МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ
РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ
ТОМСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ

МАТЕРИАЛЫ

Первой Всероссийской молодежной научной конференции

«МАТЕМАТИЧЕСКОЕ И ПРОГРАММНОЕ ОБЕСПЕЧЕНИЕ ИНФОРМАЦИОННЫХ, ТЕХНИЧЕСКИХ И ЭКОНОМИЧЕСКИХ СИСТЕМ»

Томск, 17–18 мая 2013 г.

Под общей редакцией
кандидата технических наук И.С. Шмырина

Томск
Издательский Дом Томского государственного университета
2013

При $t=T$ для характеристической функции процесса $i(t)$ в стационарном режиме получим

$$Me^{ju_1 i(t)}=\exp\left\{ju_1(\mathbf{R\Lambda E})\int_{-\infty}^{T}S(x)dx+\frac{(ju_1)^2}{2}\left((\mathbf{R\Lambda E})\int_{-\infty}^{T}S(x)dx+(\mathbf{f\Lambda E})\int_{-\infty}^{T}S^2(x)dx\right)\right\}. \quad (13)$$

Для характеристической функции процесса $K(t)$ в стационарном режиме запишем

$$Me^{ju_2 K(t)}=\exp\left\{ju_2(\mathbf{R\Lambda E})\int_{-\infty}^{T}S(x)m_1(x)dx+\right.$$
$$\left.+\frac{(ju_2)^2}{2}\left((\mathbf{R\Lambda E})\int_{-\infty}^{T}S(x)m_2(x)dx+(\mathbf{f\Lambda E})\int_{-\infty}^{T}S^2(x)m_1^{\,2}(x)dx\right)\right\}. \quad (14)$$

Равенства (13) и (14) будем называть асимптотикой второго порядка для рассматриваемой системы обслуживания.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Гарайшина И. Р., Лобова М. С., Назаров А. А.* Применение немарковской трехфазной СМО для моделирования процессов пенсионного страхования // Информационные технологии и математическое моделирование (ИТММ-2012) : материалы XI Всерос. науч.-практ. конф. с международ. участием (г. Анжеро-Судженск, 23–24 нояб. 2012 г.). – Кемерово : Практика, 2012. – Ч. 2. – С. 90–95.
2. *Назаров А. А., Моисеева С. П.* Метод асимптотического анализа в теории массового обслуживания. – Томск: Изд-во НТЛ, 2006. – 112 с.
3. *Гарайшина И. Р., Лобова М. С.* Исследование системы массового обслуживания требований случайного объема с неограниченным числом приборов и входящем ММРР-потоком // Научное творчество молодежи : материалы XVII Всероссийской научно-практической конференции (25–26 апреля 2013 г.).– Ч. 1. [Электронный ресурс]. – Электрон. дан. (15,5 Мб). – Анжеро-Судженск, 2013. – 1 электрон. опт. диск (CD-R). – С. 11–13.

ИССЛЕДОВАНИЕ RQ-СИСТЕМЫ M|M|1 С ПОСТОЯННОЙ СКОРОСТЬЮ ВОЗВРАТА

А. И. Максимова

Томский государственный университет
E-mail: natya24525@mail.ru

В настоящее время во многих областях производства возникает необходимость использования процессов распределённой обработки информации. Это связано с бурным развитием систем коммуникаций, возникновения информационно-вычислительных систем, появлением и усложнением разнообразных технологических систем, созданием автоматизированных систем управления. Поэтому вполне естественно развитие сетей связи, соединяющих в единые системы различные устройства вычислительной техники. При оптимизации и проектировании сетей передачи данных наиболее действенным инструментом исследования является математическое моделирование. В качестве математических моделей вычислительных систем удобно использовать модели теории массового обслуживания, а именно системы с повторными вызовами. Это обусловлено их широкими практическими приложениями в таких областях, как оценивание производительности и проектирование телефонных сетей, локально вычислительных сетей с протоколами случайного множественного доступа, широковещательных радиосетей, мобильных сотовых радиосетей.

Имеется *RQ(RetrialQuere)*-система, на вход которой поступает простейший поток с параметром λ.Требование, заставшее прибор свободным, занимает его для обслуживания в течение случайного времени, распределенного по экспоненциальному закону с параметром μ. Если прибор занят, то поступившая заявка переходит в источник повторных вызовов (ИПВ). Из ИПВ обращение заявки к прибору определяется динамическим протоколом доступа, т. е. после случайной задержки в ИПВ заявка с динамической (зависящей от состояния ИПВ) интенсивностью σ/i вновь обращается к прибору с повторной попыткой его захвата, где i — число заявок в ИПВ. Если прибор свободен, то заявка из ИПВ занимает его на случайное время обслуживания, если же занят, то заявка мгновенно возвращается в источник повторных вызовов для реализации следующей задержки случайной продолжительности.

Пусть $i(t)$ — число заявок в ИПВ, а $k(t)$ — определяет состояние прибора следующим образом:

$$k(t)=\begin{cases}0, \text{ если прибор свободен,}\\ 1 \text{ если прибор занят.}\end{cases}$$

Состояние системы в момент времени t определяется двумерной цепью Маркова $\{i(t),k(t)\}$.

Обозначим $p\{k(t)=k,i(t)=i\}=P(k,i,t)$ — вероятность того, что в момент времени t прибор находится в состоянии k и в источнике повторных вызовов находится i заявок.

Исследуем поток $i(t)$, характеризующий число заявок в ИПВ.

Для распределения вероятностей $P(k,i,t)$ состояний $\{k,i\}$ рассматриваемой RQ-системы составим систему дифференциальных уравнений Колмогорова, используя Δt-метод.

Система дифференциальных уравнений Колмогорова имеет вид:

$$\begin{cases}\dfrac{\partial^2 P(0,i,t)}{\partial t}=-(\lambda+\sigma)P(0,i,t)+\mu P(1,i,t),\\ \dfrac{\partial^2 P(1,i,t)}{\partial t}=-(\lambda+\mu)P(1,i,t)+\lambda P(0,i,t)+\lambda P(1,i-1,t)+\sigma P(0,i+1,t).\end{cases} \quad (1)$$

В стационарном режиме, т. е. $P(k,i,t)=P(k,i)$, система (1) примет вид:

$$\begin{cases}-\lambda P(0,0)+\mu P(1,0)=0,\\ -(\lambda+\mu)P(1,0)+\lambda P(0,0)+\sigma P(0,1)=0,\\ -(\lambda+\sigma)P(0,i)+\mu P(1,i)=0,\ i\ge 1,\\ -(\lambda+\mu)P(1,i)+\lambda P(0,i)+\lambda P(1,i-1)+\sigma P(0,i+1)=0,\ i\ge 1.\end{cases} \quad (2)$$

Применяя систему (2) для стационарного распределения $P(k,i,t)=P(k,i)$, составим систему уравнений, определяющих частичные характеристические функции $H(k,u)=\sum_i e^{jui}P(k,i)$.

$$\begin{cases} -\left(\rho+\frac{\sigma}{\mu}\right)H(0,u)+H(1,u)+\frac{\sigma}{\mu}P(0,0)=0, \\ \left(\rho+e^{-ju}\frac{\sigma}{\mu}\right)H(0,u)-\left(\rho+1-e^{ju}\rho\right)H(1,u)-e^{-ju}\frac{\sigma}{\mu}P(0,0)=0. \end{cases} \tag{3}$$

Здесь $\rho=\frac{\lambda}{\mu}$.

Система (3) является неоднородной системой линейных алгебраических уравнений, решая ее, получили, что характеристическая функция $H(u)=H(0,u)+H(1,u)$ имеет вид:

$$H(u)=\frac{\frac{\sigma}{\mu}P(0,0)\left(\rho\left(1-e^{-ju}\right)-e^{-ju}\right)}{\rho^2+\frac{\sigma}{\mu}\rho-\frac{\sigma}{\mu}e^{-ju}}.$$

Для того, чтобы найти $P(0,0)$, воспользуемся условием $H(0)=1$:

$$P(0,0)=1-\frac{\mu}{\sigma}\rho^2-\rho. \tag{4}$$

Учитывая (4), характеристическая функция для допредельного распределения вероятностей $P(i)$ числа заявок в ИПВ примет вид

$$H(u)=\frac{\left(\rho^2+\frac{\sigma}{\mu}\rho-\frac{\sigma}{\mu}\right)\left(e^{-ju}-\rho\left(1-e^{-ju}\right)\right)}{\rho^2+\frac{\sigma}{\mu}\rho-\frac{\sigma}{\mu}e^{-ju}}. \tag{5}$$

Метод ассимптотического анализа в условии большой загрузки

Перепишем систему уравнений для функций $H(k,u)$ в матричном виде, для этого обозначив двумерные векторы и матрицу

$$\mathbf{H}(u)=\{H(0,u),H(1,u)\},$$

$$\mathbf{B}=\left\{\frac{\sigma}{\mu},-e^{-ju}\frac{\sigma}{\mu}\right\},$$

$$\mathbf{A}(ju,\rho)=\begin{bmatrix} -\left(\rho+\frac{\sigma}{\mu}\right) & \rho+e^{-ju}\frac{\sigma}{\mu} \\ 1 & -\left(\rho+1-e^{ju}\rho\right) \end{bmatrix},$$

систему уравнений (3) для функций $H(k,u)$ запишем в виде

$$\mathbf{H}(u)\mathbf{A}(ju,\rho)+P(0,0)\mathbf{B}=0. \tag{6}$$

Данную систему будем решать методом асимптотического анализа в условии большой загрузки, то есть при условии $\rho\to S$.

Определение. Пропускной способностью системы массового обслуживания называется точная верхняя граница S тех значений загрузки $\rho=\dfrac{\lambda}{\mu}$, для которых в математической модели этой системы существует стационарный режим.

Обозначим $\varepsilon=S-\rho$, тогда условие $\rho\to S$ примет вид $\varepsilon\to 0$.

В уравнении (6) выполним замены:

$$\rho=S-\varepsilon,\ u=\varepsilon w,\ \mathbf{H}(u)=\mathbf{F}(w,\varepsilon),\ P(0,0)=\varepsilon\Pi,$$

получим

$$\mathbf{F}(w,\varepsilon)\mathbf{A}(jw\varepsilon,S-\varepsilon)+\varepsilon\Pi\mathbf{B}=0, \tag{7}$$

где

$$\mathbf{A}(jw\varepsilon,S-\varepsilon)=\begin{bmatrix}-(S-\varepsilon)-\dfrac{\sigma}{\mu} & (S-\varepsilon)+\dfrac{e^{-jw\varepsilon}\sigma}{\mu}\\ 1 & -(S-\varepsilon)-1+e^{jw\varepsilon}(S-\varepsilon)\end{bmatrix},$$

$$\mathbf{B}(jw\varepsilon)=\left\{\frac{\sigma}{\mu},-e^{-jw\varepsilon}\frac{\sigma}{\mu}\right\}.$$

Теорема 1. Характеристическая функция нормированного числа заявок в ИПВ

$$h(u)=Me^{jui(t)}=\lim_{\varepsilon\to 0}\left\{\mathbf{F}(w,\varepsilon)\mathbf{E}\right\}=\frac{\kappa}{\kappa-jw}, \tag{8}$$

т. е. является характеристической функцией экспоненциального распределения с параметром κ, где

$$\kappa=\frac{\mathbf{R}(S)\mathbf{A}_1'(S)\mathbf{E}+\mathbf{f}_2\mathbf{A}_1(S)\mathbf{E}}{\mathbf{f}_1\mathbf{A}_1(S)\mathbf{E}+\dfrac{1}{2}\mathbf{R}(S)\mathbf{A}_2(S)\mathbf{E}}. \tag{9}$$

Вектор $\mathbf{R}$ определяется системой $\mathbf{R}(S)\mathbf{A}_0(S)=0$ и условием нормировки $\mathbf{RE}=1$, матрицы $\mathbf{A}_0(S)$, $\mathbf{A}_1(S)$ и $\mathbf{A}_2(S)$ имеют вид

$$\mathbf{A}_0(S)=\begin{bmatrix}-S-\sigma/\mu & S+\sigma/\mu\\ 1 & -1\end{bmatrix},\ \mathbf{A}_1(S)=\left.\frac{\partial\mathbf{A}(x,S)}{\partial x}\right|_{x=0},$$

$$\mathbf{A}_2(S)=\left.\frac{\partial^2\mathbf{A}(x,S)}{\partial x^2}\right|_{x=0}, \tag{10}$$

а $\mathbf{f}_1$ и $\mathbf{f}_2$ является решениями систем

$$\mathbf{f}_1\mathbf{A}_0(S)+\mathbf{R}(S)\mathbf{A}_1(S)=0,\ \mathbf{f}_2\mathbf{A}_0(S)+\mathbf{R}(S)\mathbf{A}_0'(S)=0. \tag{11}$$

Теорема 2. Значение пропускной способности RQ-системы M|M|1 с динамическим протоколом доступа, имеет вид:

$$S = \frac{\sqrt{\left(\frac{\sigma}{\mu}\right)^2 + 4\frac{\sigma}{\mu}} - \frac{\sigma}{\mu}}{2}. \tag{12}$$

Аппроксимация допредельного распределения

Допредельное распределение вероятностей числа заявок в ИПВ будет иметь вид:

$$P(i) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} e^{-jui} H(u)\,du.$$

Асимптотическое распределение вероятностей числа заявок в ИПВ имеет вид:

$$P_1(i) = F(i+1) - F(i) = \left(1 - e^{-\varepsilon\kappa}\right)e^{-\varepsilon\kappa i},$$

где $F(i) = 1 - e^{-\varepsilon\kappa i}$.

Нетрудно заметить, что $P_1(i)$ представляет собой геометрическое распределение. Теперь выясним, насколько результаты, полученные методом асимптотического анализа в условии большой загрузки, близки к допредельным результатам.

Рассмотрим и сравним численные реализации распределений $P(i)$ и $P_1(i)$ при заданных параметрах λ, μ и σ. Задав $\mu = 1$, $\sigma = 5$, значение пропускной способности рассматриваемой системы равно $S = 0.854$, $\lambda = a \cdot S \cdot \mu$. Возьмем $a = 0.97$, т. е. $\lambda = 0.83$, получим

Таблица 1

i	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
$P(i)$	0.0626	0.0321	0.031	0.0299	0.0289	0.0279	0.027	0.026	0.0252	0.024	…
$P_1(i)$	0.0338	0.0327	0.0315	0.0305	0.0295	0.0285	0.0275	0.027	0.0257	0.025	…

Расстояние Колмогорова $\Delta_1 = 0.03$, где

$$\Delta_k = \max_i \left| \sum_{n=0}^{i} \left[P(i) - P_k(i) \right] \right|.$$

Для различных значений *a* получим:

Таблица 2

a	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5	0.6	0.7	0.8	0.94	0.97	0.99
Δ_1	0.3476	0.3638	0.3662	0.3548	0.3294	0.2903	0.2374	0.1711	0.0566	0.0288	0.0097

Таким образом, если считать допустимой погрешностью аппроксимации (расстояние Колмогорова) $\Delta_1 = 0.03$, можно сделать вывод, что асимптотическое распределение $P_1(i)$ недостаточно точно аппроксимирует допредельное распределение вероятностей числа заявок в ИПВ $P(i)$.

Для получения более точной аппроксимации, воспользуемся методом квазигеометрического распределения. В этом методе распределение вероятностей числа заявок в ИПВ $P_2(i)$ будет иметь вид:

$$P_2(i)=\begin{cases}P_2(0),\ i=0,\\ \left(1-P_2(0)\right)(1-g)g^{i-1},\ i\geq 1.\end{cases}$$

Распределение $P_2(i)$ называют квазигеометрическим распределением. Здесь параметры распределения имеют вид:

$$P_2(0)=1-\frac{\rho\lambda}{\sigma}\left(1+\rho+\frac{\sigma}{\mu}\right),\ g=\frac{\lambda}{\mu}\cdot\frac{(\lambda+\sigma)}{\sigma}.$$

Построив численную реализацию $P_2(i)$ для ранее заданных параметров λ, σ, μ, и *a*, получим:

Таблица 3

a	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5	0.6	0.7	0.8	0.94	0.97	0.99
Δ_1	0.3476	0.3638	0.3662	0.3548	0.3294	0.2903	0.2374	0.1711	0.0566	0.0288	0.0097
Δ_2	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0

Расстояние Колмогорова Δ_2 равно нулю, для любых *a*, принимающих значения из интервала от 0 до 1, это означает, что квазигеометрическое распределение $P_2(i)$ совпадает с допредельным распределением вероятностей числа заявок в ИПВ $P(i)$. Таким образом, можно сделать вывод, что метод квазигеометрического распределения, наиболее эффективен, чем метод асимптотического анализа.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Назаров А. А., Терпугов А. Ф.* Теория вероятностей и случайных процессов: учебное пособие. — 2-е изд., испр. — Томск: Изд-во НТЛ, 2010. — 204 с.
2. *Назаров А. А., Терпугов А. Ф.* Теория массового обслуживания: учебное пособие 2-е изд., испр. — Томск: Изд-во НТЛ. 2010. — 228 с.
3. *Назаров А. А., Моисеева С. П.* Методы асимптотического анализа в теории массового обслуживания. — Томск: Изд-во НТЛ, 2006. — 112 с.
4. *Боровков А. А.* Асимптотические методы в теории массового обслуживания. — М.: Наука, 1980.
5. *Falin G. I., Templeton J. G. C.* Retrial queues. London: Chapman&Hall, 1997.
6. *Artolejo J. R., Gomez-Corral A.* Retrial Queueing Systems // A Computational Approach, Springer 2008.
7. *Назаров А. А., Семенова И. А.* Сравнение асимптотических и допредельных результатов анализа системы M|M|1|ИПВ: сб.науч.стат. Минск:РИВШ, 2010, №3, с. 272–277.
8. *Назаров А. А., Семенова И. А.* Исследование СМО с повторными вызовами методом асимптотического анализа: журнал Автометрия, 2011, №4, Т. 47, С. 104–113.
9. *Назаров А. А., Судыко Е. А.* Исследование марковской RQ-системы с конфликтами заявок и простейшим входящим потоком: Вестник ТГУ, 2010, №3(12), С. 97–106.
10. *Назаров А. А., Горбатенко А. Е.* Исследование MAP-потока в условиях растущей интенсивности: Вестник ТГУ, 2008, №3(4), С. 66–70.
11. *Назаров А. А., Лопухова С. В.* Исследование MAP-потока методом асимптотического анализа *N*-го порядка // Вестник ТГУ. Серия Информатика. Кибернетика. Математика. 2006. — № 293. — С. 110–115.
12. *Назаров А. А., Любина Т. В.* Исследование динамической RQ-системы // Материалы VIII Всероссийской научно-практической конференции с международным участием — Томск: Изд-во Том.ун-та, 2009. Ч.1. — С. 65–68.