ИЗВЕСТИЯ ВЫСШИХ УЧЕБНЫХ ЗАВЕДЕНИЙ
Т. 56, № 10/2 ФИЗИКА 2013

УДК 521.3

В.А. ШЕФЕР

НОВЫЙ МЕТОД ОПРЕДЕЛЕНИЯ ПРОМЕЖУТОЧНОЙ ОРБИТЫ ПО ИЗМЕРЕНИЯМ ДАЛЬНОСТИ И СКОРОСТИ ЕЕ ИЗМЕНЕНИЯ В ТРИ МОМЕНТА ВРЕМЕНИ[1]

Предлагается новый метод вычисления предварительной орбиты малого небесного тела по трем парам наблюдений дальности и скорости изменения дальности. Метод основан на использовании построенной ранее автором сверхоскулирующей промежуточной орбиты с касанием четвертого порядка, учитывающей основную часть возмущений в движении исследуемого тела. Методическая погрешность определения орбиты предлагаемым методом на три порядка меньше, чем соответствующая ошибка традиционного подхода, основанного на построении невозмущенной кеплеровской орбиты. На примерах нахождения орбит ИСЗ проведено сравнение результатов применения нового метода и процедуры, реализующей традиционный подход. Сравнение показывает, что предложенный метод является высокоэффективным средством изучения возмущенного движения.

Ключевые слова: *определение предварительной орбиты, фиктивный притягивающий центр с переменной массой, задача Гюльдена–Мещерского, промежуточная возмущенная орбита.*

Введение

Современные радиотехнические и лазерные средства наблюдений позволяют измерять расстояние между точкой наблюдения и небесным телом (дальность) и радиальную скорость (скорость изменения дальности) с точностью, которая на несколько порядков выше, чем точность оптических наблюдений. Использование таких высокоточных наблюдений в традиционных методах определения предварительной орбиты, основанных на решении невозмущенной задачи двух тел [1, 2], может привести к тому, что точность полученной орбиты окажется значительно хуже точности опорных наблюдений. Излагается новый метод нахождения промежуточной возмущенной орбиты по трем вышеуказанным наборам наблюдательных данных и соответствующим им моментам времени. Возмущающие эффекты учитываются с помощью сверхоскулирующей промежуточной орбиты с касанием четвертого порядка, предложенной в [3]. В данной работе развивается подход, изложенный ранее [4].

Описание метода

Рассмотрим движение малого тела (астероида, кометы, крупного метеороида, космического аппарата) под действием ньютоновского притяжения системы точечных масс (Солнца, больших планет, спутников планет) и других сил произвольной природы. Для изучения движения малого тела построим трехосную прямоугольную невращающуюся систему координат с началом, совмещенным с одной из притягивающих масс (основное тело). Уравнения движения в этой системе координат запишем в виде

$$\ddot{\boldsymbol{x}} = -\frac{K}{r^3}\boldsymbol{x} + \boldsymbol{F} \equiv \boldsymbol{G}\,, \tag{1}$$

где $\boldsymbol{x}$ – вектор положения малого тела; $r = |\boldsymbol{x}|$; $K = k^2 M = \text{const}$ (k^2 – гравитационная постоянная, M – масса основного тела); $\boldsymbol{F}$ – вектор возмущающего ускорения, точка означает дифференцирование по времени t.

Пусть мы имеем для малого тела в каждый из трех моментов времени t_1^{o}, t_2^{o}, t_3^{o} ($t_1^{\text{o}} < t_2^{\text{o}} < t_3^{\text{o}}$) измеренные значения дальности ρ_i и скорости изменения дальности $\dot{\rho}_i$ ($i = 1, 2, 3$).

Вектор положения $\boldsymbol{x}_i$ малого тела относительно основного тела, определенный в момент $t_i = t_i^{\text{o}} - \rho_i / c$ начала движения сигнала от малого тела к наблюдателю (c – скорость распространения сигнала), представим в виде

[1] Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ в рамках научного проекта № 12-02-00220-а.

$$\boldsymbol{x}_i = \rho_i \boldsymbol{L}_i - \boldsymbol{S}_i\,; \qquad i = 1, 2, 3, \tag{2}$$

где $\boldsymbol{S}_i$ – вектор положения основного тела относительно точки наблюдения, определенный в момент наблюдения t_i^{o}; $\boldsymbol{L}_i$ – единичный вектор, направленный от наблюдателя к малому телу. Дифференцируя (2) по *t*, получим

$$\dot{\boldsymbol{x}}_i = \dot{\rho}_i \boldsymbol{L}_i + \rho_i \dot{\boldsymbol{L}}_i - \dot{\boldsymbol{S}}_i\,; \qquad i = 1, 2, 3. \tag{3}$$

Неизвестными в (2) и (3) являются векторы $\boldsymbol{x}_i$, $\dot{\boldsymbol{x}}_i$, $\boldsymbol{L}_i$ и $\dot{\boldsymbol{L}}_i$. Исключая из (2) и (3) $\boldsymbol{L}_i$ и $\dot{\boldsymbol{L}}_i$, получим

$$(\boldsymbol{x}_i + \boldsymbol{S}_i)^2 = \rho_i^2\,; \tag{4}$$

$$(\boldsymbol{x}_i + \boldsymbol{S}_i)\cdot(\dot{\boldsymbol{x}}_i + \dot{\boldsymbol{S}}_i) = \rho_i \dot{\rho}_i\,; \qquad i = 1, 2, 3. \tag{5}$$

Примем за начальный момент времени средний момент $t = t_2$ и предположим, что нам известны в этот момент в первом приближении векторы положения и скорости малого тела

$$\boldsymbol{x}(t_2) = \boldsymbol{x}_2\,, \qquad \dot{\boldsymbol{x}}(t_2) = \dot{\boldsymbol{x}}_2\,.$$

Введем фиктивный притягивающий центр с гравитационным параметром μ и расположим его в точке, определяемой вектором

$$\boldsymbol{Z} = \boldsymbol{Z}_2 + \dot{\boldsymbol{Z}}_2(t - t_2) + \frac{1}{2}\ddot{\boldsymbol{Z}}_2(t - t_2)^2\,, \tag{6}$$

где $\boldsymbol{Z}_2$, $\dot{\boldsymbol{Z}}_2$ и $\ddot{\boldsymbol{Z}}_2$ – начальные векторы положения, скорости и ускорения фиктивного центра соответственно. Тогда уравнения движения малого тела относительно фиктивного центра с учетом (1) примут вид

$$\ddot{\boldsymbol{q}} = \boldsymbol{G} - \ddot{\boldsymbol{Z}} \equiv \widehat{\boldsymbol{G}}\,, \tag{7}$$

где $\boldsymbol{q} = \boldsymbol{x} - \boldsymbol{Z}$, $\ddot{\boldsymbol{Z}} = \ddot{\boldsymbol{Z}}_2$.

В той же системе координат, в которой рассматривается реальное движение (7), зададим промежуточное движение уравнениями

$$\ddot{\boldsymbol{q}}^* = -\frac{\mu}{R^{*3}}\boldsymbol{q}^*\,, \qquad R^* = \left|\boldsymbol{q}^*\right| \tag{8}$$

с начальными условиями

$$\boldsymbol{q}^*(t_2) = \boldsymbol{q}_2^*\,, \qquad \dot{\boldsymbol{q}}^*(t_2) = \dot{\boldsymbol{q}}_2^*\,.$$

Предположим, что μ есть функция, непрерывно изменяющаяся со временем согласно формуле [5–7]

$$\mu = \frac{\mu_2^2}{\mu_2 - \dot{\mu}_2(t - t_2)}\,, \qquad \mu_2 \neq 0\,. \tag{9}$$

Тогда уравнения (8) принимают форму уравнений задачи Гюльдена – Мещерского [8, 9] с гравитационным параметром μ, изменяющимся в соответствии с первым законом Мещерского.

Потребуем выполнения следующих условий:

$$\boldsymbol{q}_2^* = \boldsymbol{q}_2 = \boldsymbol{x}_2 - \boldsymbol{Z}_2\,, \qquad \dot{\boldsymbol{q}}_2^* = \dot{\boldsymbol{q}}_2 = \dot{\boldsymbol{x}}_2 - \dot{\boldsymbol{Z}}_2\,; \tag{10}$$

$$\ddot{\boldsymbol{q}}_2^* = \ddot{\boldsymbol{q}}_2 = \boldsymbol{G}_2 - \ddot{\boldsymbol{Z}}_2 \equiv \widehat{\boldsymbol{G}}_2\,, \qquad \boldsymbol{q}_2^{*(3)} = \boldsymbol{q}_2^{(3)} = \dot{\boldsymbol{G}}_2\,; \tag{11}$$

$$\boldsymbol{q}_2^{*(4)} = \boldsymbol{q}_2^{(4)} = \ddot{\boldsymbol{G}}_2\,, \qquad \ddot{\boldsymbol{Z}}_2 \perp \dot{\boldsymbol{G}}_2\,, \qquad \ddot{\boldsymbol{Z}}_2 \perp \ddot{\boldsymbol{G}}_2\,. \tag{12}$$

Индексы в скобках обозначают порядок производной по *t*.

Из (11) и (12) с учетом (8) будем иметь [3]

$$\mu_2 = \lambda R_2^* \widehat{\boldsymbol{G}}_2^2, \qquad \dot{\mu}_2 = (3b - \beta)\mu_2; \tag{13}$$

$$\boldsymbol{q}_2^* = -\lambda \widehat{\boldsymbol{G}}_2, \qquad \dot{\boldsymbol{q}}_2^* = \lambda\left(\frac{1}{2}\beta \widehat{\boldsymbol{G}}_2 - \dot{\boldsymbol{G}}_2\right); \tag{14}$$

$$\widehat{\boldsymbol{G}}_2 = \frac{1}{d - b\beta}\left(\ddot{\boldsymbol{G}}_2 - \beta \dot{\boldsymbol{G}}_2\right); \tag{15}$$

$$\frac{1}{\lambda} = \frac{3}{2}a - \frac{15}{2}b^2 + \frac{1}{2}d + 4b\beta - \frac{3}{4}\beta^2; \tag{16}$$

$$a = \frac{\boldsymbol{U}_2^2}{\boldsymbol{V}_2^2}\dot{\boldsymbol{G}}_2^2, \qquad b = \frac{\boldsymbol{U}_2^2}{\boldsymbol{V}_2^2}(\boldsymbol{G}_2 \cdot \dot{\boldsymbol{G}}_2); \tag{17}$$

$$d = \frac{\boldsymbol{U}_2^2}{\boldsymbol{V}_2^2}(\boldsymbol{G}_2 \cdot \ddot{\boldsymbol{G}}_2), \qquad \beta = \frac{(\boldsymbol{V}_2 \cdot \ddot{\boldsymbol{G}}_2)}{(\boldsymbol{V}_2 \cdot \dot{\boldsymbol{G}}_2)}, \tag{18}$$

$$\boldsymbol{V}_2 = (\boldsymbol{G}_2 \cdot \dot{\boldsymbol{G}}_2)\ddot{\boldsymbol{G}}_2 - (\boldsymbol{G}_2 \cdot \ddot{\boldsymbol{G}}_2)\dot{\boldsymbol{G}}_2,$$

$$\boldsymbol{U}_2^2 = \dot{\boldsymbol{G}}_2^2 \ddot{\boldsymbol{G}}_2^2 - (\dot{\boldsymbol{G}}_2 \cdot \ddot{\boldsymbol{G}}_2)^2, \qquad R_2^{*2} = \lambda^2 \widehat{\boldsymbol{G}}_2^2.$$

Предполагается, что $\boldsymbol{G}_2 \neq \boldsymbol{0}$, $\dot{\boldsymbol{G}}_2 \neq \boldsymbol{0}$, $\ddot{\boldsymbol{G}}_2 \neq \boldsymbol{0}$, $\boldsymbol{V}_2 \neq \boldsymbol{0}$, $\lambda \neq 0$.

С помощью вычисленных по формулам (17) и (18) величин a, b, d и β из (15) и (16) определяются вектор $\widehat{\boldsymbol{G}}_2$ и параметр λ. Затем, согласно (13) и (14), однозначно находятся скаляры μ_2, $\dot{\mu}_2$ и векторы $\boldsymbol{q}_2^*$, $\dot{\boldsymbol{q}}_2^*$, определяющие промежуточную орбиту. Из условий (10) и (11) получим векторы $\boldsymbol{Z}_2$, $\dot{\boldsymbol{Z}}_2$ и $\ddot{\boldsymbol{Z}}_2$, задающие положение фиктивного центра (6).

Используя преобразования координат и времени вида

$$\boldsymbol{u} = \frac{\mu}{\mu_2}\boldsymbol{q}^*, \qquad d\theta = \left(\frac{\mu}{\mu_2}\right)^2 dt, \tag{19}$$

сведем решение уравнений промежуточного движения (8) к решению системы уравнений:

$$\boldsymbol{u}'' = -\frac{\mu_2}{|\boldsymbol{u}|^3}\boldsymbol{u}, \qquad t' = \left[1 - \frac{\dot{\mu}_2}{\mu_2}(t - t_2)\right]^2, \tag{20}$$

где штрих означает дифференцирование по новой независимой переменной θ (фиктивное время).

Решение для промежуточной орбиты находится следующим образом. На заданный момент физического времени t определяется значение фиктивного времени θ по формуле

$$\theta = \frac{\mu}{\mu_2}(t - t_2). \tag{21}$$

Затем на найденный момент θ вычисляются векторы положения $\boldsymbol{u}$ и скорости $\boldsymbol{u}'$ малого тела на промежуточной орбите в параметрическом $\boldsymbol{u}$-пространстве по формулам задачи двух тел постоянной массы в соответствии с первым уравнением из (20):

$$\boldsymbol{u} = f\boldsymbol{u}_2 + g\boldsymbol{u}_2', \qquad \boldsymbol{u}' = f'\boldsymbol{u}_2 + g'\boldsymbol{u}_2'. \tag{22}$$

Функции f, g, f' и g' определяются с помощью известных выражений из [10]. Здесь используются следующие начальные условия, отнесенные к моменту $\theta = 0$:

$$\boldsymbol{u}_2 = \boldsymbol{q}_2^*, \qquad \boldsymbol{u}_2' = \frac{\dot{\mu}_2}{\mu_2}\boldsymbol{q}_2^* + \dot{\boldsymbol{q}}_2^*. \tag{23}$$

И, наконец, с помощью преобразований

$$\boldsymbol{q}^* = \frac{\mu_2}{\mu}\boldsymbol{u}, \qquad \dot{\boldsymbol{q}}^* = \frac{\mu}{\mu_2}\boldsymbol{u}' - \frac{\dot{\mu}_2}{\mu_2}\boldsymbol{u} \tag{24}$$

находятся соответственно векторы положения и скорости малого тела на промежуточной орбите относительно фиктивного центра в физическом пространстве в момент времени t. Векторы положения и скорости малого тела на промежуточной орбите в исходной системе координат определяются по формулам

$$\boldsymbol{x}(t) = \boldsymbol{Z}_2 + \dot{\boldsymbol{Z}}_2(t - t_2) + \frac{1}{2}\ddot{\boldsymbol{Z}}_2(t - t_2)^2 + \boldsymbol{q}^*(t); \tag{25}$$

$$\dot{\boldsymbol{x}}(t) = \dot{\boldsymbol{Z}}_2 + \ddot{\boldsymbol{Z}}_2(t - t_2) + \dot{\boldsymbol{q}}^*(t). \tag{26}$$

При $t = t_1$, t_3, согласно (25) и (26), получим

$$\boldsymbol{x}_j = \boldsymbol{Z}_2 + \dot{\boldsymbol{Z}}_2(t_j - t_2) + \frac{1}{2}\ddot{\boldsymbol{Z}}_2(t_j - t_2)^2 + \boldsymbol{q}_j^*, \qquad \dot{\boldsymbol{x}}_j = \dot{\boldsymbol{Z}}_2 + \ddot{\boldsymbol{Z}}_2(t_j - t_2) + \dot{\boldsymbol{q}}_j^*, \tag{27}$$

где с учетом (24)

$$\boldsymbol{q}_j^* = \frac{\mu_2}{\mu_j}\boldsymbol{u}_j, \qquad \dot{\boldsymbol{q}}_j^* = \frac{\mu_j}{\mu_2}\boldsymbol{u}_j' - \frac{\dot{\mu}_2}{\mu_2}\boldsymbol{u}_j; \qquad j = 1, 3. \tag{28}$$

Векторы положения и скорости малого тела в пространстве переменных $\boldsymbol{u}$ и соответствующие им моменты фиктивного времени при $t = t_1$, t_3 в силу (22) и (21) определяются формулами

$$\boldsymbol{u}_j = f_j\boldsymbol{u}_2 + g_j\boldsymbol{u}_2', \qquad \boldsymbol{u}_j' = f_j'\boldsymbol{u}_2 + g_j'\boldsymbol{u}_2', \tag{29}$$

$$\theta_j = \frac{\mu_j}{\mu_2}(t_j - t_2); \qquad j = 1, 3.$$

Входящие в (29) векторы $\boldsymbol{u}_2$ и $\boldsymbol{u}_2'$ представим, согласно (23) и (10), в виде

$$\boldsymbol{u}_2 = \boldsymbol{x}_2 - \boldsymbol{Z}_2, \qquad \boldsymbol{u}_2' = \frac{\dot{\mu}_2}{\mu_2}(\boldsymbol{x}_2 - \boldsymbol{Z}_2) + \dot{\boldsymbol{x}}_2 - \dot{\boldsymbol{Z}}_2. \tag{30}$$

Подставим выражения (27) с учетом (28)–(30) в (4) и (5). Тогда получим систему шести уравнений относительно шести неизвестных компонент векторов $\boldsymbol{x}_2$ и $\dot{\boldsymbol{x}}_2$. Решая эту систему с помощью подходящей итерационной процедуры с принятым первым приближением, можно уточнить значения векторов $\boldsymbol{x}_2$ и $\dot{\boldsymbol{x}}_2$. Процесс построения промежуточной орбиты по предложенному алгоритму повторяется до тех пор, пока не будет достигнута заданная точность вычислений.

Согласно [3], степень аппроксимации реального движения построенной промежуточной орбитой в окрестности опорной эпохи t_2 на три порядка выше, чем у кеплеровской орбиты, определенной традиционными методами.

Способы получения начальных оценок векторов $\boldsymbol{x}_2$ и $\dot{\boldsymbol{x}}_2$ можно найти в [1].

Численные примеры

Для краткости алгоритм, реализующий изложенный выше метод определения орбиты по измерениям дальности и скорости ее изменения в три момента времени, назовем Алгоритмом II. Исследование эффективности нового алгоритма проводилось в сравнении с вариантом этого же алгоритма, основанного на построении невозмущенной кеплеровской орбиты (при условии $\boldsymbol{F} = \boldsymbol{0}$). Назовем его Алгоритмом I. Указанные алгоритмы были запрограммированы на языке ФОРТРАН-95.

В качестве объектов, на примерах определения орбит которых тестировались программы, были выбраны: 1) гипотетический ИСЗ с высокоэксцентрической орбитой (спутник с высокоэксцентрической орбитой); 2) ИСЗ, находящийся на геостационарной орбите (геостационарный спутник); 3) ИСЗ навигационной системы NAVSTAR GPS (GPS-спутник); 4) ИСЗ с орбитой типа «Лагеос» (спутник типа «Лагеос»). Оскулирующие элементы орбит спутников на условную эпоху $t_0 = 0$ приведены в работе [4]. Вычисления выполнялись с машинной точностью $\varepsilon = 2,22 \cdot 10^{-16}$.

Движение ИСЗ рассматривается в геоцентрической прямоугольной экваториальной системе координат. На ИСЗ действуют возмущающие силы, вызванные несферичностью Земли и притяжением Луны. Модель движения подробно описана в [4].

Мы поставили задачу оценить погрешности алгоритмов в зависимости от длины опорного интервала времени. Для решения этой задачи использовались номинальные траектории выбранных ИСЗ. Уравнения движения интегрировались классическим методом Рунге – Кутты четвертого порядка. Положения и скорости на номинальных траекториях считаются точными. На номинальных траекториях выбирались совокупности геоцентрических положений $\boldsymbol{x}_1$, $\boldsymbol{x}_2$, $\boldsymbol{x}_3$ и скоростей $\dot{\boldsymbol{x}}_1$, $\dot{\boldsymbol{x}}_2$, $\dot{\boldsymbol{x}}_3$ в эпохи t_1, t_2 и t_3 $(t_1 < t_2 < t_3)$. Затем вычислялись топоцентрические дальности ρ_i, скорости их изменения $\dot{\rho}_i$ и моменты времени t_i^{o}, соответствующие геоцентрическим положениям $\boldsymbol{x}_i$ и скоростям $\dot{\boldsymbol{x}}_i$ на номинальной траектории в выбранные моменты времени t_i $(i = 1,\ 2,\ 3)$. Полученные таким образом величины ρ_i, $\dot{\rho}_i$ и t_i^{o} играли в нашем эксперименте роль наблюдательных данных.

В качестве станций наблюдения взяты обсерватории «Зеленчукская» (Специальная астрофизическая обсерватория) и «Симеиз» (Крымская астрофизическая обсерватория).

Второе наблюдение моделировалось на неизменный в каждом варианте вычислений момент времени $t_2 = 220$ мин. Первое и третье наблюдения выбирались соответствующими положениям спутника через равные интервалы времени. Наблюдения строились с учетом прямой видимости спутника из места наблюдения.

Решение системы уравнений (4) и (5) относительно неизвестных векторов положения и скорости на момент t_2 выполнялось методом Ньютона–Рафсона. Необходимые для реализации вычислительной процедуры значения частных производных находились методом конечных разностей по формуле второго порядка. Точность, которая определяла условие сходимости итераций для компонент вектора положения, выбрана равной 10^{-8} км, а для компонент вектора скорости – 10^{-12} км/с.

Результаты вычислений приводятся в табл. 1–4, где приняты следующие обозначения: $\rho_i = \left|\boldsymbol{x}_i + \boldsymbol{S}_i\right|$ – i-е топоцентрическое расстояние; $\Delta r = \left|\boldsymbol{x}_2^* - \boldsymbol{x}_2\right|$ и $\Delta v = \left|\dot{\boldsymbol{x}}_2^* - \dot{\boldsymbol{x}}_2\right|$ – ошибки в векторах положения и скорости, соответствующие эпохе t_2; $\boldsymbol{S}_i$ – вектор положения центра масс Земли относительно места наблюдения в момент t_i^{o}; $\boldsymbol{x}_2$, $\dot{\boldsymbol{x}}_2$ – векторы положения и скорости на номинальной траектории в момент t_2; $\boldsymbol{x}_2^*$, $\dot{\boldsymbol{x}}_2^*$ – искомые векторы положения и скорости, определенные в момент t_2 с помощью сравниваемых алгоритмов вычисления орбит. Длина опорного интервала $t_3 - t_1$ уменьшалась до тех пор, пока ограничение на порядки чисел в компьютере не приводило к заметному ухудшению точности вычислений.

В табл. 1 представлены погрешности вычислений параметров движения спутника с высокоэксцентрической орбитой. Из таблицы видно, что для приведенных в ней опорных интервалов времени точности вычисления положения и скорости спутника предложенным нами методом (Алгоритм II) приблизительно на 2–3 порядка выше в сравнении с соответствующими оценками, полученными методом, не учитывающим возмущения (Алгоритм I). Наилучшие точности вычисления положения при использовании Алгоритма II достигаются для интервалов 0,5–1 мин и составляют 1–3 см.

Оценки точности определения геостационарной орбиты даны в табл. 2. Для опорных интервалов времени 1–8 мин применение Алгоритма II по сравнению с Алгоритмом I также позволяет уменьшить ошибки вычисления орбиты на 2–3 порядка. С дальнейшим увеличением интервала времени различия между точностями вычислений для сравниваемых алгоритмов уменьшаются.

Наибольшие точности определения положения спутника новым методом равны 3–4 см. Они получены для опорных интервалов времени 1–2 мин.

Таблица 1

Сравнение эффективности алгоритмов на примере определения высокоэксцентрической орбиты (ρ_2 = 53276,28 км)

$t_3 - t_1$, мин	ρ_1, км	ρ_3, км	Алгоритм I		Алгоритм II	
			Δr, км	Δv, км/с	Δr, км	Δv, км/с
0,5	53237,56	53709,25	$9,2\cdot10^{-2}$	$4,6\cdot10^{-4}$	$2,6\cdot10^{-5}$	$8,4\cdot10^{-7}$
1	53181,79	53749,97	$7,5\cdot10^{-2}$	$4,7\cdot10^{-4}$	$1,0\cdot10^{-5}$	$9,6\cdot10^{-7}$
2	53087,24	53844,95	$8,2\cdot10^{-2}$	$4,6\cdot10^{-4}$	$8,6\cdot10^{-5}$	$3,4\cdot10^{-6}$
4	52897,93	54034,72	$2,7\cdot10^{-1}$	$4,5\cdot10^{-4}$	$5,2\cdot10^{-4}$	$3,6\cdot10^{-6}$
8	52518,51	54413,49	$7,5\cdot10^{-1}$	$4,3\cdot10^{-4}$	$3,1\cdot10^{-3}$	$3,7\cdot10^{-6}$
10	52328,40	54602,47	$9,5\cdot10^{-1}$	$4,2\cdot10^{-4}$	$4,4\cdot10^{-3}$	$3,8\cdot10^{-6}$
20	51373,67	55543,55	1,23	$7,7\cdot10^{-3}$	$3,9\cdot10^{-2}$	$7,6\cdot10^{-6}$
40	49442,88	57406,88	78,44	$1,8\cdot10^{-2}$	$4,0\cdot10^{-1}$	$9,0\cdot10^{-6}$
80	45489,79	61062,41	434,95	$5,4\cdot10^{-1}$	3,87	$4,6\cdot10^{-2}$

Таблица 2

Сравнение эффективности алгоритмов на примере определения орбиты геостационарного спутника (ρ_2 = 38637,15 км)

$t_3 - t_1$, мин	ρ_1, км	ρ_3, км	Алгоритм I		Алгоритм II	
			Δr, км	Δv, км/с	Δr, км	Δv, км/с
1	38637,24	38973,32	$5,8\cdot10^{-2}$	$2,5\cdot10^{-5}$	$2,9\cdot10^{-5}$	$3,3\cdot10^{-6}$
2	38637,22	38973,20	$6,4\cdot10^{-2}$	$2,5\cdot10^{-5}$	$4,3\cdot10^{-5}$	$3,6\cdot10^{-6}$
4	38637,15	38973,03	$6,3\cdot10^{-2}$	$2,5\cdot10^{-5}$	$3,0\cdot10^{-4}$	$3,8\cdot10^{-6}$
8	38637,45	38972,90	$6,4\cdot10^{-2}$	$2,5\cdot10^{-5}$	$9,2\cdot10^{-4}$	$3,9\cdot10^{-6}$
10	38637,53	38972,84	$7,9\cdot10^{-2}$	$2,6\cdot10^{-5}$	$1,4\cdot10^{-3}$	$4,0\cdot10^{-6}$
20	38637,96	38972,55	$9,3\cdot10^{-2}$	$3,2\cdot10^{-5}$	$1,2\cdot10^{-2}$	$3,7\cdot10^{-6}$
40	38638,97	38972,13	$2,5\cdot10^{-1}$	$3,8\cdot10^{-5}$	$1,0\cdot10^{-1}$	$4,3\cdot10^{-6}$
80	38641,52	38971,82	1,32	$1,6\cdot10^{-4}$	$8,9\cdot10^{-1}$	$2,6\cdot10^{-5}$

В табл. 3 приводятся ошибки определения орбиты спутника GPS. Из их сравнения следует, что для опорных интервалов времени, не превышающих 8 мин, точности вычисления положения спутника с помощью Алгоритма II на 3–4 порядка выше. На интервалах времени 0,5–2 мин погрешности в положении, определенные новым методом, составляют 1–3 см.

Результаты оценки точности вычисления орбиты ИСЗ типа «Лагеос» даны в табл. 4. Ошибки в положении спутника на опорных интервалах времени до 4 мин для Алгоритма II на 2–3 порядка меньше, чем в случае применения Алгоритма I. Как и в предыдущих примерах, с увеличением опорного интервала различия в точностных оценках, полученных с помощью сравниваемых алгоритмов, уменьшаются. Максимальные точности предложенного метода, равные 30–50 см, достигаются для опорных интервалов 1–2 мин.

Таблица 3

Сравнение эффективности алгоритмов на примере определения орбиты GPS-спутника (ρ_2 = 29216,83 км)

$t_3 - t_1$, мин	ρ_1, км	ρ_3, км	Алгоритм I		Алгоритм II	
			Δr, км	Δv, км/с	Δr, км	Δv, км/с
0,5	29210,13	28701,23	$7,9\cdot10^{-2}$	$2,1\cdot10^{-4}$	$9,2\cdot10^{-6}$	$6,2\cdot10^{-6}$
1	29201,42	28709,87	$8,7\cdot10^{-2}$	$2,2\cdot10^{-4}$	$1,2\cdot10^{-5}$	$6,3\cdot10^{-6}$
2	29185,99	28726,15	$9,1\cdot10^{-2}$	$2,4\cdot10^{-4}$	$3,4\cdot10^{-5}$	$6,4\cdot10^{-6}$
4	29155,09	28758,68	$5,3\cdot10^{-1}$	$1,4\cdot10^{-4}$	$8,4\cdot10^{-5}$	$6,4\cdot10^{-6}$
8	29093,09	28823,59	$3,7\cdot10^{-1}$	$1,7\cdot10^{-4}$	$6,6\cdot10^{-4}$	$7,3\cdot10^{-6}$
10	29061,99	28855,97	$3,6\cdot10^{-1}$	$1,2\cdot10^{-4}$	$3,8\cdot10^{-3}$	$7,6\cdot10^{-6}$
20	28905,55	29017,05	5,43	$4,3\cdot10^{-2}$	$1,8\cdot10^{-2}$	$7,9\cdot10^{-6}$
40	28588,15	29334,79	76,43	$6,4\cdot10^{-2}$	$1,6\cdot10^{-1}$	$2,1\cdot10^{-5}$

Таблица 4

Сравнение эффективности алгоритмов на примере определения орбиты спутника типа «Лагеос» (ρ_2 = 14506,81 км)

$t_3 - t_1$, мин	ρ_1, км	ρ_3, км	Алгоритм I		Алгоритм II	
			Δr, км	Δv, км/с	Δr, км	Δv, км/с
1	14572,81	14931,18	$4,6\cdot10^{-1}$	$1,3\cdot10^{-3}$	$2,7\cdot10^{-4}$	$3,2\cdot10^{-7}$
2	14638,41	14867,57	$3,5\cdot10^{-2}$	$1,2\cdot10^{-3}$	$4,6\cdot10^{-4}$	$2,8\cdot10^{-7}$
4	14768,35	14739,07	$3,7\cdot10^{-2}$	$6,2\cdot10^{-3}$	$3,7\cdot10^{-3}$	$4,7\cdot10^{-7}$
8	15023,09	14477,05	$8,4\cdot10^{-1}$	$2,9\cdot10^{-3}$	$2,7\cdot10^{-2}$	$5,4\cdot10^{-7}$
10	15147,83	14343,60	3,34	$1,6\cdot10^{-2}$	$2,3\cdot10^{-1}$	$7,5\cdot10^{-6}$
20	15743,84	13653,61	109,67	$8,9\cdot10^{-2}$	1,98	$1,1\cdot10^{-4}$

Заключение

В данной работе предложен новый метод построения предварительной орбиты малого небесного тела по измеренным в три момента времени дальностям и скоростям их изменения.

Рассмотренные численные примеры дают основание для следующих выводов.

Предложенный метод определения промежуточной возмущенной орбиты позволяет существенно повысить точность вычисления первоначальных орбит ИСЗ по сравнению с алгоритмом, основанным на нахождении невозмущенной кеплеровской орбиты. Чем короче орбитальная дуга, задаваемая крайними моментами времени, тем выше точность аппроксимации реального движения нашей орбитой. Это чрезвычайно важное преимущество нового метода перед алгоритмом традиционного подхода.

Новый метод наиболее выгодно применять:

– для высокоэксцентрической орбиты: с опорными интервалами времени 0,5–4 мин, где точности вычисления положения спутника составляют приблизительно 1–50 см;

– для геостационарной орбиты: с опорными интервалами времени 1–8 мин, в пределах которых погрешности определения положения спутника равны 3–90 см;

– для орбиты GPS-спутника: с опорными интервалами времени 0,5–8 мин, где положения спутника определяются с ошибками в 1–70 см;

– для орбиты спутника типа «Лагеос»: с опорными интервалами времени 1–2 мин, на которых точности нахождения положения спутника равны примерно 30–50 см.

Разработанный метод является высокоэффективным средством исследования, позволяющим получать надежные параметры возмущенного движения уже на этапе вычисления предварительной орбиты.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Baker R.M.L. and Makemson M.W. An Introduction to Astrodynamics. – N.Y.: Academic Press, 1967. – 439 p.
2. Roy A.E. Orbital Motion. – Bristol: IOP Publishing, 2005. – 526 p.
3. Шефер В.А. // Письма в Астрон. журн. – 2006. – Т. 32. – С. 937–951.
4. Шефер В.А. // Изв. вузов. Физика. – 2012. – Т. 55. – № 10/2. – С. 11–18.
5. Шефер В.А. // Астрон. журн. – 1998. – Т. 75. – С. 945–953.
6. Шефер В.А. // Астрон. журн. – 1998. – Т. 75. – С. 954–960.
7. Shefer V.A. // Celest. Mech. and Dyn. Astr. – 2002. – V. 82. – P. 19–59.
8. Gylden H. // Astron. Nachr. – 1884. – Bd. 109. – S. 1–6.
9. Mestschersky I.W. // Astron. Nachr. – 1893. – Bd. 132. – S. 129–130.
10. Escobal P.R. Methods of orbit determination. – N.Y.; London; Sydney: John Wiley and Sons, 1965. – 463 p.

Национальный исследовательский
Томский государственный университет, г. Томск, Россия
Томский государственный архитектурно-строительный университет,
г. Томск, Россия
E-mail: shefer@niipmm.tsu.ru

Поступила в редакцию 17.10.13.

VLADIMIR A. SHEFER

A NEW METHOD OF INTERMEDIATE ORBIT DETERMINATION BASED ON RANGE AND RANGE RATE MEASUREMENTS AT THREE TIMES

Tomsk State University, Tomsk, Russia
Tomsk State University of Architecture and Building

A new method is proposed for computing the preliminary orbit of a small celestial body from three pairs of range and range rate observations. The method is based on using the superosculating intermediate orbit with a fourth-order tangency that we previously constructed. This intermediate orbit allows for most of the perturbations in the motion of the body under study. The methodical error of orbit determination by the proposed method is three orders smaller than the corresponding error of the commonly used approach based on the construction of the unperturbed Keplerian orbit. Using the examples of finding the orbits of artificial Earth satellites, the results obtained by the procedure implementing the traditional approach and the new method are compared. The comparison shows that the new method is a highly efficient means for studying perturbed motion.

Шефер Владимир Александрович, д.ф.-м.н., профессор каф. АиКГ ТГУ, зав. лабораторией НИИ ПММ ТГУ; профессор каф. геодезии ТГАСУ.