, 398—404), можно результаты, полученные на классе T , использовать для изучения потока в канале.

Основная задача данной статьи — применение метода внутренних вариаций Г. М. Голузина для построения варьированной однолистной функции, конформно отображающей полосу Π_z в полосу Π_w и оставляющей неподвижными две фиксированные граничные точки.

В статье получены вариационные формулы для функций класса T . Результаты, полученные при помощи вариационных формул, предполагается изложить в следующей статье.

В дальнейшем будем использовать обозначение

$$\omega = \operatorname{th} \frac{1}{2} z, \quad z \in \Pi_z.$$

Теорема 1. Если регулярная и однолистная в полосе Π_z функция $\omega = f(z)$ удовлетворяет условию

$$2|\operatorname{Im} f(z)| < \pi, \quad z \in \Pi_z, \quad (1)$$

а регулярная в области $K = \{z: r < |\omega| < 1\}$, $r > 0$, функция $q(\omega)$ удовлетворяет условию

$$|q(\omega)| < 1, \quad z \in K, \quad (2)$$

то существует такая постоянная ϵ_0 , что при $\epsilon \in (0, \epsilon_0)$ найдется функция $\varphi(\epsilon, \omega)$ со следующими свойствами:

1) $\varphi(\epsilon, \omega)$ регулярна в области $K_\Delta = \{z: r + \Delta < |\omega| < 1\}$, $\Delta > 0$, а как функция переменной ω представима в кольце

$$K_1 = \{\omega: r + \Delta < |\omega| < (r + \Delta)^{-1}\}, \quad r + 3\Delta < 1,$$

в виде ряда

$$\varphi(\epsilon, \omega) = \sum_{m=-\infty}^{+\infty} a^{(m)} \omega^m; \quad (3)$$

2) если $|\omega| = 1$, то $\operatorname{Im} \varphi(\epsilon, \omega) = 0$;

3) функция

$$z^* = z + \varphi(\epsilon, \omega) \quad (4)$$

однолистка в области $K_2 = \{z: r + 2\Delta < |\omega| < 1\}$;

4) если при любом $\epsilon \in (0, \epsilon_0)$ функция

$$F(\epsilon, z) = f(z) + \epsilon q(\omega) \quad (5)$$

однолистка в области K , то функция

$$f^*(z) = \begin{cases} F(\epsilon, z^*), & z \in K_2 \\ \sum_{n=0}^{\infty} \epsilon^n d_*^n F(\epsilon, z^*), & z \in \Pi' = \{z: |\omega| < 1 - \Delta\}, \end{cases} \quad (6)$$

где символом d_*^n обозначен оператор

$$d_*^n = \left\{ \frac{1}{n!} \frac{d^n}{d\epsilon^n} \dots \right\}_{\epsilon=0},$$

будет регулярной и однолистной в полосе Π_z при любом $\epsilon \in (0, \epsilon_0)$.

Доказательству теоремы 1 предположим три леммы.

Лемма 1. Регулярная в полосе Π_z функция $\omega = f(z)$ представима в виде

$$f(z) = z + p(\omega), \quad (7)$$

где

$$p(\omega) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \omega^n, \quad (8)$$

и если она удовлетворяет условию (1), то для коэффициентов a_n имеют место оценки

$$|a_n| \leq 2\pi, \quad n=1, 2, \dots \quad (9)$$

Доказательство. Так как функция $f(z)$ регулярна в полосе Π_z , то суперпозиция

$$\rho(\omega) = f(z) - z,$$

где

$$z = \ln(1+\omega) (1-\omega)^{-1},$$

как функция переменной ω будет регулярной в единичном круге $|\omega| < 1$ и представима в виде ряда (8).

Если $\rho \in (0, 1)$, то функция $i\rho(\rho\omega)$ непрерывна в замкнутом круге $|\omega| \leq 1$, а следовательно, представима формулой Шварца

$$i\rho(\rho\omega) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \operatorname{Re} i\rho(\rho e^{i\alpha}) \frac{e^{i\alpha} + \omega}{e^{i\alpha} - \omega} d\alpha + C, \quad \operatorname{Re} C = 0.$$

Поскольку при $n=1, 2, \dots$, справедливы равенства

$$i\rho^n a_n = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} \operatorname{Re} i\rho(\rho e^{i\alpha}) e^{-i(n+1)\alpha} d\alpha,$$

то, учитывая условие (1) и тождество $\operatorname{Re} i\alpha = -\operatorname{Im} \alpha$, заключаем, что выполняются неравенства

$$|a_n| \rho^n \leq 2\pi, \quad n=1, 2, \dots,$$

из которых при $\rho \rightarrow 1$ следуют оценки (9).

Лемма доказана.

Лемма 2. Если регулярная по переменной ω в кольце $K_3 = \{\omega: r_1 < |\omega| < R_1\}$, $0 < r_1 < R_1$,

$$q(\omega) = \sum_{m=-\infty}^{+\infty} b_m \omega^m, \quad z \in K_3, \quad (10)$$

удовлетворяет условию

$$|q(\omega)| < 1, \quad z \in K_3, \quad (11)$$

то для коэффициентов b_m ряда (10) имеют место оценки

$$|b_m| \leq \begin{cases} R_1^m, & m = -1, -2, \dots \\ r_1^m, & m = 1, 2, \dots \end{cases} \quad (12)$$

Доказательство. Так как коэффициенты ряда (10) вычисляются по формулам

$$b_m = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{q(\rho e^{i\alpha})}{\rho^m e^{im\alpha}} d\alpha, \quad \rho \in (0, 1), \quad m = 0, \pm 1, \pm 2, \dots,$$

то в силу условия (11) справедливы неравенства

$$|b_m| \leq \rho^{-m}, \quad m = 0, \pm 1, \pm 2, \dots,$$

из которых при $\rho \rightarrow R_1$, $\rho \rightarrow r_1$ получаем оценки (12).

Лемма доказана.

Лемма 3. Если в некоторой окрестности точки $\varepsilon=0$ функция $\lambda(\varepsilon)$ представима в виде ряда

$$\lambda(\varepsilon) = \sum_{n=1}^{\infty} A_1^{(n)} \varepsilon^n,$$

коэффициенты которого $A_1^{(n)}$ удовлетворяют условиям

$$|A_1^{(n)}| \leq (n+1)^{-2}, \quad n=1, 2, \dots,$$

то для функций

$$[\lambda(\varepsilon)]^k = \sum_{n=1}^{\infty} A_k^{(n)} \varepsilon^n, \quad k=1, 2, \dots,$$

имеем неравенства

$$|A_k^{(n)}| \leq (n+1)^{-2} c_0^{k-1}, \quad k, n=1, 2, \dots, \quad (13)$$

где

$$c_0 = \frac{4}{3} \pi^2 - 8.$$

Доказательство [2]. Если функции $\lambda_j(\varepsilon)$, $j=1, 2$, представимы в виде

$$\lambda_j(\varepsilon) = \sum_{n=1}^{\infty} B_j^{(n)} \varepsilon^n, \quad j=1, 2,$$

где

$$|B_j^{(n)}| \leq (n+1)^{-2} B_j^{(0)}, \quad j=1, 2, \quad n=1, 2, \dots,$$

$$\lambda_1(\varepsilon) \lambda_2(\varepsilon) = \sum_{n=1}^{\infty} C^{(n)} \varepsilon^n,$$

то имеют место оценки

$$\frac{|C^{(n)}|}{B_1^{(0)} B_2^{(0)}} < \sum_{l=1}^{n-1} \frac{(l+1)^{-2}}{(n+1-l)^2} \leq \begin{cases} \sum_{l=1}^k \frac{2(n+1)^{-2}}{(l+1)^2} \left(\frac{2k+2}{2k+2-l} \right)^2, & n=2k+1 \\ \sum_{l=1}^k \frac{2(n+1)^{-2}}{(l+1)^2} \left(\frac{2k+1}{2k+1-l} \right)^2, & n=2k. \end{cases}$$

Так как при $l=1, 2, \dots, k$, выполняются неравенства

$$k+1 \leq 2k+2-l, \quad 2k+1 \leq 4k+2-2l,$$

то имеют место оценки

$$|C^{(n)}| \leq 8 B_1^{(0)} B_2^{(0)} (n+1)^{-2} \sum_{k=1}^{\infty} (k+1)^{-2},$$

применяя которые последовательно к функциям $[\lambda(\varepsilon)]^{n+1}$, $n=1, 2, \dots$, получаем (13). Лемма доказана.

Доказательство теоремы 1 ведем, следуя Г. М. Голузину ([2] с. 98—105) и К. И. Бабенко ([3] с. 10—20).

Доказательство. Пусть при $z \in K_0 = \{z: r + \Delta < |z| < 1 - \Delta\}$ и $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0)$ имеет место разложение

$$F(\varepsilon, z^*) = \sum_{n=1}^{\infty} \varepsilon^n F_n(\omega), \quad F_0(\omega) = f(z), \quad (14)$$

где

$$F_n(\omega) = d_*^n F(\varepsilon, z^*), \quad n=1, 2, \dots \quad (15)$$

Если положить

$$\varphi(\varepsilon, \omega) = \sum_{n=1}^{\infty} \varepsilon^n \varphi_n(\omega), \quad (16)$$

то функции $\varphi_n(\omega)$, $n=1, 2, \dots$, можно выбрать так, что коэффициенты (15) в формуле (14) будут регулярными в полосе Π_z .

Для этого предварительно покажем, что

$$F_n(\omega) = d_*^n F(\varepsilon, z_*) + f'(z) \varphi_n(\omega), \quad n=1, 2, \dots, \quad (17)$$

где

$$z_* = z + \sum_{k=1}^{n-1} \varepsilon^k \varphi_k(\omega). \quad (18)$$

Заменяя в (5) переменную z на z_* , представим (15) в виде

$$F_n(\omega) = d_*^{n-1} q(\omega^*) + d_*^{n-1} F'_{z^*}(\varepsilon, z^*) d_*^1 z_* + f'(z) \varphi_n(\omega), \quad (19)$$

где

$$\omega^* = \tanh \frac{1}{2} z_*. \quad (20)$$

Так как

$$d_*^m z^* = d_*^m z_*, \quad m=1, 2, \dots, n-1,$$

то в формулах (19) можно заменить z^* на z_* , а следовательно, справедливы неравенства (17).

Представим (15) в виде

$$F_n(\omega) = f'(z) [\psi_n(\omega) + \varphi_n(\omega)], \quad (21)$$

где

$$\psi_n(\omega) = [f'(z)]^{-1} d_*^n F(\varepsilon, z_*). \quad (22)$$

Из (22) при $n=1$ и (5) заключаем, что

$$\psi_1(\omega) = q(\omega) [f'(z)]^{-1}. \quad (23)$$

Поскольку функция $q(\omega)$ регулярна в области K , то имеет место разложение

$$\psi_1(\omega) = \sum_{m=-\infty}^{+\infty} a_m^{(1)} \omega^m. \quad (24)$$

Если положить в (24)

$$\varphi_1(\omega) = C_1 - \sum_{m=-\infty}^{-1} [a_m^{(1)} \omega^m + \overline{a_m^{(1)}} \omega^{-m}], \quad (25)$$

где C_1 — произвольная вещественная постоянная, то функция $F_1(\omega)$ будет регулярной в полосе Π_z .

Считая, что функции $\varphi_k(\omega)$, $k=1, 2, \dots, n-1$, уже определены, для функции (22) можно записать разложение

$$\psi_n(\omega) = \sum_{m=-\infty}^{+\infty} a_m^{(n)} \omega^m, \quad z \in K. \quad (26)$$

Положим

$$\varphi_n(\omega) = C_n - \sum_{m=-\infty}^{-1} [a_m^{(n)} \omega^m + \overline{a_m^{(n)}} \omega^{-m}], \quad (27)$$

где C_n — произвольная вещественная постоянная.

Из (26), (27), (24) следует регулярность функций (15) в полосе Π_z . В силу формулы (27) функции $\varphi_n(\omega)$, $n=1, 2, \dots$, регулярны в области K , причем

$$\operatorname{Im} \varphi_n(\omega) = 0, \quad |\omega| = 1, \quad n=1, 2, \dots \quad (28)$$

Рассмотрим вопрос о сходимости рядов в формулах (14), (16). Для функции $h(\omega)$, представимой рядом

$$h(\omega) = \sum_{m=-\infty}^{+\infty} a_m \omega^m, \quad z \in K_0, \quad (29)$$

введем величину

$$\|h\| = \max_{z \in K_0} \sum_{m=-\infty}^{+\infty} |a_m \omega^m|. \quad (30)$$

и докажем справедливость оценок

$$\|\Psi_n\| \leq 4 \|\Psi_1\| \varepsilon_0 \varepsilon(n), \quad z \in K_0, \quad n=1, 2, \dots, \quad (31)$$

где

$$\varepsilon(n) = (n+1)^{-2} \varepsilon_0^{-n}, \quad n=1, 2, \dots \quad (32)$$

Пусть выполняются оценки

$$\|\Psi'_k\| \leq 4 \|\Psi_1\| \varepsilon_0 \varepsilon(k), \quad z \in K_0, \quad k=1, 2, \dots, \quad n-1. \quad (33)$$

Докажем оценку (33) при $k=n$.

Предварительно покажем, что если $z \in K_0$, то, учитывая (5), (7), (22):

$$\|\psi_n\| \leq D(p_n + q_n), \quad n = 1, 2, \dots, \quad D = \| [f^1(z)]^{-1} \|, \quad (34)$$

где

$$p_n = \| d_*^n p(\omega_*) \|, \quad n = 1, 2, \dots; \quad (35)$$

$$q_n = \| d_*^n q(\omega_*) \|, \quad n = 1, 2, \dots; \quad (36)$$

$$\omega_* = \operatorname{th} \frac{1}{2} z_*. \quad (37)$$

Для этого, полагая

$$v = \sum_{k=1}^{n-1} \varepsilon^k \varphi_k(\omega). \quad (38)$$

и представляя функцию (37) в виде

$$\omega_* = (\omega + s)(1 + s)^{-1}, \quad (39)$$

где

$$s = \frac{1}{2}(1 + \omega)(-1 + \exp v), \quad (40)$$

установим неравенства

$$r < |\omega_*| < 1, \quad z \in K_0, \quad \varepsilon \in (0, \varepsilon_0). \quad (41)$$

Подчиним постоянные C_n , $n = 1, 2, \dots$, условиям

$$|C_n| \leq 2\|\psi_n\|. \quad (42)$$

Тогда из (42), (27) имеем оценки

$$\|\varphi_n\| \leq 4\|\psi_n\|, \quad n = 1, 2, \dots, \quad (43)$$

из которых при $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0)$, учитывая (38), заключаем, что

$$|v| = \varepsilon_1, \quad (44)$$

где

$$\varepsilon_1 = 16\|\Psi_1\|\varepsilon_0 C_0. \quad (45)$$

Так как при $\varepsilon_1 \in (0, \ln 2)$ выполняется неравенство $-1 + \exp \varepsilon_1 \leq 2\varepsilon_1$, то из (40), (45) следует оценка $|s| < 2\varepsilon_1$, в силу которой при $2\varepsilon_1 < \frac{1}{2}\Delta$ справедливы неравенства (41), а следовательно, в (21) можно заменить z на z_* .

Оценим величины

$$\rho_m = \| d_*^m \omega_*^m \|, \quad m = \pm 1, \pm 2, \dots \quad (46)$$

Так как из (38) следует, что для любого $m = 1, 2, \dots$, функцию v^m можно представить в виде многочлена относительно ε

$$v^m = \sum_{l=m}^{m(k-1)} e^l s_{lm}, \quad (47)$$

где коэффициенты s_{lm} , $m=1, 2, \dots$, — суммы произведений функций $\varphi_k(\omega)$, $k=1, 2, \dots, n-1$, то, учитывая соотношения

$$\|h_1 + h_2\| \leq \|h_1\| + \|h_2\|; \|h_1 h_2\| \leq \|h_1\| \|h_2\|, \quad (48)$$

закключаем, что величины $\|s_{lm}\|$ не превосходят функций s_{lm} , в которых функции $\varphi_k(\omega)$ заменены на величины $\|\varphi_k\|$.

Поэтому справедливы оценки

$$\|s_{nm}\| = \|d_*^n v^m\| \leq \epsilon_1^m \epsilon_0^{-n} c_0^{-m} d_*^n \left[\sum_{k=1}^{n-1} (\epsilon')^k a_k^{(0)} \right]^m, \quad (49)$$

где

$$\epsilon' = \epsilon \epsilon_0^{-1}, \quad a_k^{(0)} = \|\varphi_k\| (16 \|\psi_1\|)^{-1} \epsilon_0^{k-1}.$$

В силу (43) коэффициенты $a_k^{(0)}$ удовлетворяют условиям

$$|a_k^{(0)}| \leq (k+1)^{-2} < 1, \quad k=1, 2, \dots, n-1.$$

Полагая $a_k^{(0)} = 0$, $k=n, n+1, \dots$, на основании леммы 3 и (49), (45) заключаем, что

$$\|d_*^n v^m\| \leq \begin{cases} \epsilon(n) \epsilon_1^m, & m=2, 3, \dots \\ 0, & m=1. \end{cases} \quad (50)$$

Учитывая (50), (40) и справедливое для любых v разложение:

$$e^v = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} v^k, \quad (51)$$

имеем

$$\|d_*^n s\| \leq \frac{2-\Delta}{2} \epsilon(n) \sum_{k=2}^{\infty} \frac{\epsilon^k}{k!} = \epsilon(n) \left(\mu - \frac{2-\Delta}{2} \epsilon_1 \right), \quad (52)$$

где

$$\mu = \frac{2-\Delta}{2} (-1 + \exp \epsilon_1). \quad (53)$$

Из (51), (40) следует, что степени s^m , $m=1, 2, \dots$, представимы в виде ряда

$$s^m = \left(\frac{1+\omega}{2} \right)^m \sum_{l=m}^{\infty} C_m^{(l)} v^l, \quad (54)$$

где $C_m^{(l)}$, $m=1, 2, \dots$, — положительные числа.

Согласно (54), (49) имеют место оценки

$$\|d_*^n s^m\| \leq \left(\frac{2-\Delta}{2} \right)^m \epsilon(n) \sum_{l=m}^{\infty} C_m^{(l)} \epsilon_1^l, \quad m=2, 3, \dots \quad (55)$$

Так как $|s| < 1$ при $4\varepsilon_1 < \Delta$, то для степени $(1+s)^{-m}$ имеет место разложение

$$(1+s)^{-m} = \sum_{l=0}^{\infty} (-1)^l \frac{(m+l-1)!}{(m-1)! l!} s^l, \quad z \in K_0, \quad (56)$$

из которого в силу (53), (55) следуют оценки

$$\|d_*^n (1+s)^{-m}\| \leq \left[(1-\mu)^{-m} - 1 - m \frac{2-\Delta}{2} \varepsilon_1 \right] \varepsilon(n). \quad (57)$$

Умножая обе части (56) на s^k и учитывая (53), (55), (57), получаем оценки

$$\|d_*^n s^l (1+s)^{-m}\| \leq \begin{cases} \left[\mu(-\mu+1)^{-m} - \frac{2-\Delta}{2} \varepsilon_1 \right] \varepsilon(n), & l=1 \\ \mu^l (1-\mu)^{-m} \varepsilon(n), & l=2,3,\dots \end{cases} \quad (58)$$

Так как для любых s имеем формулу

$$(\omega+s)^m = \sum_{l=0}^m \frac{m!}{l!(m-l)!} \omega^{m-l} s^l, \quad m=1,2,\dots, \quad (59)$$

то, умножая обе части (59) на $(1+s)^{-m}$ и учитывая (57), (58) для величины (46) при $m=1, 2, \dots$, получаем оценки

$$\rho_m \leq \varepsilon(n) A_m^+, \quad m=1, 2, \dots, \quad (60)$$

где

$$A_m^+ = \left(\frac{1-\Delta+\mu}{1-\mu} \right)^m - (1-\Delta)^m - m(1-\Delta)^{m-1} \varepsilon_1 \frac{(2-\Delta)^2}{2}. \quad (61)$$

При $m < 0$ преобразуем степени ω_*^m к виду

$$\omega_*^m = (\omega^{-1} + s \omega^{-1})^{|m|} (1 + s \omega^{-1})^{-|m|}, \quad m = -1, -2, \dots \quad (62)$$

Сравнивая (62) с

$$\omega_*^m = (\omega+s)^m (1+s)^{-m}, \quad m=1, 2, \dots, \quad (63)$$

заключаем, что если заменить в (61) $(1-\Delta)$ на $(1-\Delta)^{-1}$, μ на $(1-\Delta)^{-1}\mu$, m на $|m|$, то получим оценки для величин (46) с $m = -1, -2, \dots$

Следовательно,

$$\rho_m \leq \varepsilon(n) A_m^-, \quad m = -1, -2, \dots, \quad (64)$$

где

$$A_m^- = \left(\frac{1+\mu}{1-\Delta-\mu} \right)^{|m|} - (1-\Delta)^{-|m|} - |m|(1-\Delta)^{-|m|-1} \varepsilon_1 \frac{(2-\Delta)^2}{2}. \quad (65)$$

Оценим величины (35).

На основании леммы 1, (8), (60), (46) заключаем, что для величин (35) имеют место оценки

$$p_n \leq \sum_{m=1}^{\infty} |a_m| \rho_m \leq 2\pi A_p \varepsilon(n), \quad (66)$$

где

$$A_p = \sum_{m=1}^{\infty} A_m^+. \quad (67)$$

Так как при $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0)$ и $4\varepsilon_1 < \Delta$ из (53) следует оценка

$$2\mu \leq \Delta, \quad (68)$$

то

$$0 < (1 - \Delta + \mu)(1 - \mu)^{-1} < 1, \quad z \in K_0. \quad (69)$$

После суммирования в (67) с учетом (61), (68) получаем

$$A_p = \frac{1 - \Delta + \mu}{\Delta - 2\mu} - \frac{1 - \Delta}{\Delta} - \frac{\varepsilon_1}{2} \frac{(2 - \Delta)^2}{\Delta^2} \quad (70)$$

или, учитывая (53),

$$A_p = \frac{1}{2} \left(\frac{2 - \Delta}{\Delta} \right)^2 \frac{(-1 - \varepsilon_1 + \exp \varepsilon_1) \Delta + 2\varepsilon_1 \mu}{\Delta - 2\mu}. \quad (71)$$

Оценим величины (36).

Используя лемму 2 с $r_1 = r$, $R_1 = 1$ и неравенства (60), (63) для величин (36), получаем оценки

$$q_n = (A_p + A_q) \varepsilon(n - 1), \quad (72)$$

где

$$A_q = \sum_{m=-\infty}^{-1} r^m A_m^-. \quad (73)$$

Так как при выполнении (68) имеют место неравенства

$$0 < r(1 + \mu)(1 - \Delta - \mu)^{-1} < 1, \quad z \in K_0, \quad (74)$$

то, суммируя в (73) с учетом (74), (65), имеем

$$A_q = \frac{r(1 + \mu)}{1 - \Delta - r - (1 + r)\mu} - \frac{r}{1 - \Delta - r} - \left(\frac{2 - \Delta}{1 - \Delta - r} \right)^2 \frac{r\varepsilon_1}{2} \quad (75)$$

или, учитывая (53),

$$A_q = \frac{r}{2} \left(\frac{2 - \Delta}{1 - \Delta - r} \right)^2 \frac{(1 - \Delta - r)(-1 - \varepsilon_1 + \exp \varepsilon_1) + (1 + r)\varepsilon_1 \mu}{1 - \Delta - r - (1 + r)\mu}. \quad (76)$$

Из (21), (22) следует оценка

$$\|\psi_n\| \leq D \|d_n^n F(\varepsilon, z_*)\|, \quad (77)$$

которую, используя (5), (8), (34), (35), (66), (36), (72), преобразуем к виду

$$\|\psi_n\| \leq 4\|\psi_1\| A_\psi \varepsilon_0 \varepsilon(n), \quad (78)$$

где

$$A_\psi = \frac{D[2\pi A_p \varepsilon(n) + (A_p + A_q) \varepsilon(n-1)]}{4\|\psi_1\| \varepsilon_0 \varepsilon(n)}.$$

Так как согласно (71), (76), (45), (32) при $\varepsilon_0 \rightarrow 0$ величина $A_\psi \rightarrow 0$, то существует такое ε_0 , начиная с которого будет выполняться неравенство

$$A_\psi \leq 1. \quad (79)$$

В силу (79), (78) выполняется (33) при $k=n$, а следовательно, и оценки (31).

Учитывая (31), (43), имеем оценки

$$\|\varphi_n\| \leq 16\|\psi_1\| \varepsilon_0 \varepsilon(n), \quad n=1, 2, \dots \quad (80)$$

Из (31), (80), (21) при $n=1, 2, \dots$, следуют оценки

$$|F_n(\omega)| \leq 20D\|\psi_1\| \varepsilon_0 \varepsilon(n), \quad z \in K_0,$$

в силу которых при $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0)$ следует равномерная сходимость ряда формулы (14) в области K_0 , а следовательно, его сумма является регулярной функцией в области Π' , причем

$$F(\varepsilon, z^*) = \sum_{n=0}^{\infty} \varepsilon^n F_n(\omega), \quad z \in K'_2 = \{z : r + 2\Delta < |\omega| < 1 - \Delta\}. \quad (81)$$

Так как функции $\varphi_n(\omega)$, $n=1, 2, \dots$, регулярны в области K , а в силу (27)

$$|\varphi_n(\omega)| \leq \|\varphi_n\|, \quad z \in K_1, \quad (82)$$

то, учитывая (80), заключаем, что ряд формулы (16) равномерно сходится в области K_Δ , а следовательно, имеет место (3).

Из формулы (3) следует регулярность функций (4), (20) в области K_Δ .

Покажем, что

$$r < |\omega^*| < 1, \quad z \in K_2, \quad (83)$$

Представим функцию (20) в виде

$$\omega^* = (\omega + v^*)(1 + v^*)^{-1},$$

где

$$v^* = \frac{1}{2} (1 + \omega) [-1 + \exp \varphi(\varepsilon, \omega)].$$

Так как согласно (82), (16), (80)

$$|\varphi(\varepsilon, \omega)| \leq \varepsilon_1, \quad z \in K_1, \quad (84)$$

то при $4\varepsilon_1 < \Delta$ имеем оценку $2v^* < \Delta$, в силу которой выполняются неравенства (83).

Из (83) следует, что $F(\varepsilon, z^*)$ существует, если $z \in K_2$.

Так как функция $F(\varepsilon, z^*)$ регулярна в области K_2 , а ряд в формуле (14) равномерно сходится в области K_0 , то в силу равенства (81) функция (6) регулярна в области $\Pi_1^0 = \{z: |\omega| < 1\}$. Из возможности заключить две любые точки $z_j \in \Pi_z$, $j=1, 2$, в область $\Pi_\rho^0 = \{z: |\omega| < \rho\}$, $\rho \in (0, 1)$, следует регулярность функции (6) в полосе Π_z .

Покажем, что функция (4) однолистка в области K_2 . Для этого оценим величину

$$\varphi = \left| \frac{\varphi(\varepsilon, \omega_2) - \varphi(\varepsilon, \omega_1)}{z_2 - z_1} \right|, \quad z \in K_2, \quad (85)$$

где $\omega_j = \text{th} \frac{1}{2} z_j$, $j=1, 2$.

Из оценки (84) и леммы 2 с $r_1 = r + \Delta$, $R_1 = (r + \Delta)^{-1}$ для коэффициентов $a^{(m)}$ ряда (3) имеем оценки

$$|a^{(m)}| \leq (r + \Delta)^{|m|} \varepsilon_1, \quad m=0, \pm 1, 2, \dots \quad (86)$$

Положим $\omega(m) = \omega_2^m - \omega_1^m$ и оценим величины

$$|\omega(m)|, \quad m = \pm 1, \pm 2, \dots \quad (87)$$

Из формулы

$$\omega(1) = |z_2 - z_1| \int_0^1 \frac{1}{2} \left[1 - \text{th}^2 \frac{\rho z_2 + (1-\rho)z_1}{2} \right] d\rho$$

следует оценка

$$|\omega(1)| < |z_2 - z_1|. \quad (88)$$

Представим величины (87) при $m=2, 3, \dots$, в виде

$$\omega(m) = \omega(1) \sum_{l=0}^{m-1} \omega_2^l \omega_1^{m-l-1}.$$

Тогда в области K_2 имеем оценки

$$|\omega(m)| \leq m |\omega(1)| \leq m |\omega(1)| (r + 2\Delta)^{-m-1}, \quad m=2, 3, \dots \quad (89)$$

Аналогичным способом получаем оценки

$$|\omega(m)| \leq |m| |\omega(1)| (r + 2\Delta)^{-|m|-1}, \quad m=-1, -2, \dots, z \in K_2. \quad (90)$$

Записав (85) в виде

$$\varphi = \frac{|\omega(1)|}{|z_2 - z_1|} \left| \sum_{m=-\infty}^{+\infty} a_m^{(0)} \frac{\omega(m)}{\omega(1)} \right|$$

и учитывая (86), (88), (89), (90), получаем оценку

$$\varphi \leq \sum_{m=-\infty}^{+\infty} |m| (r + \Delta)^{\varepsilon_1} \left(\frac{r + \Delta}{r + 2\Delta} \right)^{|m|-1} = 2 \varepsilon_1 \frac{r + \Delta}{\Delta^2}. \quad (91)$$

Положим

$$z_j^* = z_j + \varphi(\varepsilon, \omega_j), \quad j=1, 2.$$

Так как можно считать, что (91) выполняется при $2e_1 < \Delta^2$, то имеем оценку

$$|z_2^* - z_1^*| \geq |z_2 - z_1| (1 - \varphi) \geq |\omega(1)| (1 - r - \Delta) > 0,$$

из которой следует однолиственность функции $F(e, z^*)$ в области K_2 , а следовательно, и однолиственность функции (6) в полосе Π_z .

Теорема доказана.

Теорема 2. Если функция (5) удовлетворяет условию

$$2|\operatorname{Im} F(e, z)| < \pi, \quad z \in K, \quad (92)$$

то функция (6) принимает значения из полосы Π_w .

Доказательство. Согласно (92) в каждой точке $z \in K$ выполняется неравенство $2|\operatorname{Im} f^*(z)| < \pi$, а следовательно, в силу тождества (81) и однолиственности функции (6) в полосе Π_z ее значения должны принадлежать полосе Π_w . Теорема доказана.

Положим

$$\omega(z, z') = (e^{z'} - e^z)(e^{z'} + \bar{e}^z)^{-1},$$

причем

$$|\omega(z, z')| \leq 1, \quad z, z' \in \Pi_z \quad (93)$$

Лемма 4. Пусть функция $w = f(z)$ регулярна в полосе Π_z и принимает значения из полосы Π_w , то

$$|\omega[f(z), f(z')]| \leq |\omega(z, z')|, \quad z, z' \in \Pi_z, \quad (94)$$

$$|f'(z)| \cos \operatorname{Im} z \leq \cos \operatorname{Im} f(z). \quad (95)$$

Доказательство. Так как функция

$$\psi(z, z') = \begin{cases} \omega[f(z), f(z')] [\omega(z, z')]^{-1}, & z, z' \in \Pi_z, z' \neq z \\ f'(z) \frac{\cos \operatorname{Im} z}{\cos \operatorname{Im} f(z)} \exp i \operatorname{Im} [f(z) - z], & z' = z \end{cases} \quad (96)$$

при любом фиксированном $z \in \Pi_z$ регулярна по переменной $z' \in \Pi_z$ в полосе Π_z , то выполняется неравенство

$$|\psi(z, z')| \leq \rho, \quad \rho \in (0, 1), \quad z' \in \Pi'_\rho = \{z' : |\omega(z, z')| < \rho\},$$

фиксируя в котором точки z, z' и переходя к пределу при $\rho \rightarrow 1$, заключаем, учитывая (93), что

$$|\psi(z, z')| \leq 1, \quad z, z' \in \Pi_z. \quad (97)$$

Из (96), (97) следуют утверждения (94), (95). Лемма доказана.

Теорема 3. Пусть функция $w = f(z)$ регулярна в полосе Π_z и принимает значения из полосы Π_w , то существуют пределы

$$\lim_{\operatorname{Re} z \rightarrow \pm\infty} \operatorname{Re} [f(z) - z], \quad z \in L_0. \quad (98)$$

Доказательство. В силу (95) выполняется неравенство

$$\operatorname{Re} [f'(z) - 1] \leq 0, \quad z \in L_0,$$

из которого следует монотонность функции $\operatorname{Re} [f(z) - z]$ на L_0 , а следовательно, существование пределов (98). Теорема доказана.

Теорема 4. Пусть $f(z) \in T$, то

$$\lim_{\operatorname{Re} z \rightarrow \pm \infty} \operatorname{Re}[f(z^*) - z^*] = f_{\pm}, \quad z \in L_0 \cap K_2, \quad (99)$$

Доказательство. Так как

$$f(z^*) - f(\operatorname{Re} z^*) = \operatorname{Im} z^* \int_0^1 f'(z^* - \rho \operatorname{Im} z^*) d\rho, \quad z \in L_0 \cap K_2,$$

то, учитывая (95), (4), (84), заключаем, что

$$|f(z^*) - f(\operatorname{Re} z^*)| \leq \frac{|\operatorname{Im} z^*|}{\cos \varepsilon_1}, \quad z \in L_0 \cap K_2.$$

Поскольку

$$\lim_{\operatorname{Re} z \rightarrow \pm \infty} \operatorname{Re} z^* = \pm \infty, \quad \lim_{\operatorname{Re} z \rightarrow \pm \infty} \operatorname{Im} z^* = 0, \quad z \in L_0 \cap K_2,$$

то в силу утверждения 2 теоремы 1 и регулярности функции $\psi(\varepsilon, \omega)$ в точках $\omega = \pm 1$ выполняется условие

$$\lim_{\operatorname{Re} z \rightarrow \pm \infty} [f(z^*) - f(\operatorname{Re} z^*)] = 0, \quad z \in L_0 \cap K_2.$$

Учитывая тождество

$$f(z) - z = [f(z) - f(\operatorname{Re} z)] + [f(\operatorname{Re} z) - z]$$

и условие

$$\lim_{\operatorname{Re} z \rightarrow \pm \infty} \operatorname{Re}[f(\operatorname{Re} z^*) - \operatorname{Re} z^*] = f_{\pm}, \quad z \in L_0 \cap K_2,$$

заключаем о справедливости (99). Теорема доказана.

Теорема 5. Пусть $f(z) \in T$ и существуют конечные пределы

$$\lim_{\operatorname{Re} z \rightarrow \pm \infty} \operatorname{Re} q(\omega^*) = \operatorname{Re} q(\pm 1), \quad z \in L_0 \cap K_2, \quad (100)$$

то существуют конечные пределы

$$\lim_{\operatorname{Re} z \rightarrow \pm \infty} \operatorname{Re}[f^*(z) - z] = f_{\pm}^*, \quad z \in L_0, \quad (101)$$

которые вычисляются по формулам

$$f_{\pm}^* = f_{\pm} + \varepsilon \operatorname{Re} q(\pm 1) + \varepsilon \psi(\varepsilon, \pm 1). \quad (102)$$

Доказательство. В силу теоремы 3 существуют пределы (101), причем, учитывая (6), имеют место равенства

$$\lim_{\operatorname{Re} z \rightarrow \pm \infty} \operatorname{Re}[f^*(z) - z] = \lim_{\operatorname{Re} z \rightarrow \pm \infty} \operatorname{Re}[F(\varepsilon, z^*) - z], \quad z \in L_0 \cap K_2. \quad (103)$$

В силу теоремы 4, условий (100), (103) и формулы (5) выполняются равенства

$$\lim_{\operatorname{Re} z \rightarrow \pm \infty} \operatorname{Re}\{[F(\varepsilon, z^*) - z^*] + (z^* - z)\} = f_{\pm}^*, \quad z \in L_0 \cap K_2,$$

из которых следуют формулы (102). Теорема доказана.

Теорема 6. Постоянные $C_n, n=1, 2, \dots$, можно выбрать так, что

$$\varphi_0 = \varphi(\varepsilon, 1) + \varphi(\varepsilon, -1) = 0. \quad (104)$$

Доказательство. Так как

$$\left| \sum_{m=-\infty}^{-1} [a_m^{(n)} \omega^m + \overline{a_m^{(n)}} \omega^{-m}] \right| \leq 2 \|\psi_n\|, z \in K_1,$$

то в силу (27), (42), (43) можно положить

$$C_n = -\operatorname{Re} \sum_{m=-\infty}^{-1} a_m^{(n)} [1 - (-1)^m], n=1, 2, \dots \quad (105)$$

Согласно (105) имеют место равенства

$$\varphi_n = \varphi_n(1) + \varphi_n(-1) = 0, n=1, 2, \dots,$$

умножая которые на ε^n и суммируя, имеем тождество

$$\sum_{n=1}^{\infty} \varepsilon^n \varphi_n = 0.$$

Тогда в силу оценок (82) выполняется равенство

$$\varphi_0 = \sum_{n=1}^{\infty} \varepsilon^n \varphi_n,$$

а следовательно, выполняется условие (104). Теорема доказана.

Положим при $k=1, 2, \dots, n$

$$q(\omega, \omega_k) = A_k \operatorname{cth} \frac{1}{2}(\omega - \omega_k) + A_k \operatorname{th} \frac{1}{2}(\omega - \overline{\omega}_k), \quad (106)$$

где $A_k, k=1, 2, \dots, n$ — произвольные комплексные числа, а точки $\omega_k \in \Pi_w, k=1, 2, \dots, n$, и обозначим через Π'_2 полосу Π_w с выброшенными множествами

$$\delta_k = \{\omega : |\operatorname{th} \frac{1}{2}\omega - \operatorname{th} \frac{1}{2}\omega_k| < \rho\}, \rho \in (0, 1), k=1, 2, \dots, n. \quad (107)$$

Лемма 5. Пусть выполняются условия

$$|\operatorname{th} \frac{1}{2}\omega_k| < 1 - \rho, \quad k=1, 2, \dots, n. \quad (108)$$

Тогда при любом $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0)$, где

$$\varepsilon_0 = \rho^2 \left[\sum_{k=1}^n 4|A_k| \right]^{-1}, \quad (109)$$

функция

$$Q(\omega) = \omega + \sum_{k=1}^n q(\omega, \omega_k) \quad (110)$$

будет однолистной в области Π'_2 , причем

$$2|\operatorname{Im} Q(w)| < \pi, \quad w \in \Pi'_2. \quad (111)$$

Доказательство. Оценим величину

$$Q_0 = |Q(w'') - Q(w')|, \quad w'', w' \in \Pi'_2.$$

Пусть точка $w \in \Pi'_2$, то в силу (107), (108) выполняются неравенства

$$|\operatorname{cth} \frac{1}{2}(w - w_k)| \rho < 2, \quad |\operatorname{th} \frac{1}{2}(w - \bar{w}_k)| \rho < 2, \quad k = 1, 2, \dots, n,$$

из которых, учитывая (109) и условие $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0)$, имеем оценку

$$\sum_{k=1}^n |q(w'', w_k) - q(w', w_k)| < |w'' - w'| \varepsilon_0^{-1}$$

или

$$Q_0 > 0. \quad (112)$$

Из (112) следует однолиственность функции (110) в области Π'_2 при любом $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0)$.

Поскольку $\operatorname{Im} \sum_{k=1}^n q(w, w_k) = 0$ при $2|\operatorname{Im} w| < \pi$, то справедливо условие (111). Лемма доказана.

Теорема 7. Пусть $f(z) \in T$ и не принимает в полосе Π_w значений w_k , $k = 1, 2, \dots, n$, то при любом $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0)$ семейство функций

$$f^*(z) = f(z) + \varepsilon \sum_{k=1}^n q[f(z), w_k] \quad (113)$$

принадлежит классу T .

Доказательство. Согласно лемме 5 функции (113) при любом $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0)$ регулярны и однолиственны в полосе Π_z и удовлетворяют условию

$$2|\operatorname{Im} f^*(z)| < \pi, \quad z \in \Pi_z, \quad (114)$$

то $f^*(z) \in T$, причем

$$f_{\pm}^* = f_{\pm} \pm 2\varepsilon \sum_{k=1}^n \operatorname{Re} A_k.$$

Теорема доказана.

Теорема 8. Пусть $f(z) \in T$ и в точках $z_k \in \Pi_z$, $k = 1, 2, \dots, n$, принимает значения $f(z_k) = w_k$, $k = 1, 2, \dots, n$, то в классе T существует семейство функций

$$f^*(z) = f(z) + \varepsilon [q(w) - f'(z) \psi_1(w)] + o(\varepsilon), \quad (115)$$

где $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0)$;

$$q(w) = \sum_{k=1}^n A_k [f'(z_k)]^2 \operatorname{cth} \frac{1}{2} [f(z) - f(z_k)] + \bar{A}_k [\overline{f'(z_k)}]^2 \operatorname{th} \frac{1}{2} [f(z) - \overline{f(z_k)}]; \quad (116)$$

$$\varphi_1(w) = \sum_{k=1}^n A_k \operatorname{cth} \frac{1}{2} (z - z_k) + \bar{A}_k \operatorname{th} \frac{1}{2} (z - \bar{z}_k), \quad (117)$$

а величина $o(\epsilon)$ удовлетворяет условию

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0} o(\epsilon) \epsilon^{-1} = 0, z \in \Pi_z, \quad (118)$$

причем

$$f_{\pm}^* = f_{\pm} \pm 2\epsilon \sum_{k=1}^n \operatorname{Re} A_k (|f'(z_k)|^2 - 1) + o(\epsilon). \quad (119)$$

Доказательство. Так как точки z_k , $k=1, 2, \dots, n$, можно заключить в область K с некоторым $r < 1$, то, учитывая (106), заключаем, что функция (116) регулярна в области K . В силу непрерывности функций (106) в замкнутой области $\bar{\Pi}_2$ комплексные числа A_k , $k=1, 2, \dots, n$, можно выбрать так, чтобы для функции (116) выполнялось условие (2) теоремы 1.

Согласно (116), (106) функция (23) в точках $\omega_k = \operatorname{th} \frac{1}{2} z_k$, $k=1, 2, \dots, n$, имеет простые полюса, а следовательно, функция (25) должна иметь представление вида

$$\varphi_1(\omega) = \sum_{k=1}^n \frac{A'_k}{\omega - \omega_k} + \frac{\bar{A}_k \omega}{1 - \omega \bar{\omega}_k} + C_1, \quad (120)$$

где

$$A'_k = \lim_{\omega \rightarrow \omega_k} \psi_1(\omega) (\omega - \omega_k), \quad k=1, 2, \dots, n.$$

В данном случае

$$A'_k = (1 - \omega_k^2) A_k, \quad k=1, 2, \dots, n.$$

Так как ряд формулы (6) равномерно сходится в области Π^1 , а любую точку $z \in \Pi_z$ можно заключить в область Π^1 с некоторым $\Delta > 0$, то справедливо (118).

Положив в (120)

$$C_1 = - \sum_{k=1}^n 2 \operatorname{Re} A_k \omega_k,$$

получаем формулу (117). Вычисляя величины (101) для функций (115), получаем формулы (119). В силу условия (111) и теоремы 2 функция (115) удовлетворяет условию (114).

Теорема доказана.

Замечание. Если функция $f(z) \in T$ и величины $f_{\pm}$ удовлетворяют условию

$$f_+ + f_- = 0,$$

то величины (101) функций (113) удовлетворяют условию

$$f_+^* + f_-^* = 0. \quad (121)$$

В силу теоремы 6 постоянные C_n , $n=1, 2, \dots$, можно выбрать так, чтобы выполнялось условие (104), а следовательно, величины (101) функций (115) будут удовлетворять условию (121).

ЛИТЕРАТУРА

1. Соболев В. В. Исследование экстремальных задач для классов функций, однолистных в полуплоскости.— Канд. дис. ТГУ, 1969.
2. Лаврентьев М. А., Шабат Б. В. Методы теории функций комплексного переменного. М., «Наука», 1973.
3. Голузин Г. М. Геометрическая теория функций комплексного переменного. М., «Наука», 1966
4. Бабенко К. И. К теории экстремальных задач для функций класса S .— «Труды Матем. ин-та им. Стеклова», т. 101. М., «Наука», 1972.

ОБОБЩЕННОЕ СВОЙСТВО ВЫПУКЛОСТИ ПРИ КОНФОРМНОМ ОТОБРАЖЕНИИ

В. В. ЧЕРНИКОВ

Пусть $C: z=z(t)$, $t \in [a, b]$, — замкнутая гладкая жорданова кривая, E — область с границей C . Рассмотрим множество M всех функций $f(z)$, регулярных однолистных в E и непрерывных в E ; пусть $L=f(C)$ — образ C при отображении $w=f(z)$, $D=f(E)$ — область с границей L . В множестве M выделим два класса функций, отображающих E на области D , граничные кривые L которых являются выпуклыми в некотором обобщенном смысле.

Пусть $\rho > 0$ — произвольное фиксированное число. Функцию $w=f(z) \in M$ назовем функцией класса C_ρ , если в каждой точке кривой L существует круг радиуса ρ , касающийся L и не содержащий внутренних точек области D . Функцию $w=f(z) \in M$ назовем функцией класса C_ρ'' , если L — дважды непрерывно дифференцируемая кривая, в каждой точке которой радиус кривизны не меньше ρ .

Функции класса C_ρ , регулярные в E , рассматривал П. Т. Мокану [1], который назвал их выпуклыми функциями радиуса ρ . Ясно, что при $\rho = \infty$ функции $f(z) \in C_\rho'$ отображают E на выпуклые в обычном смысле области D . В заметке [1] дано необходимое и достаточное условие того, чтобы $f(z)$ была выпуклой функцией радиуса ρ . Это условие состоит в том, чтобы неравенство

$$|f(z) - f(\zeta)|^2 + 2\rho \operatorname{Im} \left\{ \overline{[f(z) - f(\zeta)]} \frac{\dot{z}f'(z)}{|\dot{z}f'(z)|} \right\} \geq 0,$$

где $z=z(t)$, $\zeta=z(\tau)$, $\dot{z}=dz/dt$, было справедливо для любых t и τ из промежутка $[a, b]$.

Пусть ε — данное положительное число, D_ε — область, ограниченная окружностью радиуса ε . Очевидно, что функция $w=f_\varepsilon(z)$, отображающая E на область D_ε , является функцией класса C_ρ' , причем $f(z)$ принадлежит также классу C_ρ'' , когда $\varepsilon \geq \rho$, и $f_\varepsilon(z)$ не принадлежит C_ρ' , когда $\varepsilon < \rho$.

Приведем теперь пример функции $f(z) \in C_\rho''$, не являющейся функцией класса C_ρ' . Рассмотрим в плоскости $w=u+iv$ кривую $AA_1A_2A_3A_4B$, составленную из отрезков прямых AA_1 , BA_4 с уравнениями

$$v=0, \quad -2\sqrt{\frac{2}{3}}\rho \leq u \leq 0;$$

$$v=5\sqrt{\frac{2}{15}}\rho, \quad -2\sqrt{\frac{2}{3}}\rho \leq u \leq -\sqrt{\frac{2}{3}}\rho,$$

дуг кубических парабол A_1A_2 , A_4A_3 с уравнениями

$$v=\frac{18\sqrt{5}}{125\rho^2}u^3, \quad 0 \leq u \leq \frac{5}{6}\sqrt{\frac{2}{3}}\rho; \quad (1)$$

$$v=5\sqrt{\frac{2}{15}}\rho + \frac{18\sqrt{5}}{125\rho^2}\left(u + \sqrt{\frac{2}{3}}\rho\right)^3, \quad -\sqrt{\frac{2}{3}}\rho \leq u \leq -\frac{1}{6}\sqrt{\frac{2}{3}}\rho,$$

и полуокружности A_2A_3 радиуса ρ . Эту кривую поместим внутрь какого-либо прямоугольника, на одной стороне которого выброшен отрезок $A'B'$ длины AB , так, чтобы точки A и A' , B и B' совпали и чтобы получившаяся замкнутая кривая стала жордановой. Скругляя затем все углы этой кривой с помощью пар кривых вида (1), мы придем к жордановой кривой L'' , дважды непрерывно дифференцируемой, радиус кривизны которой всюду не меньше ρ . Поэтому функция $\omega = \tilde{f}(z)$, отображающая E на область D'' с границей L'' , принадлежит классу C_ρ^* . Так как круг радиуса ρ , касающийся L'' в точках отрезка AA_1 , содержит внутренние точки области D'' ($AB < 2\rho$), то функция $\tilde{f}(z)$ не принадлежит классу $\hat{C}_\rho$. Таким образом, классы C_ρ^* и $\hat{C}_\rho$ имеют непустое пересечение, но ни один из них не включает в себя другого.

Отметим теперь, что функция $f_*(z)$ принадлежит классу C_ρ^* при любом заданном $\varepsilon > 0$. Следовательно, нельзя указать круга абсолютного радиуса, который принадлежал бы каждой области $D = f(E)$, $f(z) \in C_\rho^*$. С другой стороны, для функций класса C_ρ^* справедлив следующий результат.

Теорема 1. Если функция $f(z)$ принадлежит классу C_ρ^* , то образ D области E при отображении $\omega = f(z)$ целиком покрывает некоторый круг радиуса ρ , но не всегда больший круг.

Примем во внимание, что граница L области $D = f(E)$, $f(z) \in C_\rho^*$, есть жорданова дважды непрерывно дифференцируемая кривая, радиус кривизны которой всюду не меньше ρ . Г. Пестов и В. Ионин доказали [2], что любая область, ограниченная такой кривой, содержит некоторый круг радиуса ρ . Теперь утверждение теоремы 1 становится очевидным. Из теоремы 1 следует

Теорема 2. Если функция $f(z)$ принадлежит классу C_ρ^* , то площадь образа D области E при отображении $\omega = f(z)$ не меньше $\pi\rho^2$, а длина границы L области D не меньше $2\pi\rho$. Оценки, указанные в теореме 2, точны: минимум достигается для функций $f_*(z)$ при $\varepsilon = \rho$. Ясно, что нет аналогичной теоремы для класса C_ρ .

Заметим в заключение, что из множества M можно выделить и другие классы функций, отображающих E на области D , необязательно выпуклые, если наложить на D другие ограничения метрического характера. Рассмотрим, например функции $\omega = f(z) \in M$, отображающие E на области D с жордановыми границами L , площади которых не меньше d , а длины кривых L не больше l ($d > 0$, $l > 0$ — заданные числа, $l \geq \sqrt{4\pi d}$). Для этого класса функций будет справедлива теорема, ана-

логичная теореме 1: существует круг радиуса $2d/(l+\sqrt{l^2-4\pi d})$, содержащийся в каждой области D (см., например, [3]). Подобные результаты можно сформулировать и в случае, когда класс M определен в многосвязной области E ([3], теорема 2).

ЛИТЕРАТУРА

1. Мосану Р. Т. A generalized property of convexity in conformal mappings, Rev. Roum. Math. Pures et Appl., 17, 9(1972), 1391—1394.
 2. Пестов Г., Ионин В. О наибольшем круге, вложенном в замкнутую кривую. Докл. АН СССР, 127, 6 (1959), 1170—1172.
 3. Ионин В. К. О круге, вложенном в многосвязную область — Вопросы геом. теории функций, вып. 1. «Труды Томск. ун-та, 169 (1963), 8—12.
-

О СЕМЕЙСТВЕ ФУНКЦИЙ, ПЛОТНОМ В КЛАССЕ ОДНОЛИСТНЫХ ЗВЕЗДНЫХ ОТОБРАЖЕНИЙ

О. И. АЛЕКОВА

Пусть S^* — класс всех функций $f(z) = z + c_2 z^2 + \dots$, однолистных и звездных в круге $E = \{z: |z| < 1\}$ и C — класс всех функций $p(z) = 1 + p_1 z + p_2 z^2 + \dots$, голоморфных в E и имеющих в E положительную вещественную часть.

Хорошо известно (см., например, [1] или [3]), что формула

$$f(z) = z \exp \left\{ \int_0^z t^{-1} (p(t) - 1) dt \right\}, f(z) \in S^*, p(t) \in C \quad (1)$$

устанавливает взаимно однозначное соответствие между классами S^* и C . Это позволяет многие задачи на классе S^* переформулировать и эффективно решать на классе C .

Цель работы состоит в том, чтобы обратить внимание на существование семейства элементарных функций, плотного в классе S^* , указать аналогичное семейство звездных функций в кольце n , таким образом, предложить новый подход к исследованию ряда задач на классах звездных функций.

Теорема 1. Пусть q_l ($l=0, 1, \dots, n=0, 1, 2, \dots$) — произвольные комплексные числа, одновременно не равные нулю. Тогда классу S^* принадлежит функция

$$f_n(z) = z \exp \left\{ \sum_{k=1}^n p_k z^k \right\}, \quad (2)$$

где

$$p_k = 2 \sum_{l=0}^{n-k} q_{k+l} \bar{q}_l \cdot \left(\sum_{l=0}^n |q_l|^2 \right)^{-1}. \quad (3)$$

Доказательство. Пусть числа q_l ($l=0, 1, \dots, n$) удовлетворяют условиям теоремы, и числа p_k ($k=1, 2, \dots, n$) вычислены по формуле (3). Тогда вещественная часть полинома $Q_n(z) = 1 + p_1 z + \dots + p_n z^n$ на $|z|=1$ может быть представлена в виде

$$2 \operatorname{Re} Q_n(e^{i\theta}) = \left| \sum_{l=0}^n q_l e^{il\theta} \right|^2. \quad (4)$$

В этом нетрудно убедиться сравнением коэффициентов при $\sin k\theta$ и

$\cos k\theta$ ($k=1, \dots, n$) в левой и правой частях равенства (4). Поэтому $\operatorname{Re} Q_n(z) > 0$ в E и, следовательно, $Q_n(z) \in C$. Теорема доказана.

Теорема 2 Пусть $Q_n(z) \in C$ ($n=1, 2, \dots$). Тогда существуют числа q_l ($l=0, 1, \dots, n$) такие, что p_k ($k=1, 2, \dots, n$) можно представить в виде (3).

Доказательство. Из условия $\operatorname{Re} Q_n(z) > 0$ в E следует, что $\operatorname{Re} Q_n(e^{i\theta}) \geq 0$ ($0 \leq \theta < 2\pi$). Известно (см., например [2]), что каждый неотрицательный тригонометрический полином порядка n (с действительными коэффициентами) может быть представлен как квадрат модуля некоторого комплексного полинома степени n на $|z|=1$. Отсюда следует (4). Теперь сравнением коэффициентов при $e^{ik\theta}$ ($k=0, \pm 1, \dots, \pm n$) получаем формулы (3). Теорема доказана.

Следствие. Если $f_n(z) \in S^*$ и имеет вид (2), то существуют числа q_l ($l=0, 1, \dots, n$) такие, что p_k ($k=1, \dots, n$) можно представить в виде (3).

Замечание. Для заданного полинома $Q_n(z)$, удовлетворяющего условиям теоремы 2, представление (4) не является единственным. Оно будет единственным и в этом случае называется нормальным, если $q_0 > 0$ и полином $q_0 + q_1 z + \dots + q_n z^n$ не имеет нулей в E .

Теорема 3. Семейство функций, удовлетворяющих условиям теоремы 1, плотно в S^* в смысле равномерной сходимости внутри E .

Доказательство. Пусть $f(z) \in S^*$. Тогда существует функция $p(z) \in C$ такая, что имеет место формула (1). Пусть числа $\rho \in (0, 1)$ и $\epsilon \in (0, 1)$ произвольно зафиксированы. В силу известной оценки

$$\operatorname{Re} p(\rho e^{i\theta}) \geq \frac{1-\rho}{1+\rho} > 0, \quad 0 \leq \theta < 2\pi,$$

(см., например, [1]) для разложения

$$p(z) = 1 + p_1 z + \dots + p_n z^n + r_n(z)$$

существует $N = N(\rho, \epsilon)$ такое, что при $n > N$ остаточный член $r_n(z)$ этого разложения на $|z| = \rho$ допускает оценку

$$|r_n(\rho e^{i\theta})| < \frac{1-\rho}{1+\rho} (1-\rho) \epsilon.$$

Следовательно, полином

$$Q_n(\rho z) = p(\rho z) - r_n(\rho z) = 1 + \rho p_1 z + \dots + \rho^n p_n z^n$$

принадлежит классу C . Поэтому функция

$$f_n(z) = z \exp \left\{ \int_0^z t^{-1} (Q_n(\rho t) - 1) dt \right\} \quad (5)$$

будет из класса S^* . Рассмотрим функцию

$$f_\rho(z) = \frac{1}{\rho} f(\rho z) = z \exp \left\{ \int_0^z t^{-1} (p(\rho t) - 1) dt \right\}.$$

Будем аппроксимировать ее функциями $f_n(z)$ вида (5), удовлетворяющими условиям теоремы 1. Оценим на $|z|=1$ величину

$$|f_\rho(z) - f_n(z)| = |f_\rho(z)| |1 - \exp A_n(\rho, t)|,$$

где

$$A_n(\rho, t) = \int_0^t P_n(\rho, t) dt, \quad P_n(\rho, t) = \frac{Q_n(\rho t) - p(\rho t)}{t}.$$

Так как

$$\max_{t \in \bar{E}} P_n(\rho, t) = \max_{|t|=1} |Q_n(t) - \rho t - \rho(\rho t)| = \max_{|z|=\rho} |r_n(z)|,$$

то при $n > N$ имеем

$$\max_{t \in \bar{E}} P_n(\rho, t) < \frac{(1-\rho)^2}{2} \varepsilon,$$

и

$$|A_n(\rho, t)| < \frac{(1-\rho)^2}{2} \varepsilon, \quad n > N, \quad 0 < \rho < 1, \quad 0 < t < 1.$$

С учетом этого неравенства получаем

$$\begin{aligned} |1 - \exp A_n(\rho, t)| &\leq |A_n(\rho, t)| + \frac{1}{2!} |A_n(\rho, t)|^2 + \dots < \\ &< 2|A_n(\rho, t)| < (1-\rho)^2 \varepsilon. \end{aligned}$$

Так как $f(z) \in S^*$, то на $|z| = 1$

$$|f_\rho(z)| = \frac{1}{\rho} |f(\rho z)| \leq (1-\rho)^{-2}$$

и, следовательно, $|f_\rho(z) - f_n(z)| < \varepsilon$.

Зафиксируем произвольно замкнутое множество B в E и выберем ρ_0 , $0 < \rho_0 < 1$ такое, чтобы B лежало в замыкании круга $|z| \leq \rho_0$. Пусть ρ , $\rho_0 < \rho < 1$ такое, что

$$|f(z) - \frac{1}{\rho} f(\rho z)| < \varepsilon, \quad z \in E,$$

и пусть $n > N$. Тогда на B

$$|f(z) - f_n(z)| < |f(z) - f_\rho(z)| + |f_\rho(z) - f_n(z)| < 2\varepsilon,$$

что доказывает теорему.

Теорема 4. Каждая функция вида

$$f(z) = Az \exp \left\{ \sum_{k=1}^n \frac{1}{k} (p_k z^k - p_{-k} z^{-k}) \right\}, \quad (6)$$

где

$$p_k = 2(1-\rho^{2k})^{-1} \sum_{l=0}^{n-k} (q_{k+l} \bar{q}_l - \rho^k \bar{q}'_l q'_{l+k}),$$

$$p_{-k} = 2\rho^k (1-\rho^{2k})^{-1} \sum_{l=0}^{n-k} (q'_l \bar{q}'_{k+l} - \rho^k q_l \bar{q}_{l+k}),$$

в которых $\rho \in (0, 1)$ — произвольное вещественное число и q_l, q'_l — произвольные комплексные числа, подчиненные условию

$$\sum_{l=0}^n |q_l|^2 = \sum_{l=0}^n |q'_l|^2 = 1,$$

однолистно отображает кольцо $K(\rho, 1) = \{z: \rho < |z| < 1\}$ на двусвязную звездную область при произвольно фиксированном комплексном A .

Теорема 5. Семейство функций вида (6) плотно в смысле равномерной сходимости внутри кольца $K(\rho, 1)$ в классе регулярных и

однолистных функций в кольце $K(\rho, 1)$, отображающих $K(\rho, 1)$ на двусвязные звездные области.

Доказательства теорем 4 и 5 мы опускаем, так как они аналогичны доказательствам теорем 2 и 3 соответственно.

ЛИТЕРАТУРА

1. Г о л у з и н Г. М. Геометрическая теория функций комплексного переменного, М. «Наука». 1966
2. П о л н а Г. и С е г е Г. Задачи и теоремы из анализа. Часть II. М. Главная редакция технико-теоретической литературы 1956.
3. А л е к с а н д р о в И. А. Конформные отображения односвязных и многосвязных областей, Томск Изд-во Томского ун-та, 1976.

СОДЕРЖАНИЕ

В. С. Дьякова. О некоторых свойствах регулярных ограниченных функций	3
В. И. Кан, Ен-хи Кан. Экстремальные свойства коэффициентов Фабера, порожденных звездообразными континуумами порядка α	8
В. И. Кан, В. В. Черников. Одно замечание о полиномах Фабера	16
Г. М. Кесельман. Экстремальные задачи на классах ограниченных звездных функций	19
Г. М. Кесельман. Об отображениях на круговые многоугольники	29
М. Р. Куваев. Об оценках коэффициентов автоморфных функций	36
В. И. Попов. Дискретный аналог уравнения Лёвнера	41
В. И. Прокофьев, В. В. Черников. Одна экстремальная задача в классе однолистных функций с вещественными коэффициентами	47
Т. Н. Селляхова. Исследование экстремальных свойств одного класса однолистных конформных отображений полуплоскости в себя	55
П. И. Сижук. Некоторые экстремальные задачи на классе типично вещественных функций	70
Б. Г. Цветков. Вариационная теорема для функций, однолистных в полосе	79
В. В. Черников. Обобщенное свойство выпуклости при конформном отображении	97
О. И. Алёкова. О семействе функций, плотном в классе однолистных звездных отображений	100

ВОПРОСЫ ГЕОМЕТРИЧЕСКОЙ ТЕОРИИ ФУНКЦИИ

Выпуск 8

Томск. Изд-во ТГУ 1977 г., 104 с.

Редактор Н. С. Поддубная

Технический редактор Р. М. Подгорбунская

Корректор Н. М. Шпагина

К303152. Сдано в набор 13/XII-1976 г. Подписано к печати 12/VIII-1977 г.

Формат 70×108¹/₃₂ бум. типографская № 3 П л. 6,5; уч-изд л 8,6, усл. п. л. 9,1
Заказ 10540. Тираж 500 Цена 1 руб. 29 коп

Издательство ТГУ Томск, 29 ул. Никитина, 17.
Типография изд-ва «Омская правда», г. Омск, пр. Маркса, 39