

О ПЕРЕСЕЧЕНИЯХ Т-РАДИКАЛОВ В КАТЕГОРИИ АБЕЛЕВЫХ ГРУПП

Доказана теорема, устанавливающая связь между пересечением «непериодических» Т-радикалов категории абелевых групп и тензорным произведением групп, порождающих эти Т-радикалы.

Все встречающиеся в работе группы – абелевы. Буква p обозначает некоторое простое число; P – множество всех простых чисел; $\mathbf{Z}(p)$ – циклическая группа порядка p . Периодическая часть и p -компонента группы A обозначаются $t(A)$ и A_p соответственно.

Сначала напомним ряд определений и фактов из теории радикалов [1. Гл. 1]. Говорят, что в категории абелевых групп задан идемпотентный радикал ρ , если всякой группе A поставлена в соответствие её подгруппа $\rho(A)$ так, что для любого гомоморфизма групп $\varphi: A \rightarrow B$ справедливо включение $\varphi(\rho(A)) \subset \rho(B)$, причём выполнены свойства:

P1. $\rho(\rho(A)) = \rho(A)$ для любой группы A .

P1*. $\rho(A/\rho(A)) = 0$ для любой группы A .

Пусть ρ – идемпотентный радикал. Класс $R(\rho)$ всех групп A , для которых выполнено равенство $\rho(A) = A$, называется ρ -радикальным; класс $P(\rho)$, определяемый равенством $\rho(A) = 0$, – ρ -полупростым. Идемпотентный радикал однозначно определяется как своим радикальным, так и своим полупростым классом. Заметим, что всякий радикальный класс замкнут относительно расширений, прямых сумм и гомоморфных образов, а всякий полупростой – относительно расширений, прямых произведений и подгрупп.

Идемпотентные радикалы можно естественным образом частично упорядочить: $\rho \leq \sigma$ тогда и только тогда, когда $\rho(A) \subset \sigma(A)$ для любой группы A . В этом случае всякое множество идемпотентных радикалов имеет точную нижнюю и точную верхнюю грань. Например, радикальный класс пересечения (точной нижней грани) $\rho \wedge \sigma$ двух идемпотентных радикалов ρ и σ совпадает с пересечением радикальных классов $R(\rho) \cap R(\sigma)$. Отметим также, что большему идемпотентному радикалу соответствует больший радикальный и меньший полупростой класс.

Пусть F – некоторая группа. Через $W_F(A)$ мы обозначим сумму всех подгрупп B группы A таких, что $B \otimes F = 0$. Тогда W_F – идемпотентный радикал, а его радикальный класс $R(W_F)$ содержит те и только те группы A , для которых $A \otimes F = 0$ [2. С. 203]. Далее этот радикал называется Т(F)-радикалом.

Зафиксируем ещё одну группу V . Через $H_V(A)$ будем обозначать пересечение всех подгрупп B группы A таких, что $\text{Hom}(V, A/B) = 0$. В этом случае H_V также является идемпотентным радикалом, а его полупростой класс $P(H_V)$ содержит в точности все те группы A , для которых $\text{Hom}(V, A) = 0$ [2. С. 203]. Далее, его радикальный класс $R(H_V)$ содержит группу A тогда и только тогда, когда всякий ненулевой гомоморфный образ этой группы содержит некоторый ненулевой гомоморфный образ группы V ; следовательно, H_V есть наименьший идемпотентный радикал, радикальный класс которого содержит группу V [3. С. 110]. Таким образом, можно сказать, что этот радикал порождается группой V .

Предложение 1. Для любых групп F и G справедливо равенство $W_F \wedge W_G = W_{F \oplus G}$.

Доказательство следует из очевидного равенства $R(W_{F \oplus G}) = R(W_F) \cap R(W_G)$.

В [4. С. 299–300] дано описание всех Т(F)-радикалов категории абелевых групп. В частности, радикальный класс $R(W_F)$ содержит непериодические группы тогда и только тогда, когда группа F периодическая. Все такие радикалы W_F находятся во взаимно однозначном соответствии со всевозможными разбиениями множества простых чисел P на три попарно непересекающиеся множества: L (те p , для которых $F_p = 0$), M (те p , для которых F_p – ненулевая делимая группа) и N (те p , для которых p -компонента F_p не является делимой). Соответствующий этому разбиению радикал W_F можно описать следующим образом: класс $R(W_F)$ содержит группу A тогда и только тогда, когда $A/t(A)$ является p -делимой группой для всех $p \in M$, а сама группа A является p -делимой для всех $p \in N$. Таким образом, $W_F(A)$ – это наибольшая подгруппа группы A , имеющая данные свойства.

Убедимся, что всякий такой Т(F)-радикал можно представить в виде радикала H_V .

Предложение 2. Пусть F – периодическая группа, (L, M, N) – соответствующее разбиение множества P . Тогда $W_F = H_V$, где $V = X \oplus Y$ (при этом X – аддитивная группа рациональных чисел, знаменатели которых взаимно просты со всеми $p \in L$, а Y есть прямая сумма групп $\mathbf{Z}(p)$ по всем $p \in M$).

Доказательство. Ясно, что $W_F(V) = V$; поэтому $H_V \leq W_F$. Допустим, что $H_V < W_F$, т.е. существует группа A такая, что $A \in R(W_F)$ и $A \notin R(H_V)$. Тогда среди всех ненулевых гомоморфных образов группы A найдётся группа B такая, что $\text{Hom}(V, B) = 0$ (при этом, очевидно, $B \in R(W_F)$).

Пусть p – простое число. Рассмотрим три случая.

1. $p \in L$. Из $\text{Hom}(V, B) = 0$ следует $B_p = 0$, так как X имеет $\mathbf{Z}(p)$ своим гомоморфным образом.

2. $p \in M$. Из равенства $\text{Hom}(V, B) = 0$ получаем $\text{Hom}(\mathbf{Z}(p), B_p) = 0$, а это возможно лишь в случае $B_p = 0$.

3. $p \in N$. Условие $B \in R(W_F)$ означает, что p -компонента B_p делима. В этом случае из равенства $\text{Hom}(X, B) = 0$ сразу следует $B_p = 0$.

Получили, что B – группа без кручения. Следовательно, она p -делима для всех $p \notin L$. Поэтому равенство $\text{Hom}(X, B) = 0$ возможно лишь при $B = 0$. Полученное противоречие доказывает требуемое равенство $W_F = H_V$.

Теорема 1. Пусть F и G – периодические группы, $W_F = H_V$ и $W_G = H_U$ (где группы $V = X_1 \oplus Y_1$ и $U = X_2 \oplus Y_2$ выбираются так, как это делалось в условии предложения 2). Тогда $W_F \wedge W_G = H_{V \otimes U}$.

Доказательство. Пусть идемпотентным радикалам W_F , W_G и $W_F \wedge W_G = W_{F \oplus G}$ соответствуют разбиения $(L_1,$

$M_1, N_1), (L_2, M_2, N_2)$ и (L, M, N) . Тогда, как нетрудно видеть, имеем

$$L = L_1 \cap L_2, \quad N = N_1 \cup N_2, \\ M = (M_1 \cap M_2) \cup (L_1 \cap M_2) \cup (M_1 \cap L_2),$$

и остаётся показать, что $W_{F \oplus G} = H_{V \otimes U}$.

В самом деле, $X_1 \otimes X_2 \cong X$, где X есть аддитивная группа рациональных чисел, знаменатели которых взаимно просты со всеми $p \in L$. Далее группа $Y_1 \otimes Y_2$ изоморфна прямой сумме групп $\mathbf{Z}(p)$ по всем $p \in M_1 \cap M_2$. В свою очередь группа $X_1 \otimes Y_2$ ($Y_1 \otimes X_2$) изоморфна прямой сумме групп $\mathbf{Z}(p)$, где p пробегает множество $L_1 \cap M_2$ (соответственно $M_1 \cap L_2$). Таким образом, $V \otimes U \cong X \oplus Y$, где Y есть прямая сумма групп $\mathbf{Z}(p)$ по всем $p \in M$. Отсюда, по предложению 2, следует равенство $W_{F \oplus G} = H_{V \otimes U}$. Теорема доказана.

Чтобы усилить утверждение теоремы 1, нам понадобится следующая

Лемма. Пусть V, U и C – абелевы группы, причём $P(H_V) = P(H_C)$. Тогда $P(H_{V \otimes U}) = P(H_{C \otimes U})$.

Доказательство. Если $A \in P(H_{V \otimes U})$, то имеем

$$\text{Hom}(V, \text{Hom}(U, A)) \cong \text{Hom}(V \otimes U, A) = 0,$$

т.е. $\text{Hom}(U, A) \in P(H_V)$. Отсюда $\text{Hom}(U, A) \in P(H_C)$ и, следовательно,

$$\text{Hom}(C \otimes U, A) \cong \text{Hom}(C, \text{Hom}(U, A)) = 0.$$

Таким образом, $P(H_{V \otimes U}) \subset P(H_{C \otimes U})$. Обратное включение доказывается аналогично.

Теорема 2. Пусть F и G – периодические группы, $W_F = H_C$ и $W_G = H_D$. Тогда $W_F \wedge W_G = H_{C \otimes D}$.

Доказательство. Пусть V и U – «канонические» (см. теорему 1) группы, для которых $W_F = H_V$ и $W_G = H_U$. Тогда нам достаточно показать, что из равенств $H_V = H_C$ и $H_U = H_D$ следует $H_{V \otimes U} = H_{C \otimes D}$.

В самом деле, учитывая коммутативность тензорного произведения абелевых групп, из равенств $P(H_V) = P(H_C)$ и $P(H_U) = P(H_D)$ по предыдущей лемме получаем

$$P(H_{V \otimes U}) = P(H_{C \otimes U}) = P(H_{C \otimes D}).$$

Следовательно, $H_{V \otimes U} = H_{C \otimes D}$. Теорема доказана.

Отметим, что результат теоремы 2 легко обобщается (по индукции) на случай пересечения любого конечного семейства «непериодических» Т-радикалов.

ЛИТЕРАТУРА

1. Кашу А.И. Радикалы и кручения в модулях. Кишинёв: Штиинца, 1983.
2. Тимошенко Е.А. Т-радикалы и Е-радикалы в категории модулей // Сибирский математический журнал 2004. Т. 45, № 1. С. 201–210.
3. Gardner B.J. Torsion classes and pure subgroups // Pacific J. Math. 1970. Vol. 33, № 1. P. 109–116.
4. Timoshenko E.A. T-radicals in the category of modules // Acta Appl. Math. 2005. Vol. 85, № 1–3. P. 297–303.

Статья поступила в редакцию журнала 28 июня 2006 г., принята к печати 5 июля 2006 г.