МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ
РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ
ТОМСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
НИИ ПРИКЛАДНОЙ МАТЕМАТИКИ И МЕХАНИКИ
ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ФАКУЛЬТЕТ
СОВЕТ МОЛОДЫХ УЧЁНЫХ

АКТУАЛЬНЫЕ ПРОБЛЕМЫ СОВРЕМЕННОЙ МЕХАНИКИ СПЛОШНЫХ СРЕД И НЕБЕСНОЙ МЕХАНИКИ (27–29 ноября 2013 г.)

III Всероссийская молодёжная научная конференция

Под редакцией М.Ю. Орлова

Томск
Издательский Дом Томского государственного университета
2014

2. А*старита Дж., Маруччи Дж.* Основы гидромеханики неньютоновских жидкостей. М.: Мир, 1978. 312 с.

3. *Грот С. Де, Мазур П.* Неравновесная термодинамика: пер. с англ. В.Т. Хозяинова; под ред. Д.Н. Зубарева. М.: Мир, 1964. 456 с.

4. *Пригожин И., Кондепуди Д.* Современная термодинамика: пер. с англ. Ю.А. Данилова и В.В. Белого М.: Мир, 2002. 461с.

5. *Князева А.Г., Демидов В.Н.* Коэффициенты переноса для трехкомпонентного деформируемого сплава // Вестн. Перм. национ. исследов. политех. ун-та. Механика. 2011. №3. С. 84–99.

6. *Князева А.Г., Гизбрехт М.В.* Неизотермическая диффузия в бинарной системе // Изв. вузов. Физика, 2011, №11/3. С. 39–46.

7. *Ляпидевский В.Ю., Пухначев В.В.* Гиперболические подмодели несжимаемой вязкоупругой среды Максвелла // Труды математического институту им. В.А. Стеклова, 2013. Т. 281. С. 1–14.

8. *Пухначев В.В.* Точные решения уравнений движения несжимаемой вязкоупругой среды Максвелла // ПМТФ. 2009. Т. 50, № 2. С. 16–23.

9. *Мещерякова Е.Ю., Пухначев В.В.* Групповой анализ уравнений несжимаемой вязкоупругой среды Максвелла // Современные проблемы математики и механики сплошной среды: Тр. XIV Междунар. конф., Ростов на/Д, Азов, 2010. Ростов на/Д: Изд-во ЮФУ, 2010. Т. 1. С. 230–234.

10.*Пухначев В.В.* Математическая модель несжимаемой вязкоупругой среды Максвелла // ПМТФ. 2010. Т. 51, № 4. С. 116–126

ОСОБЕННОСТИ РЕАЛИЗАЦИИ РАЗНОСТНОГО МЕТОДА РАСЧЕТА ТЕЧЕНИЯ ВЯЗКОЙ ЖИДКОСТИ В КАНАЛЕ СО СКАЧКОМ СЕЧЕНИЯ

К.Е. Бояркина

Исследуется течение вязкой жидкости в канале с внезапным расширением. Численное решение задачи осуществляется методом продольно-поперечной прогонки. Используется два способа расчета давления в угловой точке и проводится коррекция поля давления за счет сохранения слагаемого в правой части уравнения Пуассона, характеризующего изменение дивергенции вектора скорости в процессе установления решения. Проводится сравнительный анализ точности получаемого решения.

REALIZATION FEATURES OF THE DIFFERENCE METHOD OF VISCOUS FLUID FLOW CALCULATION IN A CHANNEL WITH A JUMP SECTION

K.E. Boyarkina

This research is connected with viscous fluid flow in a channel with a sudden expansion. Numerical solution is carried out by the longitudinal-transverse sweep method. There are descriptions of two methods pressure calculation in the angle point and the correction of the pressure field by keeping in the Poisson equation a term, which characterizes the change of the velocity vector divergence in the process of decision. Also there is a comparative analysis of the obtained solution accuracy.

Введение

При получении численного решения задачи о течении вязкой жидкости в канале со скачком сечения возникает необходимость специального рассмотрения способа расчета давления во внутренней угловой точке. Кроме того, при использовании уравнения Пуассона для давления требуется введение специальных процедур коррекции поля давления с целью выполнения разностного аналога уравнения неразрывности [1].

Постановка задачи

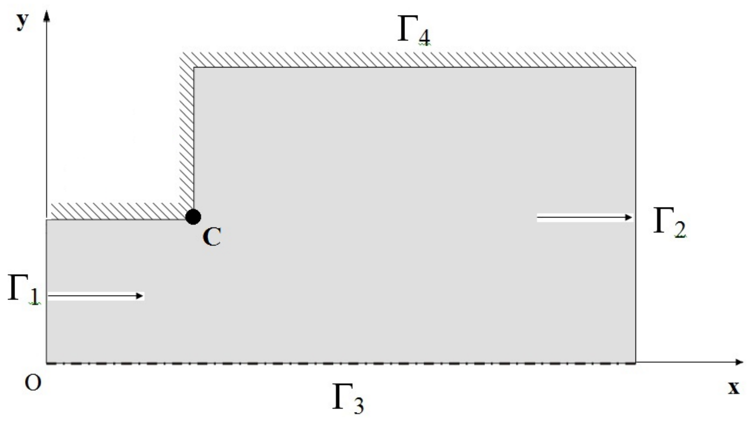

Рис. 1. Область течения

Рассматривается плоское стационарное течение вязкой несжимаемой жидкости в канале со скачком сечения (рис. 1). Течение описывается уравнениями Навье – Стокса совместно с уравнением неразрывности, которые в безразмерной форме имеют вид

$$U\frac{\partial U}{\partial x}+V\frac{\partial U}{\partial y}=-\frac{\partial P}{\partial x}+\frac{1}{\mathrm{Re}}\cdot\left(\frac{\partial^2 U}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 U}{\partial y^2}\right), \tag{1}$$

$$U\frac{\partial V}{\partial x}+V\frac{\partial V}{\partial y}=-\frac{\partial P}{\partial y}+\frac{1}{\mathrm{Re}}\cdot\left(\frac{\partial^2 V}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 V}{\partial y^2}\right), \tag{2}$$

$$\frac{\partial U}{\partial x}+\frac{\partial V}{\partial y}=0. \tag{3}$$

Здесь U, V – составляющие вектора скорости в декартовой системе координат (x, y); P – давление; $\mathrm{Re} = \dfrac{\rho UL}{\mu}$ – число Рейнольдса; L – характерный размер, равный полуширине канала; U – масштаб скорости, равный максимальной скорости на входе.

Вместо уравнения неразрывности используется уравнение Пуассона для давления

$$\left(\frac{\partial^2 P}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 P}{\partial y^2}\right)=\frac{2}{\mathrm{Re}}\cdot\left(\frac{\partial U}{\partial x}\frac{\partial V}{\partial y}-\frac{\partial V}{\partial x}\frac{\partial U}{\partial y}\right). \tag{4}$$

Жидкость подается в канал через входное сечение Γ_1 с заданным расходом, при этом используется параболический профиль продольной скорости. На выходной границе Γ_2 задаются мягкие граничные условия. Входная и выходная границы находятся на достаточном удалении от уступа, во избежание влияния последнего на характер течения в окрестности сечений Γ_1 и Γ_2. На твердой неподвижной стенке Γ_4 реализуются условия прилипания. Граница Γ_3 является линией симметрии канала, на ней задаются соответствующие условия симметрии.

Метод расчета

Для получения стационарного решения используется метод установления [2].

В соответствии с алгоритмом решения задачи методом конечных разностей используется квадратная расчетная сетка (x_i, y_j), где i, j – номера узлов сетки.

В качестве конечно-разностного метода для решения рассматриваемой задачи применяется метод продольно-поперечной прогонки [3].

Способы расчета давления в угловой точке

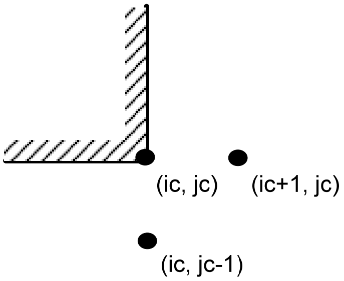

Рис. 2. Узлы сетки, используемые для определения значения давления в точке С

1 способ. Для определения значения давление в точке $C(i_c j_c)$ может быть использовано уравнение (1), либо уравнение (2), которые для угловой точки записываются в виде

$$\frac{\partial P}{\partial x} = \frac{1}{\mathrm{Re}} \cdot \frac{\partial^2 U}{\partial x^2}, \tag{5}$$

$$\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{1}{\mathrm{Re}} \cdot \frac{\partial^2 V}{\partial y^2}. \tag{6}$$

Из разностных аналогов уравнений (5), (6) получаются расчетные формулы, которые имеют вид

$$P(i_c, j_c) = P\left(i_c + 1, j_c\right) - \frac{2}{h_x \cdot \mathrm{Re}} \cdot U\left(i_c + 1, j_c\right), \tag{7}$$

$$P(i_c, j_c) = P\left(i_c, j_c - 1\right) + \frac{2}{h_y \cdot \mathrm{Re}} \cdot V\left(i_c, j_c - 1\right), \tag{8}$$

соответственно. Фактически мы получаем двузначность давления в точке С.

2 способ. В данном способе давление в угловой точке определяется как среднеарифметическое значений давления, полученных по формулам (7) и (8).

Влияние способов расчета давления в угловой точке на результаты решения оценивается по выполнению закона сохранения массы вдоль канала.

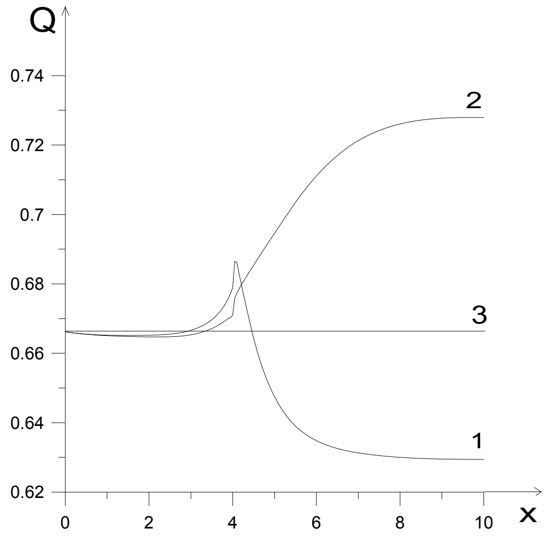

Рис. 3. Расчетная зависимость расхода Q вдоль канала

Расчетные зависимости объемного расхода жидкости Q вдоль канала при использовании первого (кривая *1*) и второго (кривая *2*) способов нахождения давления в угловой точке представлены на рис. 3. Шаг сетки в этих случаях равен 1/40, Re=1, длина узкой части равна 4, а широкой – 6.

Максимальная погрешность в сохранении расхода жидкости в первом случае равна 5,6%, во втором – 9%.

Сравнивая два рассмотренных способа, можно сделать вывод, что результаты, полученные при двойном значении давления в угловой точке, являются более близкими к значению из аналитического решения (кривая 3), равному 2/3.

Поправка на давление

При решении уравнения Пуассона для давления следует обратить внимание на члены в правой части, содержащие

$$D = \frac{\partial U}{\partial x} + \frac{\partial V}{\partial y}. \qquad (9)$$

Основываясь на уравнении неразрывности (3), можно утверждать, что D=0, однако конечно-разностный аналог D обычно отличен от нуля по причине несовместимости граничных условий или из-за недостаточной степени точности итерационного решения уравнения Пуассона. Сохранение D в составе уравнения Пуассона может предотвратить появление дополнительной ошибки в выполнении уравнения (3) внутри области [1].

В разностной форме производной по времени

$$\frac{\partial D}{\partial \tau} = \frac{D_{i,j}^{n+1} - D_{i,j}^{n}}{\Delta \tau} \qquad (10)$$

используется равенство $D^{n+1} = 0$, откуда следует

$$\frac{\partial D}{\partial \tau} = -\frac{D^n_{i,j}}{\Delta \tau}. \qquad (11)$$

Были проведены расчеты с сохранением слагаемого (11) в правой части уравнения Пуассона (кривая 2) и без него (кривая 1). Влияние использования дополнительной коррекции распределения давления на расчетную зависимость Q(x) демонстрируется на рис. 4. Здесь для расчета давления в угловой точке используется первый способ. Максимальная ошибка в сохранении расхода без коррекции давления составляет 5,6%, а с учетом поправки – уменьшается до 0,5%.

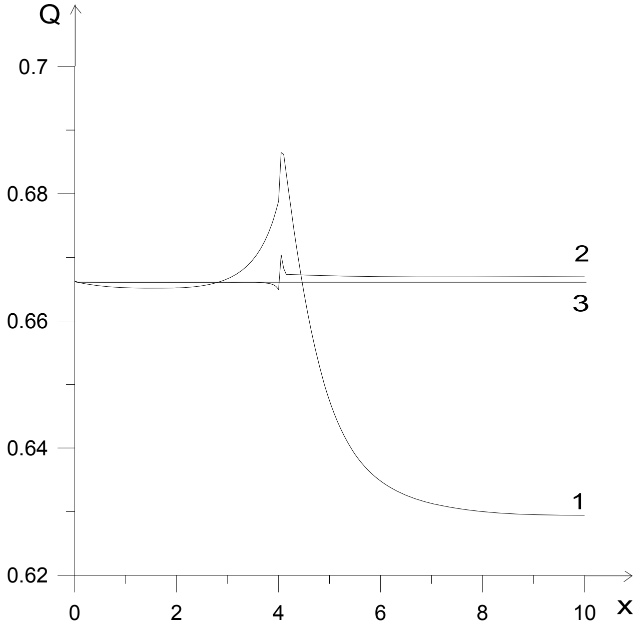

Рис. 4. Расчетная зависимость расхода Q вдоль канала

Заключение

В результате проделанной работы решена задача о стационарном течении несжимаемой жидкости в плоском канале со скачком сечения. Реализовано два способа определения давления в угловой точке. Проведены расчеты с использованием коррекции распределения давления за счет дополнительного слагаемого в правой части и без него. Сравнение показало, что использование способа с двойным значением давления, а также коррекция распределения давления дают более точные результаты по сохранению расхода.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Роуч П.* Вычислительная гидродинамика: пер. с англ. В.А. Гущина, В.Я. Митницкого; под ред. П.И. Чушкина. М.: Мир, 1980. 616 с.
2. *Годунов С.К., Рябенький В.С.* Введение в теорию разностных схем. Физматгиз, 1962. 340 с.
3. *Самарский А А.* Теория разностных схем: учеб.пособ. / под ред. А.В. Захаров, И.М. Овчинникова. М.: Наука, 1977. 656 с.