МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ
РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ
ТОМСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ

М.Л. Громов, С.А. Прокопенко

Синтез и оптимизация цифровых схем
Часть 1. BDD и операции над ними

Учебно-методическое пособие

Томск
2014

УДК 519.1 (075.8)
ББК 22.174я73
Г874

Громов М.Л., Прокопенко С.А.
Г874 Синтез и оптимизация цифровых схем. Часть 1. BDD и операции над ними : учебно-методическое пособие. – Томск : Издательский Дом ТГУ, 2014. – 12 с. – 50 экз.

Учебно-методическое пособие является первой частью упражнений для самостоятельной работы студентов по современным подходам к синтезу и оптимизации цифровых схем. Пособие предназначено для студентов кафедры информационных технологий в исследовании дискретных структур (ИТИДиС) РФФ НИ ТГУ, изучающих курсы «Теория автоматов», «Техническая диагностика», «Основы логического проектирования цифровых схем», «Верификация и тестирование аппартных компонентов телекоммуникационных систем», а также для всех интересующихся данной темой.

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ
(грант № 10-08-92003 ННС_а).

Рецензент – д.т.н. А.Ю. Матросова.

Содержание

1. ОПРЕДЕЛЕНИЯ И ОБОЗНАЧЕНИЯ

Пусть в булевой функции от n аргументов $f(x_1,\ldots,x_n)$ зафиксирован порядок следования аргументов: x_1, …, x_n. *Двоичной диаграммой решений* (Binary Decision Diagram, или BDD) для функции f является двоичное (бинарное) дерево, которое определяется рекурсивно.

1. BDD для константы 0 – это дерево, состоящее из одной вершины, помеченной символом 0. Эту вершину будем называть *терминальной*.

2. BDD для константы 1 – это дерево, состоящее из одной вершины, помеченной символом 1. Эту вершину будем так же называть *терминальной*.

3. Уровню (ярусу) i BDD для функции f соответствует аргумент x_i. Корень находится на уровне 1.

4. Из каждой вершины уровня i левая дуга ведёт в BDD для функции $f(a_1,\ldots,a_{i-1},0,x_{i+1},\ldots,x_n)$, и будем говорить, что на этой дуге зафиксировано значение 0 для аргумента x_i; а правая дуга – в BDD для функции $f(a_1,\ldots,a_{i-1},1,x_{i+1},\ldots,x_n)$, и будем говорить, что на этой дуге зафиксировано значение 1 для аргумента x_i. Здесь a_1, ..., a_{i-1} – значения аргументов, зафиксированные на дугах, ведущих из корня дерева в заданную вершину. По построению, такой путь будет единственным. Всем вершинам уровня i припишем пометку x_i.

Таким образом, BDD является представлением разложения Шеннона для булевой функции f. Из каждой вершины BDD, кроме терминальных вершин, исходят две дуги.

Пример 1. Рассмотрим булеву функцию трех аргументов $f(x_1,x_2,x_3)=x_1x_2\vee x_3$. Разложим данную функцию сначала по переменной x_1: $f(x_1,x_2,x_3)=x_1(1x_2\vee x_3)\vee \bar{x}_1(0x_2\vee x_3)$. Затем каждый из коэффициентов разложения разложим по переменной x_2:

$$1x_2\vee x_3 = x_2(11\vee x_3)\vee \bar{x}_2(10\vee x_3),$$
$$0x_2\vee x_3 = x_2(01\vee x_3)\vee \bar{x}_2(00\vee x_3).$$

И, наконец, каждый из четырёх коэффициентов разложения функции по переменным x_1 и x_2 разложим по переменной x_3:

$$11 \vee x_3 = x_3(11 \vee 1) \vee \bar{x}_3(11 \vee 0),$$

$$10 \vee x_3 = x_3(10 \vee 1) \vee \bar{x}_3(10 \vee 0),$$

$$01 \vee x_3 = x_3(01 \vee 1) \vee \bar{x}_3(01 \vee 0),$$

$$00 \vee x_3 = x_3(00 \vee 1) \vee \bar{x}_3(00 \vee 0).$$

Таким образом, вычислив значения в скобках, получим:

$$f(x_1, x_2, x_3) = x_1 x_2 x_3 1 \vee x_1 x_2 \bar{x}_3 1 \vee x_1 \bar{x}_2 x_3 1 \vee x_1 \bar{x}_2 \bar{x}_3 0 \vee$$
$$\vee \bar{x}_1 x_2 x_3 1 \vee \bar{x}_1 x_2 \bar{x}_3 0 \vee \bar{x}_1 \bar{x}_2 x_3 1 \vee \bar{x}_1 \bar{x}_2 \bar{x}_3 0.$$

BDD, соответствующая такому разложению данной функции, представлена на рисунке 1. Корню дерева (ярус 1) поставлена в соответствие первая переменная разложения x_1, второму ярусу дерева соответсвует вторая переменная разложения – x_2, третьему ярусу – соответственно третья переменная разложения x_3. На последнем, четвёртом, ярусе указаны значения функции на соответствующих наборах (четвёртая переменная в элементарных конъюнкциях совершенной ДНФ, полученной при разложении функции $f(x_1, x_2, x_3) = x_1 x_2 \vee x_3$ по формуле Шеннона). Для удобства восприятия, дуги графа, соответствующие нулевому значению переменной, обозначены пунктирной линией.

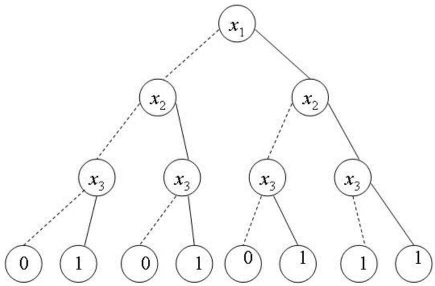


Рис. 1. BDD функции $f(x_1, x_2, x_3) = x_1 x_2 \vee x_3$

По заданной BDD и значениям аргументов функции можно определить значение функции. Начнём спуск из корня дерева. Рассмотрим вершину дерева с пометкой x_i. Если $x_i = 0$, то двигаемся по левой дуге, исходящей из рассматриваемой вершины, и, если $x_i = 1$, то двигаемся по правой дуге. Таким образом, при спуске из корня дерева по какой-либо ветви мы можем сформировать набор с учётом значений переменных в данной ветви. Если достигнута одна из терминальных вершин дерева, то значение функции на соответствующем наборе совпадает с пометкой данной терминальной вершины. Действуем подобным образом, пока не будет достигнута каждая терминальная вершина. В итоге получим значение функции на каждом наборе.

Пусть дана некоторая BDD. Объединим в ней изоморфные подграфы, а затем удалим все вершины, из которых левая и правая дуги ведут в одного и того же потомка (приемника), заменив дугу, ведущую в данную вершину дугой, которая будет вести в её потомка (без разницы, левого или правого, поскольку они совпадают). Будем повторять эти операции до тех пор, пока ничего нельзя будет ни объединить, ни удалить. В итоге получится *сокращённая двоичная диаграмма решений*. Заметим, что операции объединения и удаления вершин, для простоты, лучше выполнять снизу вверх. В этом случае все вершины с пометкой 0 (или 1) объединяются в одну вершину.

Пример 2. Рассмотрим булеву функцию $f(x_1, x_2, x_3) = x_1 x_2 \vee x_3$. Для BDD данной функции, представленной на рисунке 1, установим возможные упрощения. Во-первых, после разложения функции по первым двум переменным при $x_1 = 1$ и $x_2 = 1$, значение функции не будет зависеть от значения переменной x_3 (на рисунке 1 две крайние правые ветви заканчиваются в терминальной вершине 1). Поэтому можно упростить данную BDD, проведя дугу из вершины x_2 (при $x_1 = 1$), соответствующую $x_2 = 1$, непосредственно в терминальную вершину 1. Во-вторых, рассмотрим поддерево при $x_1 = 0$. Вне зависимости от того, чему равна переменная x_2, при последующем разложении по переменной $x_3 = 1$ достигается терминальная вершина 1, а при разложении по переменной $x_3 = 0$ достигается терминальная вершина 0. Ветвь дерева при $x_1 = 1$ и $x_2 = 0$ не упрощается. Сокращённая BDD, построенная по BDD из предыдущего примера, изображена на рисунке 2.

Сокращённая двоичная диаграмма решений, в общем случае, уже не будет бинарным деревом, однако получившийся граф будет ациклическим. Все пути, начинающиеся в вершине, которая ранее была корнем дерева, будут вести в одну из двух терминальных вершин: в вершину, помеченную символом 0, или в вершину, помеченную символом 1.

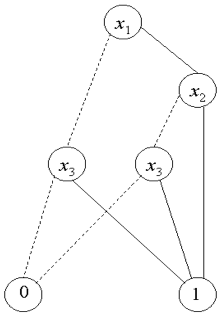


Рис. 2. Сокращенная BDD $f(x_1, x_2, x_3) = x_1x_2 \vee x_3$

Хотелось бы отметить, что сокращённая BDD представляет собой разложение булевой функции по формуле Шеннона с выполнением промежуточных вычислений, которые приводят к сокращению коэффициентов разложения функции. Более того, сокращённая BDD функции существенно зависит от порядка выбора аргументов функции для разложения по формуле Шеннона.

Пример 3. Сокращённая BDD функции $f(x_1, x_2, x_3) = x_1x_2 \vee x_3$ при разложении сначала по переменной x_3, а затем по переменной x_1 представлена на рисунке 3.

При заданном порядке аргументов функции сокращённая BDD является *каноническим* представлением функции. Иными словами, две сокращённые BDD одной функции изоморфны при зафиксированном порядке выбора аргументов. Если определённым образом выбрать структуру данных для представления BDD в памяти компьютера, то проверка эквивалентности функций становится достаточно простой задачей [1].

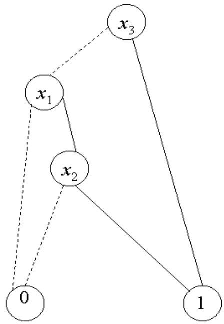


Рис. 3. Сокращённая BDD функции $f(x_1, x_2, x_3) = x_1x_2 \vee x_3$ при начальной переменной разложения x_3

Аналогично тому, как можно было определить значение функции по BDD, можно выяснить её значение и по сокращённой BDD. Единственное отличие состоит в том, что теперь мы фактически рассматриваем интервальное представление функции.

Пример 4. Рассмотрим сокращённую BDD, представленную на рисунке 3. По данной BDD однозначно можно восстановить, например, таблицу истинности функции. Рассмотрим сначала крайнюю правую ветвь BDD, $x_3 = 1$ (соответствующий интервал – – 1). Это означает, что на наборах 001, 011, 101 и 111 функция принимает значение 1. При $x_3 = 0$, $x_1 = 1$ и $x_2 = 1$, т.е. на наборе 110 функция принимает значение 1. Поскольку булева функция имеет всего лишь два значения, то можно сказать, что на всех остальных наборах данная функция принимает значение 0. С другой стороны, аналогично тому, как это было выполнено для единичных значений функции, можно восстановить и область нулевых значений функции.

Задачи к разделу 1

1. Заданы вектор-столбцы значений булевой функции: 00011010, 11010111, 11001001. Построить BDD для этих функций.
2. Привести BDD для функций предыдущей задачи к сокращённому виду, т.е. представить в виде сокращённых BDD.

3. Для булевых функций $f(x,y,z) = x \vee y\bar{z} \oplus \bar{x} \downarrow z$, $f(x,y,z) = x \to \bar{y}(z \oplus \bar{x}) / yz$, $f(x,y,z) = x\bar{z} \to y(\bar{x} \oplus z) / y$, $f(x,y,z) = x \vee \bar{y}z \downarrow \bar{x}(y \oplus \bar{z})$ построить сокращённые BDD, зафиксировав некоторый порядок аргументов. Затем построить сокращённые BDD функций, использовав иной порядок аргументов. Сравнить, совпадают ли сокращённые BDD функции, построенные при различных порядках аргументов.

2. ОПЕРАЦИИ С BDD

Пусть A – некоторая BDD. Через $A.l$ будем обозначать левого (соответствующего значению 0 переменной, связанной с корнем BDD A) потомка корневой вершины BDD A. Аналогично, через $A.r$ будем обозначать правого потомка корневой вершины диаграммы A.

Пусть A и B – две некоторые BDD, и пусть переменная x не связана ни с одной вершиной в диаграммах A и B. Тогда через $C_x(A, B)$ обозначим BDD, у которой корневая вершина связана с переменной x; из корневой вершины этой диаграммы левая (нулевая) дуга ведёт в корневую вершину диаграммы A, а правая – в корневую вершину диаграммы B.

Пусть некоторая булева функция f есть результат бинарной операции ($\oplus$, $\wedge$, $\vee$ и т.д.) над двумя булевыми функциями g и h, т.е. $f = g \mathbin{@} h$, где @ – знак бинарной операции. Пусть G – BDD для функций g, H – BDD для функции h и F – BDD для функции f,, причём порядок следования переменных в диаграммах G и H один и тот же. Тогда BDD F для функции f можно получить, используя BDD функций g и h следующим образом $F = G \mathbin{@} H$, где операции над диаграммами определяются согласно правилам:

1. $A \mathbin{@} B = C_x(A.l \mathbin{@} B.l, A.r \mathbin{@} B.r)$ – если переменная x связана с корневой вершиной диаграммы A и с корневой вершиной диаграммы B.

2. $A \mathbin{@} B = C_x(A.l \mathbin{@} B, A.r \mathbin{@} B)$ – если переменная x связана с корневой вершиной диаграммы A, но *не* связана с корневой вершиной диаграммы B.

3. $A @ B = C_x(A @ B.l, A @ B.r)$ – если переменная x связана с корневой вершиной диаграммы B, но *не* связана с корневой вершиной диаграммы A.

4. В случае, когда A и B – терминальные вершины и a – константа (0 или 1) связанная с вершиной A, а b – константа (0 или 1) связанная с вершиной B, то $A @ B$ есть терминальная вершина, связанная с константой, равной результату выполнения операции $a @ b$.

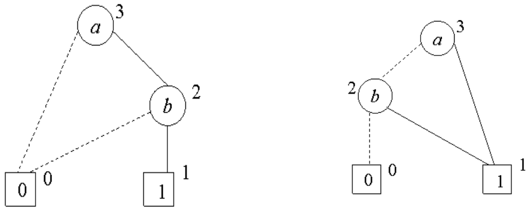
Заметим, что в результате выполнения этих правил получится, вообще говоря, BDD, которая не является сокращённой, и её придётся сокращать, однако порядок переменных останется таким же, как и в исходных диаграммах. Существуют и другие подходы, некоторые из которых позволяют сразу получить сокращённую BDD. Мы не будем рассматривать их в данном пособии, поскольку все они основаны на описанных выше четырёх правилах.

Пример 5. Пусть заданы диаграммы A и B для функций g и h (рисунки 4*а* и 4*б* соответственно).

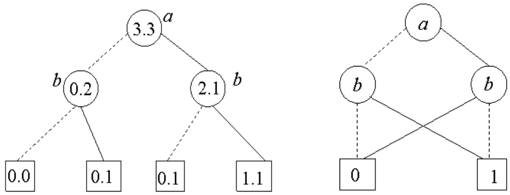
Для удобства рассмотрения мы перенумеровали вершины в этих диаграммах. Будем под C_i понимать поддиаграмму диаграммы C, которая состоит из всех вершин диаграммы C, достижимых из вершины i, и всех дуг, инцидентных этим вершинам (кроме той, которая *входит в* вершину i).

Построим диаграмму $A \oplus B$. Поскольку корневые вершины диаграмм A и B соответствуют одной и той же переменной a, то мы должны применить правило 1. Тогда в конструируемом дереве корневая вершина 3.3 (первое число – номер вершины диаграммы A, второе – диаграммы B) соответствует переменной a. Левая дуга из вершины 3.3 ведёт в корневую вершину диаграммы, которая есть результат применения опрации $\oplus$ к диаграммам A_0 (левый потомок вершины 3 диаграммы A) и B_2 (левый потомок вершины 3 диаграммы B). Эту вершину мы обозначили 0.2 (рисунок 4*в*). Аналогично, правая дуга из вершины 3.3 ведёт в вершину 2.1. Рассмотрим вершину 0.2. Так как вершина 0 диграммы A – терминальная, ей не соответствует ни одна переменная (в том числе и b), в то время как вершине 2 диаграммы B соответствует переменная b. Значит, мы должны воспользоваться правилом 3.

Тогда, во-первых, вершине 0.2 соответсвует переменная b. Во-вторых, левая дуга из вершины 0.2 ведёт в корневую вершину диаграммы, которая является результатом применения операции $\oplus$ к диаграммам A_0 и B_0 (B_0 – это левый потомок вершины 2 диаграммы B), а правая ветвь ведёт из вершины 0.2 в корень диаграммы $A_0 \oplus B_1$ (вершина 0.1 на рисунке 4*в*).



а *б*



в *г*

Рис. 4. BDD: (*а*) диаграмма A, (*б*) диаграмма B, (*в*) диаграмма $A \oplus B$, (*г*) сокращённая BDD функции $f = g \oplus h$

При рассмотрении вершины 2.1, в свою очередь, переменная b связана с вершиной 2 диаграммы A и не связана с вершиной 1 диаграммы B. В этом случае, мы должны применить правило 2.

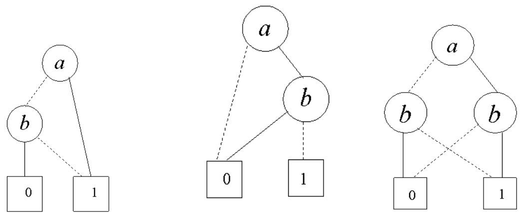
Далее переходим к рассмотрению вершин 0.0, 0.1, 0.1 и 1.1. Каждая из этих вершин будет корнем диаграммы, полученной применением операции $\oplus$ к терминальным вершинам диаграмм A и B. Соответственно, согласно правилу 4, мы должны заменить вершины 0.0, 0.1, 0.1 и 1.1 терминальными вершинами. Вершину 0.0 заменяем терминальной вершиной 0 ($A_0 \oplus B_0 = 0 \oplus 0 = 0$), вершину 0.1 (обе эти вершины) терминальной вершиной 1 ($A_0 \oplus B_1 = 0 \oplus 1 = 1$), вершину 1.1 терминальной вершиной 0 ($A_1 \oplus B_1 = 1 \oplus 1 = 0$). И если теперь провести сокращение получившейся BDD, то результатом будет сокращённая BDD функции $f = g \oplus h$ (рисунок 4*г*).

Задачи к разделу 2

1. Пусть заданы BDD G_1, G_2 и G_3 (рисунок 5). Построить BDD $G_1 \oplus G_2$, $G_1 \oplus G_3$, $G_2 \oplus G_3$.

2. Построить BDD $G_1 \wedge G_2$, $G_1 \wedge G_3$, $G_2 \wedge G_3$ для BDD на рисунке 5.

3. Построить BDD $G_1 \vee G_2$, $G_1 \vee G_3$, $G_2 \vee G_3$ для BDD на рисунке 5.



а *б* *в*

Рис. 5. BDD: (*а*) диаграмма G_1, (*б*) диаграмма G_2, (*в*) диаграмма G_3

Используемая литература

1. Somenzi, F. CUDD: CU Decision Diagram Package [Электронный ресурс] / F. Somenzi // Режим доступа: http://vlsi.colorado.edu/~fabio/CUDD/

Издание подготовлено в авторской редакции

Отпечатано на участке цифровой печати
Издательского Дома Томского государственного университета

Заказ № 345 от «8» мая 2014 г. Тираж 50 экз.