УДК 512.623

Г.Г. Пестов

ОБ АРХИМЕДОВСКИ ЗАМКНУТЫХ ПОЛЯХ

С помощью теории сечений исследованы свойства архимедовски замкнутых полей, в частности получено свойство, аналогичное свойству вещественной замкнутости поля. Получено достаточное условие изоморфизма архимедовски замкнутых полей.

Если элементы *a, b* линейно упорядоченного поля архимедовски эквивалентны, то будем писать $a \sim b$. Если *P* есть расширение упорядоченного поля *K*, такое что $\forall x \in P \exists y \in K (x \sim y)$, то *P* называется *архимедовским* расширением (короче: *a*-расширением) поля *K*. Максимальное *a*-расширение упорядоченного поля *K* называется *архимедовским замыканием* (*a*-замыканием) *K*. Упорядоченное поле *F* называется архимедовски замкнутым, если *F* совпадает со своим *a*-замыканием. Эти понятия восходят ещё к работам Х. Хана [3]. Аналогичные определения работают в теории решеточно упорядоченных групп [4, 5].

О сечениях в архимедовски замкнутых полях

Следующая теорема была впервые сформулирована в виде предположения В.Г. Пестовым на семинаре при ММФ ТГУ.

Теорема 1. Упорядоченное поле архимедовски замкнуто, если и только если все сечения в этом поле несимметричны [6].

Лемма 1. Пусть *K* есть подполе архимедовски замкнутого поля *P*, (A, *B*) есть симметричное сечение в *K*. Тогда существует $a \in P$, такое что $A < a < B$.

Доказательство. Пусть, в условиях леммы, не существует такого $a \in P$, что $A < a < B$. Положим $A' = \{x \in P \mid \exists y \in A(x \le y)\}$, $B' = \{x \in P \mid \exists y \in B(y \le x)\}$.

Легко видеть, что (A', B') есть сечение в *P*, и $A \subset A', B \subset B'$. Сечение (A', B') в *P* симметрично. В самом деле, пусть $x_0 \in A'$. По построению A', найдется $x_1 \in A, x_0 < x_1$. Так как *A* – длинный берег сечения (A, *B*) в *K*, то найдется $x \in B$, такой что $(x + (x - x_1)) \in B$. Следовательно, берег A' – длинный.

Аналогично доказывается, что берег B' – длинный. Следовательно, сечение (A', B') в *P* – симметричное, что противоречит архимедовской замкнутости поля *P*.

Некоторые алгебраические свойства *a*-полей

Теорема 2. Пусть поле *P* архимедовски замкнуто. Тогда множество элементов, архимедовски эквивалентных 1, есть делимая мультипликативная подгруппа поля *P*.

Доказательство. Очевидно, что множество элементов поля *P*, архимедовски эквивалентных 1, есть подгруппа мультипликативной группы поля *P*. Остается доказать, что это – делимая подгруппа.

Пусть $b \in P$, $n \in N$, $b \sim 1$. Обозначим через $\overline{P}$ вещественное замыкание поля *P*, теперь $P \subset \overline{P}$. Имеем $\xi = b^{\frac{1}{n}} \in \overline{P}$. Отсюда $\xi \sim 1$.

Предположим, что $\xi \notin P$. Тогда ξ порождает в *P* некоторое сечение (*A*, *B*). Это сечение несимметрично в силу архимедовской замкнутости поля *P*. Предположим для определенности, что *A* – короткий берег и $a \in A$ есть точка, близкая к берегу *B*. Тогда разность $(\xi - a)$ не является архимедовски эквивалентной никакому элементу поля *P*.

Выберем $m \in N, \xi < m$. Разность $(\xi - a)$ бесконечно мала по сравнению с $(m - \xi)$, тем более по сравнению с *m*.

Поскольку *a* отличается от ξ на бесконечно малую величину, то и $a \sim 1$.

Обозначим $f(x) = x^n$. Имеем $f(\xi) = b$. По теореме Лагранжа найдется такое $\eta \in \overline{P}$, $a < \eta < \xi$, что

$$f(\xi) - f(a) = f'(\eta)(\xi - a) = n(\eta)^{n-1}(\xi - a). \qquad (1)$$

Здесь $(\xi - a)$ есть бесконечно малая. Следовательно, η отличается от ξ на бесконечно малую, поэтому $\eta \sim 1$. Перепишем (1) так: $b - a^n = n\eta^{n-1}(\xi - a)$. Перейдем в этом соотношении к архимедовским классам $[b - a^n] = n[\eta^{n-1}][(\xi - a)]$.

Поскольку $[n\eta^{n-1}] = [1]$, то $[b - a^n] = [(\xi - a)]$. Отсюда находим $(b - a^n) \sim (\xi - a)$.

Но это отношение ложно, так как $(b - a^n) \in P$, в то время как $(\xi - a)$ не является архимедовски эквивалентным никакому элементу поля *P*. Итак, предположение $\xi \notin P$ ведет к противоречию. Теорема доказана.

Теорема 3. Пусть *K* – архимедовски замкнутое упорядоченное поле, $a \in K$. Тогда

$$\forall z \in [a^n] \exists y \in [a](y^n = z).$$

Иначе: если хотя бы для одного элемента архимедовского класса *a*-замкнутого поля существует корень степени *n*, то и для всех элементов этого класса справедливо то же самое.

Доказательство. Пусть в условиях теоремы $z \in [a^n]$. Тогда $za^{-n} \sim 1$. По теореме 2 существует $b \in K$, такое что $b^n = za^{-n}$. Отсюда $z = (ab)^n$.

Следствие 1. Пусть группа *G* архимедовских классов архимедовски замкнутого поля *P* делима. Тогда уравнение $x^n = a$ разрешимо в *P* для всех $a \ge 0$ и всех натуральных *n.*

Доказательство. В самом деле, пусть g_0 есть архимедов класс, содержащий элемент *a.* Итак, $a \in g_0, g_0 \in G$. Так как *G* делима, то найдется $g_1 \in G$, такое что $g_1^n = g_0$. Пусть $a_1 \in g_1$. Тогда $a_1^n \in g_0$. По теореме 2 отображение $f(x) = x^n$ есть биекция g_1 на g_0. Следовательно, найдется такое $b \in g_1$, что $b_1^n = a$.

Лемма 2. Если G есть архимедовская группа архимедовски замкнутого поля K, то существует представляющая группа $H \subset K$ группы G [7].

Иначе, существует подгруппа H мультипликативной группы поля K, такая что в каждый класс архимедовской эквивалентности поля K попадает один и только один элемент из H.

Теорема 4. Пусть P – архимедовски замкнутое поле, $K \subset P$, $\overline{P}$ – вещественное замыкание P. Если (A,B) – симметричное алгебраическое сечение в K, $f(x) \in K[x]$, где deg $f(x)$=deg (A,B), $f(x)$ меняет знак на (A,B), $\xi \in \overline{P}$, $f(\xi) = 0$, $A < \xi < B$, то $\xi \in P$.

Доказательство. В условиях теоремы многочлен $f'(x)$ и все его производные не меняют знака на сечении (A,B). По теореме 7 из [2] существуют такие $a_0 \in A, b_0 \in B$, что в каждом упорядоченном расширении F поля K все значения $f'(x)$ архимедовски эквивалентны при $x \in [a_0, b_0]_F$. Имеем $K \subset P \subset \overline{P}$.

Предположим, что в условиях теоремы $\xi \notin P$. Так как $\xi \in \overline{P}$, то ξ индуцирует в P некоторое сечение (A_1, B_1), где $A_1 \supset A, B_1 \supset B$. В силу архимедовской замкнутости P это сечение несимметрично. Пусть, например, берег A – короткий. Убедимся, что $\exists a \in A_1, A < a < B$. Допустим, что такого a не существует. Тогда A конфинально A_1. Легко видеть, что тогда берег A_1 – длинный. В самом деле, пусть $a_1 \in A_1$. Найдется $a_2 \in A, a_2 > a_1$. Поскольку (A,B) – симметричное сечение в K, то берега A, B – длинные. Поэтому найдется такое $a_3 \in A$, что $a_3 + (a_3 - a_2) \in B$. Так как B_1 $B \subset B_1$, то $a_3 + (a_3 - a_2) \in B_1$. Наконец, $a_3 + (a_3 - a_2) < a_3 + (a_3 - a_1)$, значит, $a_3 + (a_3 - a_1) \in B_1$. Это и означает, что, по определению, берег A_1 – длинный – противоречие с предположением, что берег A – короткий.

Итак, $\exists a \in A_1, A < a < B$. Выберем в A_1 точку a', близкую к B_1 и такую, что $a < a'$. Теперь $A < a' < B$. По свойству несимметричного сечения, $(\xi - a')$ не эквивалентно никакому элементу из P.

Воспользуемся формулой Лагранжа, справедливой для многочленов в вещественно замкнутом поле $\overline{P}$:

$$f(a') = f(a') - f(\xi) = f'(\eta)(a' - \xi), \qquad (2)$$

где $\eta \in (a', \xi), \eta \in \overline{P}$, следовательно, $\eta \in [a', b']_{\overline{P}}$. Поэтому $f'(\eta) \sim f'(a')$. Из (2) следует

$$f(a') \sim f'(a')(a' - \xi), \ (a' - \xi) \sim f(a')(f'(a'))^{-1}.$$

Последнее соотношение неверно, так как элемент $f(a')(f'(a'))^{-1} \in P$, в то время как элемент $(a' - \xi)$ по построению не эквивалентен никакому элементу из P. Теорема доказана.

Теорема 5. Если поле P архимедовски замкнуто, то поле вещественных чисел $\Re$ вкладывается в P с сохранением порядка.

Доказательство. Пусть Q есть простое подполе P. Обозначим через X множество тех подполей поля P, которые являются a-расширениями поля Q. Множество X частично упорядочено по включению. Пусть C есть цепь в X. Тогда $K_0 = \bigcup\limits_{K \in C} K$ есть верхняя граница множества C. Следовательно, X удовлетворяет условию леммы Цорна, поэтому в X существует максимальный элемент K^*.

Убедимся, что K^* упорядоченно изоморфно полю $\Re$. Прежде всего, в K^* нет симметричных сечений. Предположим, что, напротив, (A,B) – симметричное сечение в K^*.

a) Пусть, сначала, (A,B) – трансцендентное сечение. Тогда, по лемме 1, существует $a \in P, A < a < B$. Поле $K^*(a)$ есть архимедовское расширение поля K^*, следовательно, оно есть архимедовское расширение поля Q. Итак, $K^*(a) \in X$, $K^*(a)$ есть собственное расширение поля K^*. Но это противоречит максимальности K^* в X.

b) Пусть теперь (A,B) – алгебраическое сечение степени n. По определению степени алгебраического сечения, существует такой многочлен $f(x) \in K^*[x]$, что $f(x)$ меняет знак на сечении (A,B), и степень $f(x)$ равна n. Тогда существует $\xi \in \overline{K^*}$, такое что

$$f(\xi) = 0, A < \xi < B.$$

По теореме 4 $\xi \in P$. Теперь $K^*(a)$ есть собственное a-расширение поля K^* – снова противоречие с максимальностью K^* в X.

Итак, в K^* нет несимметричных сечений. В силу теоремы 01 это поле архимедовски замкнуто. В то же время K^* изоморфно некоторому подполю R_1 поля вещественных чисел $\Re$, поскольку K^* архимедово [1]. Таким образом, R_1 есть архимедовски замкнутое подполе поля $\Re$. Отсюда следует, что $R_1 = \Re$. В самом деле, если бы существовал $x_0 \in \Re \setminus R_1$, то x_0 производил бы симметричное сечение в R_1, что невозможно из-за архимедовской замкнутости R_1. Итак, $R_1 = \Re$, и поле K^* изоморфно $\Re$, что и требовалось.

Архимедовские замыкания

Теорема 6. Пусть P – архимедовски замкнутое поле с группой архимедовских классов G. Тогда для вещественной замкнутости поля P необходимо и достаточно, чтобы группа G была делима.

Доказательство. 1) Необходимость. Если поле P вещественно замкнуто, то уравнение $x^n = a$ разрешимо в P для всех натуральных n и всех $a \in P, a \geq 0$ [8], следовательно, группа G делима.

2) Достаточность. Пусть группа G делима. Расширим P до вещественного замыкания $\overline{P}$. Убедимся, что $P=\overline{P}$. Предположим, что, напротив, существует $\xi \in \overline{P} \backslash P$. Так как в P нет симметричных сечений, то ξ производит в P несимметричное сечение. По следствию 2.9 из [2], в поле $P(\xi)$ существуют элементы, архимедовски не эквивалентные никакому элементу из P. Пусть c – один из таких элементов. Элемент c алгебраичен над P. По лемме 2.1 из [2] существует такое натуральное n и такой $b \in P, b>0$, что $c^n \sim b$. По следствию 1, уравнение $x^n = b$ разрешимо в P.

Иными словами, $b^{\frac{1}{n}} \in P$. Но c архимедовски эквивалентно $b^{\frac{1}{n}}$. Итак, в P существует элемент, архимедовски эквивалентный элементу c, что противоречит выбору c.

Таким образом, $P=\overline{P}$, следовательно, P вещественно замкнуто.

Теорема 7. Пусть K, P есть a-замкнутые поля, ψ есть изотонное вложение K в P. Если для каждого $x \in P$ существует $y \in K$, такое что $\psi(y)$ архимедовски эквивалентно x, то ψ есть изотонный изоморфизм K на P.

Доказательство. Пусть, в условиях теоремы, $\psi(K) \neq P$. Тогда найдётся $x_0 \in \psi(K) \setminus P$. Обозначим сечение, производимое в K элементом x_0, через (A,B). Поскольку каждый элемент из P архимедовски эквивалентен некоторому элементу из K, то сечение (A,B) симметричное (см. следствие 2.9 в [2]). С другой стороны, поле K архимедовски полное, следовательно, в нем нет симметричных сечений. Полученное противоречие доказывает, что $\psi(K)=P$, что и требовалось.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Pickert G.* Einfürungin die Höere Algebra. Göttingen, 1951.
2. *Пестов Г.Г.* К теории сечений в упорядоченных полях // Сибирский математический журнал. 2001. Т. 42, № 6. С. 1350–1360.
3. *Hahn H.* Über die nichtarchimedischen Grössensysteme // S.-B. Akad. WISS. Wien. 1907. Vol. 11a, № 116. P. 601–655.
4. *Conrad P.* Archimedean Extensions of Lattice-Ordered Groups // J. Indian Math. Soc. 1966. Vol. 30. P. 199–221.
5. *Larnel M.* Lattice-ordered Groups. Marcel Dekker, Inc., 1994.
6. *Пестов Г.Г.* Теоремы о замыканиях линейно упорядоченных полей // Вестник Томского государственного университета: Бюл. операт. науч. информ. Упорядоченные поля и группы. 2004. № 21. С. 34–38.
7. *Забарина А.И., Пестов Г.Г.* О критерии циклической упорядочиваемости группы. Упорядоченные множества и решётки // Межвузовский научный сборник. Саратов: Изд-во Сарат. ун-та, 1986. Вып. 9. С. 19–24.
8. *Бурбаки Н.* Алгебра. Многочлены и поля. Упорядоченные группы. М.: Наука, 1965.

Статья поступила в редакцию журнала 29 июня 2006 г., принята к печати 10 июля 2006 г.