

МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ  
РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ  
ТОМСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ  
НИИ ПРИКЛАДНОЙ МАТЕМАТИКИ И МЕХАНИКИ  
ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ФАКУЛЬТЕТ  
СОВЕТ МОЛОДЫХ УЧЁНЫХ

**АКТУАЛЬНЫЕ ПРОБЛЕМЫ  
СОВРЕМЕННОЙ МЕХАНИКИ СПЛОШНЫХ СРЕД  
И НЕБЕСНОЙ МЕХАНИКИ  
(27–29 ноября 2013 г.)**

**III Всероссийская молодёжная научная конференция**

*Под редакцией М.Ю. Орлова*

Томск  
Издательский Дом Томского государственного университета  
2014

никают поверхности сильного разрыва [5]. При построении разностной схемы метода Годунова уравнения газовой динамики записываются в интегральной форме [4]. Обобщенные решения такой системы представляют собой обобщения классических решений дифференциальных уравнений (1) и входят в класс кусочно-непрерывных и кусочно-гладких функций, для которых интегральные уравнения (по контуру) справедливы при произвольном кусочно-гладком контуре  $\Gamma$ , охватывающем рассматриваемую область [6]. Параметры, характеризующие течение газового потока, представляют собой сложное распределение плотности массы, импульса и полной энергии вдоль газодинамического тракта. Для применения разностной схемы Годунова производят осреднение этих величин в каждой ячейке расчетной сетки. Определение решения в этом случае сводится к решению серии автомодельных задач о распаде произвольного разрыва [4].

Описанный алгоритм реализуется в виде программного комплекса «Space Solution» на языке C++ с использованием программной платформы NET Framework 4.0. Планируется проведение численного исследования поставленной задачи и тестовых расчетов. Верификация программного комплекса будет проводиться путем сравнения с известными решениями.

#### ЛИТЕРАТУРА

1. *Газодинамические и теплофизические процессы в ракетных двигателях твердого топлива* / А.М. Губертов [и др.]; под ред. А.С. Коротева. М.: Машиностроение, 2004. 511 с.
2. *Стернин Л.Е.* Основы газодинамики двухфазных течений в соплах. М.: Машиностроение, 1974. 212 с.
3. *Газовая динамика двухфазных течений в соплах* / И.М. Васенин, В.А. Архипов, В.Г. Бутов, А.А. Глазунов, В.Ф. Трофимов. Томск: Изд-во Том. ун-та, 1986. 264 с.
4. *Численное решение многомерных задач газовой динамики* / С.К. Годунов, [и др.]; под ред. С.К. Годунова. М.: Наука, 1976. 400 с.
5. *Пирумов У.Г.* Численные методы. М.: Дрофа, 2003. 224 с.
6. *Киреев В.И., Войновский А.С.* Численное моделирование газодинамических течений. М.: Изд-во МАИ, 1991. 254 с.

## МОДЕЛИРОВАНИЕ ТЕЧЕНИЙ ВЯЗКОЙ ЖИДКОСТИ СО СВОБОДНОЙ ПОВЕРХНОСТЬЮ С ИСПОЛЬЗОВАНИЕМ МЕТОДА ОБЪЕМОВ ЖИДКОСТИ (VOLUME OF FLUID METHOD)

**А.В. Десятник, М.А. Пономарева, В.А. Якутенок**

*Рассматривается моделирование течений вязкой несжимаемой жидкости со свободной поверхностью методом VOF. Проводится сравнение полученных результатов с данными других авторов и результатами моделирования при помощи метода граничных элементов и пакета прикладных программ OpenFOAM для ряда задач: о течении в прямоугольной камере, о растекании капли по твердой стенке, об истечении жидкости из вертикального канала.*

## SIMULATION OF VISCOUS FLUID FLOWS WITH FREE SURFACE USING VOLUME OF FLUID METHOD

**A.V. Desyatnik, M.A. Ponomareva, V.A. Yakutenok**

*Simulation of viscous incompressible fluid with free surface by VOF method is considered. Obtained results are compared with results of other authors and results of simulation using boundary element method and OpenFOAM software package applied to several problems: flow in rectangular cavity, drop spreading over a solid surface, fluid outflow from a vertical channel.*

Основной сложностью моделирования течений вязкой несжимаемой жидкости со свободной поверхностью является наличие меняющейся во времени области

решения. Распространенные подходы к моделированию движения свободной поверхности (границы раздела фаз) включают в себя:

- методы с явным выделением границы («line tracking»), т.е. отслеживанием эволюции свободной границы (например, на основе метода граничных элементов);
- методы сквозного счета, основанные на вычислении изменения функций, характеризующих количество жидкости в расчетных ячейках (например, метод VOF).

Выбор соответствующего подхода определяется геометрией области течения и характером деформации свободной поверхности.

Метод объемов жидкости VOF (Volume of fluid method), предложенный Hirt C.W., Nichols B.D [1, 2], является одним из наиболее широко используемых в настоящее время методов моделирования течений вязкой жидкости со свободной поверхностью. Этот метод, в различных модификациях, встроен в широко распространенные пакеты прикладных программ (например, OpenFOAM). При этом, используются различные варианты конечно-разностной аппроксимации уравнений Навье–Стокса.

В настоящей работе алгоритм SOLA-VOF реализован в виде универсальной программы расчета двумерных течений вязкой несжимаемой жидкости со свободной поверхностью. Универсальность обеспечивается возможностью задания как границ с заданным вектором скорости, так и свободных поверхностей. Данный алгоритм базируется на конечно-разностной аппроксимации уравнений Навье–Стокса. Система уравнений, описывающая течение вязкой несжимаемой жидкости в поле силы тяжести в безразмерных переменных имеет вид:

$$\begin{aligned} \text{Re} \left( \frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} \right) &= -\frac{\partial p}{\partial x} + \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} - \text{St}, \\ \text{Re} \left( \frac{\partial v}{\partial t} + u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} \right) &= -\frac{\partial p}{\partial y} + \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2}, \\ \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} &= 0, \end{aligned}$$

где  $(u, v)$  безразмерные компоненты вектора скорости в координатах  $(x, y)$ ;  $t$  – безразмерное время;  $\text{Re} = \rho UR/\mu$  – число Рейнольдса;  $\text{St} = \rho g R^2/\mu U$  – параметр Стокса, являющийся отношением числа Рейнольдса к числу Фруда, и определяющий соотношение между силой тяжести и вязкими силами;  $\rho$  – плотность жидкости;  $U$  – характерная скорость;  $R$  – характерный размер;  $\mu$  – коэффициент динамической вязкости;  $g$  – ускорение свободного падения. В качестве характерного давления используется величина  $\mu U/R$ . Для определения положения свободной поверхности используется функция  $F(x, y, t)$ , характеризующая количество жидкости в ячейке, равная единице в ячейке, полностью заполненной жидкостью, и нулю в пустой ячейке, подчиняющаяся уравнению:

$$\frac{\partial F}{\partial t} + u \frac{\partial F}{\partial x} + v \frac{\partial F}{\partial y} = 0.$$

Таким образом, ячейки, для которых значение  $F$  находится в интервале между нулем и единицей, содержат свободную поверхность.

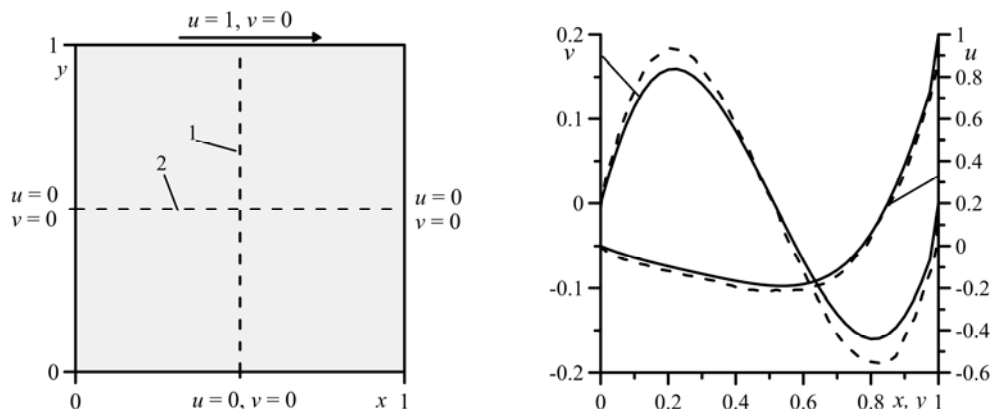


Рис. 1. Течение в прямоугольной каверне при  $Re = 1$ : слева – область решения; справа – профили компонент вектора скорости ( $u$  вдоль сечения 1,  $v$  вдоль сечения 2), сплошная линия – используемая в настоящей работе конечно-разностная процедура решения уравнений Навье – Стокса, пунктирная – профили скорости, полученные методом коллокаций [3]

Конечно-разностная процедура решения уравнений Навье–Стокса верифицируется численным решением задачи о течении в каверне. Рассматривается течение в прямоугольной каверне с движущейся с постоянной скоростью верхней границей (рис. 1). На границе области заданы условия прилипания. В качестве характерной скорости выбрана скорость движения верхней границы, в качестве характерной длины – ширина каверны. Результаты сравнения полученного численного решения с известным решением, полученным методом коллокаций приводятся на рис. 1. Максимальная относительная ошибка не превышает 5% на сетке  $30 \times 30$ .

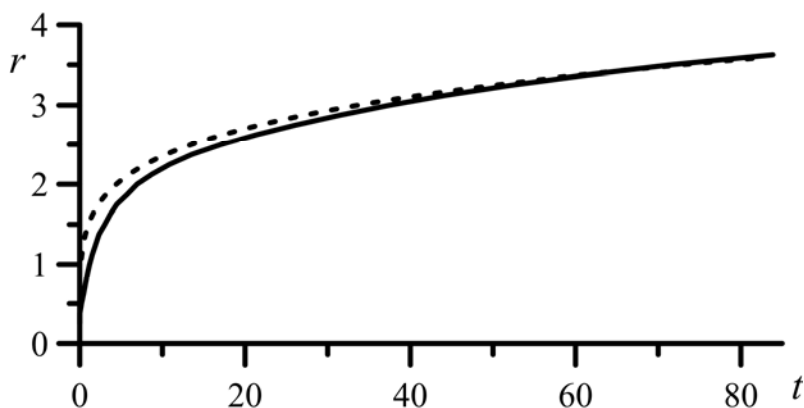


Рис. 2. Зависимость радиуса пятна контакта от времени: сплошная линия – VOF метод ( $Re = 0.87$ ), пунктирная линия – аналитическое решение [4]

Сравнение с приближенным аналитическим решением [4] для задачи о растекании вязкой капли иллюстрируется рис. 2. Задача заключается в определении эволюции свободной поверхности плоской капли, граница которой в начальный момент времени имеет форму окружности, растекающейся по горизонтальной подложке с нулевой начальной скоростью. На твердых стенках выполняются условия прилипания. Данная задача при  $Re \ll 1$  является автомодельной, если в качестве характерной скорости выбрать  $\rho g R^2 / \mu$ , а в качестве характерного давления  $\rho g R$ . За

характерный размер взят радиус капли. Значимые отличия в поведении свободной границы наблюдаются только в начале процесса растекания, когда приближение пленочного течения, используемого в [4], является достаточно грубым.

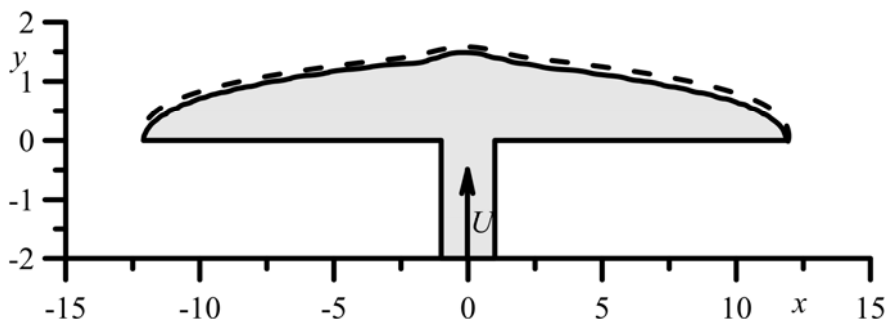


Рис. 3. Истечение вязкой жидкости из вертикального канала при  $Re = 1$ ,  $St = 60$ ,  $t = 14$ : сплошная линия – VOF метод, пунктирная линия – МГЭ (приближение ползущего течения)

Результаты моделирования истечения вязкой жидкости из вертикального канала с заданным расходом представлены на рис. 3, 4. На рис. 3 приведено сравнение с результатами вычислений в приближении ползущего течения с применением метода граничных элементов (МГЭ) [5].

Рис. 4 показывает хорошее согласование с результатами моделирования рассматриваемого течения, проведенными с использованием пакета OpenFOAM [6] для достаточно большого числа Рейнольдса ( $Re=100$ ).

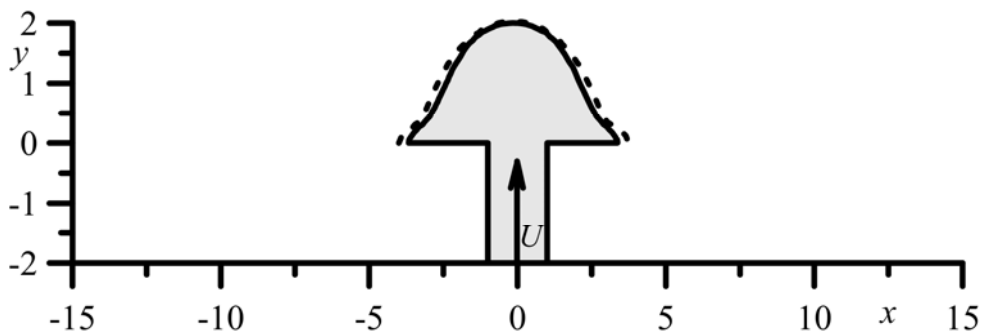


Рис. 4. Истечение вязкой жидкости из вертикального канала при  $Re = 100$ ,  $St = 60$ ,  $t = 5$ : сплошная линия – метод VOF, пунктирная линия – OpenFOAM

Таким образом, на основе алгоритма, предложенного в [1, 2] разработана универсальная программа для расчёта течений вязкой несжимаемой жидкости, позволяющая моделировать течения вязкой жидкости со свободной поверхностью в широком диапазоне изменения числа Рейнольдса.

Исследование выполнено при поддержке РФФИ (проект № 12-08-00313а) и Гранта Президента РФ (МК-3687.2014.1)

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Hirt C.W. Nichols B.D. SOLA: A Numerical Solution Algorithm for Transient Fluid Flows // Los Alamos National Laboratory Report LA-5852. 1975.

2. Hirt C.W., Nichols B.D. Volume of fluid (VOF) method for the dynamics of free boundaries // Journal of Computational Physics. 1981. Vol. 39. P. 201–225.
3. Семин Л.Г., Шанеев В.П. Метод коллокаций и наименьших квадратов для уравнений Навье – Стокса // Вычислительные технологии. 1998. Т. 3. № 3. С. 72–84.
4. Nakaya C. Spread of fluid drops over a horizontal plane // J. of the Physical Society of Japan. 1974. Vol. 37. № 2. P. 539–543.
5. Пономарева М.А., Якутенок В.А. Метод граничных элементов для решения уравнений Стокса. – LAMBERT Academic Publishing, 2013. 160 с.
6. Hemida H. OpenFOAM tutorial: Free surface tutorial using interFoam and rasInterFoam. 2008. P. 1.

## **УЧЕТ ВИДА ПОПЕРЕЧНОГО СЕЧЕНИЯ БАЛКИ ПРИ РАСЧЕТЕ НАПРЯЖЕННО-ДЕФОРМИРОВАННОГО СОСТОЯНИЯ КОНСТРУКЦИЙ**

**В.Н. Зайцев, О.А. Штейнбрехер, Т.В. Бурнышева**

*В работе рассматривается влияние вида поперечного сечения балки на расчёт её напряжённно-деформированного состояния методом конечных элементов на примере железнодорожного рельса. Приводится оценка погрешности численного расчёта перемещений с учётом вида сечения поперечного сечения.*

### **REGISTRATION FORM CROSS-SECTION BEAMS IN CALCULATING THE STRESS-STRAIN STATE OF STRUCTURES**

**V.N. Zaytsev, O.A. Shteinbreher, T.V. Burnysheva**

*In this paper the influence of the type of cross-section of the beam on the calculation of its stress-strain state of the finite element method on the example of railroad rail. An estimate of the error in the numerical calculation of displacements for the type section cross-section.*

В инженерных и машиностроительных конструкциях достаточно широко применяются стержневые и балочные системы или фермы. Таким образом, эти конструкции можно рассматривать, как системы сложной структурой. Особенность стержней и балок в том, что их размеры в поперечном сечении малы по сравнению с размером в направлении образующей [1]. В связи с этим на практике при расчете напряженно-деформированного состояния (НДС) в стержне или балке, как правило, не учитываю его поперечный вид. При расчете НДС всей конструкции такой подход может способствовать увеличению погрешности численного решения.

В статье рассматривается задача учета вида поперечного сечения при численном расчете НДС на примере железнодорожного рельса при его статическом нагружении. В качестве инструмента расчета использовался ППП «Композит-НК» [2], разработанный на кафедре математики и математического моделирования НФИ КемГУ, в котором реализован метод конечных элементов. Пакет имеет открытый компьютерный код, что позволяет рассчитывать жесткостные характеристики элементов ферменных конструкций с учетом вида поперечного сечения.

Полотно железнодорожного пути в Российской Федерации достигает 87157 км, которое широко используется для транспортных перевозок различных грузов и пассажиров. Согласно ГОСТ Р 51685-2000 [3], в России используются рельсы типов Р50, Р65, Р65К, Р75, длина которых может составлять 12,5 или 25 м, изготовленных из различных марок стали (К78ХСФ, Э78ХСФ и т.д.). Различаются и материалы, из которых изготавливаются шпалы железнодорожного полотна (дерево, железобетон, пластик).

Расчёт НДС рельса при статической нагрузке производился на примере полувагона модели 12-735, предназначенного для перевозки насыпных грузов и рельса ти-