

УДК 521.1:523.44-325

А.П. БАТУРИН, И.А. ВОТЧЕЛЬ

УСТРАНЕНИЕ ВЛИЯНИЯ РАЗРЫВОВ КООРДИНАТ ВОЗМУЩАЮЩИХ ТЕЛ И ИХ ПРОИЗВОДНЫХ НА ТОЧНОСТЬ ПРОГНОЗИРОВАНИЯ ДВИЖЕНИЯ АСТЕРОИДОВ¹

Рассмотрены два способа устранения влияния разрывов координат больших планет и Луны, интерполируемых с помощью эфемерид DE430, а также их производных, на точность прогнозирования движения астероидов. Первый способ заключается в сглаживании эфемерид, которое выполняется путем условной минимизации суммы квадратов разностей коэффициентов при полиномах Чебышева. Второй способ состоит в корректировке шага интегрирования таким образом, чтобы границы эфемеридных интервалов не попадали в пределы шага. Способы были применены при прогнозировании движения астероидов Апофис и 2012 DA14 с использованием эфемерид DE430. Показано, что при их одновременном применении точность прогнозирования может быть повышена примерно на 10 порядков.

Ключевые слова: эфемериды больших планет, DE430, разрывы производных, сглаживание.

В настоящее время при прогнозировании движения астероидов, как и других малых тел, для учета возмущений от больших планет и Луны, как правило, используются их эфемериды, содержащие информацию об их координатах в сжатом виде. Среди таких эфемерид следует упомянуть как отечественные (EPM2004, EPM2008), описанные, например, в работах [1, 2], так и американские (DE405, DE422, DE425 и т.п.) [3]. Последние используются чаще отечественных, поскольку охватывают значительно большие интервалы времени.

Для представления координат больших планет и Луны в современных эфемеридах применяются полиномы Чебышева [4], позволяющие интерполировать координаты на произвольный момент времени. Внутренняя структура всех эфемерид одинакова: весь охватываемый период времени разделен на равные интервалы интерполирования, для каждого из которых приводится свой набор коэффициентов при полиномах Чебышева. Характерной чертой эфемерид является то, что на границах соседних интервалов интерполирования соблюдается непрерывность лишь самих координат и их первых производных, а производные второго и более высокого порядка терпят разрыв. Следовательно, правые части системы дифференциальных уравнений, описывающих движение, на границах интервалов интерполирования также имеют скачки производных второго и более высокого порядка, которые приводят к снижению точности численного интегрирования системы в том случае, когда они попадают в пределы шагов интегрирования. Заметим, что сказанное справедливо для вычислений с традиционной 16-значной десятичной разрядностью, т.е. с использованием 64-битовых чисел с плавающей точкой. Если же вычисления производятся с более высокой разрядностью (например с 34-значной, соответствующей 128-битовым числам с плавающей точкой), то на границах соседних интервалов терпят разрыв уже и сами координаты вместе с их первыми производными, так как приводимые в эфемеридах коэффициенты имеют лишь 16-значную разрядность. Такое скачкообразное поведение координат и их производных до пятого порядка наглядно продемонстрировано в работе [5], где, в частности, показано, что координаты и их первые производные на границах интервалов интерполирования терпят разрывы в 15–16 десятичном знаке, вторые производные – в 10–11, третьи – в 7–8, четвертые – в 5–6, пятые – во 2–3 знаке и т.д.

Для устранения указанных разрывов был применен способ «сглаживания» эфемерид, описанный в работе [6] и использованный при сглаживании эфемерид DE423 до четвертых производных. В настоящей работе способ применяется при сглаживании эфемерид DE430 до первых производных. Поскольку в работе [6], ввиду ограничений на ее объем, было дано сокращенное описание способа, приведем его далее более подробно.

Формулы для вычисления какой-либо координаты и ее производных, интерполируемых с помощью эфемерид, имеют вид

$$f(\tau) = a_0 p_0(\tau) + \dots + a_n p_n(\tau), \quad f^{(k)}(\tau) = a_0 p_0^{(k)}(\tau) + \dots + a_n p_n^{(k)}(\tau), \quad (1)$$

¹ Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ в рамках научного проекта № 12-02-00220-а.

где $p_0(\tau), \dots, p_n(\tau)$ – полиномы Чебышева [4] от 0-й до n -й степени; a_0, \dots, a_n – приводимые в эфемеридях коэффициенты; τ – нормированное время, принимающее на границах интервалов интерполирования значения -1 (слева) и $+1$ (справа) и связанное с реальным временем t соотношением $\tau = 2(t - t_n)/(t_k - t_n) - 1$, причем t_n и t_k – начальный и конечный моменты интервала интерполирования; k – порядок производной.

Полиномы Чебышева и их производные вычисляются с помощью рекуррентных соотношений

$$\begin{aligned}
 &p_0 = 1, \quad p_1 = \tau, \quad p_i = 2\tau p_{i-1} - p_{i-2} \quad (i = 2, \dots, n), \\
 &p'_0 = 0, \quad p'_1 = 1, \quad p'_i = 2(p_{i-1} + \tau p'_{i-1}) - p'_{i-2} \quad (i = 2, \dots, n), \\
 &..... \\
 &p_0^{(k)} = 0, \quad p_1^{(k)} = 0, \quad p_i^{(k)} = 2(kp_{i-1}^{(k-1)} + \tau p_{i-1}^{(k)}) - p_{i-2}^{(k)} \quad (i = 2, \dots, n; \quad k \geq 2).
 \end{aligned}
 \tag{2}$$

Рассматриваемый способ сглаживания эфемерид основан на условной минимизации суммы квадратов разностей коэффициентов при полиномах Чебышева, причем в качестве условий задаются равенства на границах интервала интерполирования координат и производных до порядка k , вычисляемых «слева» и «справа» на каждой из обеих границ.

Обозначим искомые коэффициенты для исправленной (сглаженной) координаты через b_0, \dots, b_n . Тогда сглаженная координата и ее производные вычисляются как

$$\tilde{f}(\tau) = b_0 p_0(\tau) + \dots + b_n p_n(\tau), \quad \tilde{f}^{(k)}(\tau) = b_0 p_0^{(k)}(\tau) + \dots + b_n p_n^{(k)}(\tau).
 \tag{3}$$

Применение рассматриваемого способа для какого-либо интервала интерполирования заключается в решении задачи условной минимизации

$$\Phi = \sum_{i=0}^m (b_i - a_i)^2 + \sum_{i=0}^k \left\{ \lambda_{2i+1} [\tilde{f}^{(i)}(-1) - f_L^{(i)}] + \lambda_{2i+2} [\tilde{f}^{(i)}(1) - f_R^{(i)}] \right\} \rightarrow \min,
 \tag{4}$$

где Φ – функция Лагранжа; $f_L^{(i)}$ и $f_R^{(i)}$ – заданные «слева» и «справа» интервала интерполирования значения производной i -го порядка от координаты ($i = 0$ соответствует самой координате); $\lambda_1, \dots, \lambda_{2k+2}$ – множители Лагранжа; m – максимальный номер исправляемого коэффициента, причем ($m \leq n$); k – максимальный порядок «сглаживаемой» производной. Величины $f_L^{(i)}$ и $f_R^{(i)}$ задаются как полусуммы значений i -й производной, вычисляемых «слева» и «справа» на левой и правой границе интервала интерполирования по формулам (1).

Условием минимума (4) является равенство нулю частных производных от Φ по неизвестным параметрам $b_0, \dots, b_m, \lambda_1, \dots, \lambda_{2k+2}$:

$$\begin{cases} \frac{\partial \Phi}{\partial b_j} = 2(b_j - a_j) + \sum_{i=0}^k [\lambda_{2i+1} p_j^{(i)}(-1) + \lambda_{2i+2} p_j^{(i)}(1)] = 0 \quad (j = 0, \dots, m), \\ \frac{\partial \Phi}{\partial \lambda_{2j+1}} = \tilde{f}^{(j)}(-1) - f_L^{(j)} = 0, \quad \frac{\partial \Phi}{\partial \lambda_{2j+2}} = \tilde{f}^{(j)}(1) - f_R^{(j)} = 0 \quad (j = 0, \dots, k). \end{cases}
 \tag{5}$$

Переобозначив эти параметры в той же последовательности через x_0, \dots, x_{m+2k+2} , систему (5) можно записать в виде

$$\begin{cases} A_{00} x_0 + \dots + A_{0,m+2k+2} x_{m+2k+2} = B_0, \\ \dots \\ A_{m+2k+2,0} x_0 + \dots + A_{m+2k+2,m+2k+2} x_{m+2k+2} = B_{m+2k+2}. \end{cases}
 \tag{6}$$

Данная система является линейной относительно неизвестных параметров, ее ненулевые коэффициенты задаются формулами

$$A_{jj} = 2 \quad (j = 0, \dots, m),$$

$$A_{j,m+2l+1} = p_j^{(l)}(-1), \quad A_{j,m+2l+2} = p_j^{(l)}(1) \quad (j = 0, \dots, m, l = 0, \dots, k),$$

$$A_{m+2j+1,l} = p_l^{(j)}(-1), \quad A_{m+2j+2,l} = p_l^{(j)}(1) \quad (j = 0, \dots, k, l = 0, \dots, m),$$

$$B_j = 2a_j \quad (j = 0, \dots, m),$$

$$B_{m+2j+1} = f_L^{(j)} - \sum_{i=m+1}^n a_i p_i^{(j)}(-1), \quad B_{m+2j+2} = f_R^{(j)} - \sum_{i=m+1}^n a_i p_i^{(j)}(1) \quad (j = 0, \dots, k).$$

С помощью описанного способа было выполнено сглаживание эфемерид DE430 при $k = 1$, т.е. только до первых производных. Все расчеты выполнялись с 34-значной десятичной разрядностью. Для проверки отличия сглаженных эфемерид от исходных было выполнено вычисление относительных модулей разностей $\Delta r/r$ и $\Delta v/v$ векторов положения и скорости, получаемых из исходных и сглаженных эфемерид. Эти величины вычислялись с шагом $\Delta t = 1/128$ для всех интервалов интерполирования. В таблице приведены их средние ($\overline{\Delta r/r}$, $\overline{\Delta v/v}$) и максимальные ($\underline{\Delta r/r}$, $\underline{\Delta v/v}$) для всех интервалов значения (БЗЛ – барицентр системы Земля – Луна).

Отличия сглаженных эфемерид DE430 от исходных

Объект	$\overline{\Delta r/r}$	$\underline{\Delta r/r}$	$\overline{\Delta v/v}$	$\underline{\Delta v/v}$
Меркурий	$4,0 \cdot 10^{-17}$	$1,6 \cdot 10^{-16}$	$9,1 \cdot 10^{-17}$	$4,6 \cdot 10^{-16}$
Венера	$4,2 \cdot 10^{-17}$	$1,5 \cdot 10^{-16}$	$1,1 \cdot 10^{-16}$	$4,8 \cdot 10^{-16}$
БЗЛ	$4,0 \cdot 10^{-17}$	$1,9 \cdot 10^{-16}$	$1,7 \cdot 10^{-16}$	$1,1 \cdot 10^{-15}$
Марс	$4,1 \cdot 10^{-17}$	$1,4 \cdot 10^{-16}$	$1,6 \cdot 10^{-16}$	$7,4 \cdot 10^{-16}$
Юпитер	$4,5 \cdot 10^{-17}$	$1,6 \cdot 10^{-16}$	$1,0 \cdot 10^{-15}$	$6,1 \cdot 10^{-15}$
Сатурн	$4,5 \cdot 10^{-17}$	$1,8 \cdot 10^{-16}$	$2,6 \cdot 10^{-15}$	$1,4 \cdot 10^{-14}$
Уран	$4,6 \cdot 10^{-17}$	$1,7 \cdot 10^{-16}$	$7,5 \cdot 10^{-15}$	$4,0 \cdot 10^{-14}$
Нептун	$4,0 \cdot 10^{-17}$	$2,1 \cdot 10^{-16}$	$1,3 \cdot 10^{-14}$	$9,0 \cdot 10^{-14}$
Плутон	$4,3 \cdot 10^{-17}$	$2,1 \cdot 10^{-16}$	$2,4 \cdot 10^{-14}$	$1,5 \cdot 10^{-13}$
Луна	$4,4 \cdot 10^{-17}$	$1,5 \cdot 10^{-16}$	$6,7 \cdot 10^{-17}$	$3,3 \cdot 10^{-16}$
Солнце	$4,3 \cdot 10^{-17}$	$1,9 \cdot 10^{-16}$	$2,1 \cdot 10^{-15}$	$1,8 \cdot 10^{-14}$

Как видно из таблицы, координаты, вычисляемые с помощью сглаженных и исходных эфемерид, отличаются друг от друга не более чем в 16 десятичном знаке. Отличие в скоростях для быстрых объектов также имеет место примерно в 15–16 знаке, тогда как для более медленных оно может быть на 2 порядка больше. Причиной этого, по-видимому, являются более низкие степени полиномов Чебышева, используемые в эфемеридах для медленных объектов.

Помимо описанного способа, для устранения влияния разрывов производных второго и более высокого порядка на точность прогнозируемого движения может применяться и другой способ, описанный в работе [5] и заключающийся в корректировке шага численного интегрирования таким образом, чтобы границы эфемеридных интервалов не попадали в пределы шага. Для выполнения указанной корректировки алгоритм выбора шага в подпрограмме численного интегрирования методом Эверхарта [7] был дополнен проверкой попадания границы интервалов в пределы шага и в случае ее попадания завершением шага на этой границе. Такой способ полностью устраняет влияние на точность численного интегрирования разрывов производных второго и более высокого порядка, так как на каждом шаге решается задача Коши, использующая в качестве входных данных только координаты и их первые производные, а интегрируемые функции в пределах шага являются гладкими до какого угодно порядка. Однако очевидно, что этот способ может применяться только при расчетах с 16-значной десятичной разрядностью, так как он предполагает непрерывность координат и их первых производных на границах интервалов интерполирования, что выполняется лишь на 16-разрядной сетке. При расчетах с большей разрядностью для выполнения данного требования может быть применен описанный выше способ сглаживания эфемерид при $k = 1$, т.е. только до первых производных. Таким образом, при расчетах с расширенной разрядностью представляется наиболее эффективным одновременное использование обоих способов.

Описанные способы были применены при прогнозировании движения двух астероидов: Апофис с элементами орбиты $a = 0,92216$ а.е., $e = 0,19125$, $i = 3,3319^\circ$ на эпоху 2453360,5 (21 декабря

2004 г.) и 2012 DA14 с элементами $a = 0,90965$ а.е., $e = 0,09026$, $i = 11,802^{\circ}$ на эпоху 2456340,5 (17 февраля 2013 г. – уже после тесного сближения с Землей). Прогнозирование выполнялось с помощью численного интегрирования уравнений возмущенной задачи двух тел с использованием при учете возмущений от планет и Луны эфемерид DE430. Расчеты выполнялись с 16- и 34-значной разрядностью. При численном интегрировании применялся метод Эверхарта с переменным шагом и порядком 15 при расчетах с 16-значной разрядностью; порядком 31 при расчетах с 34-значной разрядностью. Были выполнены следующие варианты прогнозирования:

- 1) с исходными эфемеридами на 34-разрядной сетке;
- 2) со сглаженными эфемеридами на 34-разрядной сетке;
- 3) с исходными эфемеридами на 16-разрядной сетке.

Каждый вариант выполнялся для двух случаев:

- а) без корректировки шага интегрирования;
- б) с корректировкой шага интегрирования.

На рис. 1 и 2 приведены графики модуля разности Δr векторов положения, полученных в результате прямого и обратного численного интегрирования. Прогнозирование выполнялось на период в 30 000 сут (~81 год), выдача координат при интегрировании производилась путем выхода из интегратора через каждые 50 сут. Обозначения кривых соответствуют описанным выше вариантам прогнозирования.

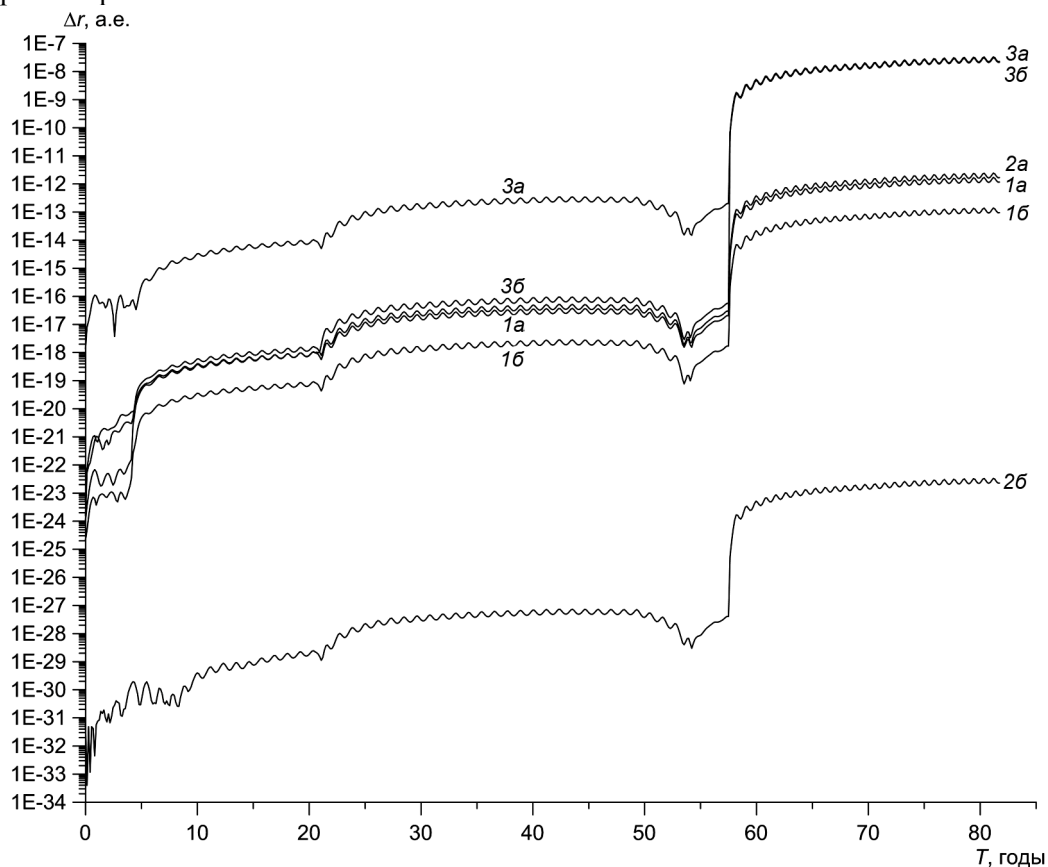


Рис. 1. Результаты оценивания точности прогнозирования движения для астероида Апофис

Прежде всего, сравнение кривых $1a$ и $3a$ на рис. 1 показывает, что простой переход от 16-разрядной сетки к 34-разрядной (с использованием исходных эфемерид) позволяет повысить точность численного интегрирования всего приблизительно на 4 порядка. Использование корректировки шага интегрирования на 34-разрядной сетке повышает эту точность еще примерно на 1 порядок (кривая $1b$). Сглаживание эфемерид без корректировки шага практически не повышает точность интегрирования по сравнению с простым переходом к 34-разрядной сетке (кривые $1a$ и $2a$). Применение корректировки шага с использованием исходных эфемерид приводит к повышению точности приблизительно на 1 порядок на 34-разрядной сетке (кривые $1a$ и $1b$) и на 4 порядка на 16-разрядной (кривые $3a$ и $3b$). Однако после тесного сближения с Землей 13 апреля 2029 г.,

которому соответствует резкий скачок всех кривых на рис. 1, кривые *3a* и *3б* почти совпадают. Наконец, как видно из рис.1, наибольшее повышение точности (примерно на 10 порядков) происходит при одновременном применении сглаженных эфемерид и корректировки шага интегрирования (кривая *2б*).

Однако астероид Апофис можно назвать «экстремальным» объектом в смысле поведения точности прогнозируемого движения, так как он имеет в 2029 г. очень тесное сближение с Землей, после которого это поведение становится малопредсказуемым. Поэтому более показательные результаты может дать прогнозирование движения другого объекта, не имеющего столь тесных сближений, например астероида 2012 DA14 после сближения с Землей 15 февраля 2013 г. Результаты прогнозирования для этого объекта приведены на рис. 2.

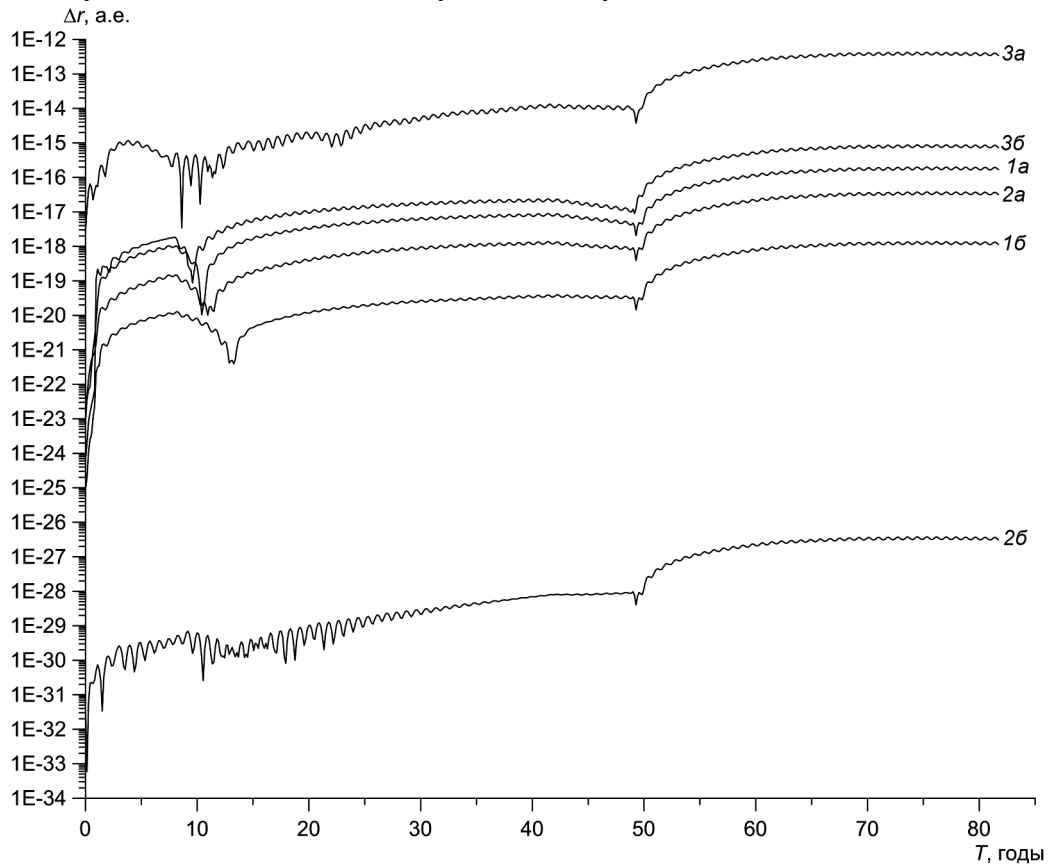


Рис. 2. Результаты оценивания точности прогнозирования движения для астероида 2012 DA14

Как видно из рис. 2, поведение кривых качественно повторяет их поведение на рис.1 до тесного сближения, хотя имеет некоторые количественные отличия. Так, кривые *1a* и *2a* уже не совпадают, что означает повышение точности примерно на порядок при использовании сглаженных эфемерид вместо исходных на 34-разрядной сетке. Кривые *3a* и *3б* расположены немного ближе друг к другу, т.е. использование корректировки шага интегрирования на 16-разрядной сетке приводит к повышению точности примерно на 3 порядка, а не на 4, как на рис.1. Кривые *1a* и *1б*, напротив, расположены дальше друг от друга, что говорит о повышении точности примерно на 3 порядка в результате использования сглаженных эфемерид на 34-разрядной сетке. И, наконец, самое большое повышение точности (примерно на 10 порядков), как и для астероида Апофис, происходит при использовании сглаженных эфемерид совместно с корректировкой шага интегрирования (кривая *2б*).

В результате выполненного исследования можно сделать следующие выводы:

– при использовании оригинальных эфемерид корректировка шага интегрирования повышает точность численного интегрирования уравнений движения примерно на 1–3 порядка на 34-разрядной сетке и на 3–4 порядка на 16-разрядной;

– использование сглаженных до первых производных эфемерид при расчетах на 34-разрядной сетке по точности практически равнозначно использованию оригинальных эфемерид, если шаг интегрирования не корректируется, или повышает эту точность не более чем на порядок;

– использование на 34-разрядной сетке сглаженных эфемерид совместно с корректировкой шага повышает точность численного интегрирования примерно на 10 порядков.

Следовательно, можно заключить, что при использовании для учета возмущений современных эфемерид шаг численного интегрирования должен корректироваться в соответствии с расположением границ соседних интервалов интерполирования. Особенно это имеет значение при расчетах на традиционной 16-разрядной сетке, так как точность интегрирования при этом повышается примерно на 3-4 порядка. На расширенной 34-разрядной сетке повышение точности также имеет место, хотя и не столь значительное. Наконец, для достижения наивысшей точности прогнозирования на 34-разрядной сетке следует совместно с корректировкой шага интегрирования использовать сглаженные эфемериды, причем достаточно сглаживания, выполненного лишь до первых производных.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Pitjeva E. V. // *Solar System Research*. – 2013. – V. 47. – Is. 5. – P. 386–402.
2. Питьева Е. В. // *Труды Института прикладной астрономии РАН*. – 2012. – № 23. – С. 149–157.
3. <ftp://ssd.jpl.nasa.gov/pub/eph/planets>
4. Демьянов В. Ф., Малоземов В. Н. Введение в минимакс. – М.: Наука, 1972. – 368 с.
5. Батури́н А. П. // *Изв. вузов. Физика*. – 2012. – Т. 55. – № 10/2. – С. 82–88.
6. Батури́н А. П., Вотчель И. А. // *Изв. вузов. Физика*. – 2013. – Т. 56. – № 6/3. – С. 188–190.
7. Бордови́цына Т. В. *Современные численные методы в задачах небесной механики*. – М.: Наука, 1984. – 136 с.

Национальный исследовательский
Томский государственный университет, г. Томск, Россия
E-mail: alexbaturin@sibmail.com

Поступила в редакцию 17.10.13.

A.P. BATURIN, I.A. VOTCHEL

THE ELIMINATION OF INFLUENCE OF DISTURBING BODIES' COORDINATES AND DERIVATIVES DISCONTINUITY ON THE ACCURACY OF ASTEROID MOTION SIMULATION

Tomsk State University, Tomsk, Russia

The problem of asteroid motion simulation has been considered. At present this simulation is being performed by means of numerical integration taking into account the perturbations from planets and the Moon with some their ephemerides (DE405, DE422, etc.). All these ephemerides contain coefficients for Chebyshev polynomials for the great amount of equal interpolation intervals. However, all ephemerides has been constructed to keep at the junctions of adjacent intervals a continuity of just coordinates and their first derivatives (just in 16-digit decimal format corresponding to 64-bit floating-point numbers). But as for the second and higher order derivatives, they have breaks at these junctions. These breaks, if they are within an integration step, decrease the accuracy of numerical integration. If to consider 34-digit format (128-bit floating point numbers) the coordinates and their first derivatives will also have breaks (at 15-16 decimal digit) at interpolation intervals' junctions. Two ways of elimination of influence of such breaks have been considered. The first one is a "smoothing" of ephemerides so that planets' coordinates and their derivatives up to some order will be continuous at the junctions. The smoothing algorithm is based on conditional least-square fitting of coefficients for Chebyshev polynomials, the conditions are equalities of coordinates and derivatives up to some order "from the left" and "from the right" at the each junction. The algorithm has been applied for the smoothing of ephemerides DE430 just up to the first-order derivatives. The second way is a correction of integration step so that junctions does not lie within the step and always coincide with its end. But this way may be applied just at 16-digit decimal precision because it assumes a continuity of planets' coordinates and their first derivatives. Both ways was applied in forward and backward numerical integration for asteroids Apophis and 2012 DA14 by means of 15- and 31-order Everhart method at 16- and 34-digit decimal precision correspondently. The ephemerides DE430 (in its original and smoothed form) has been used for the calculation of perturbations. The results of the research indicate that the integration step correction increases a numerical integration accuracy by 3-4 orders. If, in addition, to replace the original ephemerides by the smoothed ones the accuracy increases approximately by 10 orders.